

Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 7

Transformacja zmiennych w całce

Transformacja zmiennych w całce:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_{R_X} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n &= \\ &= \int \cdots \int_{R_Y} f(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)) \frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} dy_1 \cdots dy_n \end{aligned}$$

Uwaga: Jakobian jest równy stosunkowi elementów objętości $dx_1 \cdots dx_n$ oraz $dy_1 \cdots dy_n$. Jeśli zatem uznamy, że jacobian należy do elementu objętości, wówczas

$$g(y_1, \dots, y_n) \equiv f(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Obie funkcje mają to samo znaczenie fizyczne, ponieważ odpowiadają temu samemu elementowi objętości.

Często jednak nie chcemy aby obie wielkości odpowiadały temu smemu elementowi objętości, np.

$$f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \equiv h(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n$$

$$h(y_1, \dots, y_n) \equiv f(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)}$$

Transformacja różniczkowego przekroju czynnego

Transformacja z przestrzeni pędów ($dp_1 dp_2 dp_3$) do współrzędnych sferycznych ($d\Omega$ i pęd pomiędzy p i $p + dp$).

$$\frac{\partial^3 S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3} dp_1 dp_2 dp_3 = \frac{\partial^3 S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3} \frac{\partial(p_1 p_2 p_3)}{\partial(p\theta\varphi)} dp d\theta d\varphi$$

Ponieważ $\frac{\partial(p_1 p_2 p_3)}{\partial(p\theta\varphi)} = p^2 \sin \theta$ więc dostajemy: $\underbrace{\frac{\partial^3 S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3}}_{\frac{\partial^2 \sigma(p, \theta, \varphi)}{\partial p \partial \Omega}} p^2 \underbrace{\sin \theta dp d\theta d\varphi}_{dp d\Omega}$

Transformacja pomiędzy układami S i S' (ruch względem wspólnej osi zz').

$$E' = \gamma(E - \beta p_3), \quad p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = \gamma(p_3 - \beta E)$$

Wprowadzamy współrzędne sferyczne:

$$p_1 = p \sin \theta \cos \varphi$$

$$p_2 = p \sin \theta \sin \varphi$$

$$p_3 = p \cos \theta$$

$$p' \cos \theta' = \gamma(p \cos \theta - \beta E)$$

$$p' \sin \theta' = p \sin \theta$$

$$\varphi' = \varphi$$

$$E' = \gamma(E - \beta p \cos \theta)$$

Transformacja różniczkowego przekroju czynnego

Żądamy aby liczba cząstek w kącie bryłowym $d\Omega$ i mających pęd w zakresie p i $p + dp$ była równa liczbie cząstek w kącie bryłowym $d\Omega'$ i mających pęd w zakresie p' i $p' + dp'$:

$$\frac{\partial^2 \sigma(p, \theta, \varphi)}{\partial p \partial \Omega} dp d\Omega = \frac{\partial^2 \sigma'(p', \theta', \varphi')}{\partial p' \partial \Omega'} dp' d\Omega'$$

Jakobian można zapisać jako złożenie następujących transformacji:

$$\frac{\partial(p\Omega)}{\partial(p'\Omega')} = \frac{\partial(p\Omega)}{\partial(p\theta\varphi)} \frac{\partial(p\theta\varphi)}{\partial(p_1 p_2 p_3)} \frac{\partial(p_1 p_2 p_3)}{\partial(p'_1 p'_2 p'_3)} \frac{\partial(p'_1 p'_2 p'_3)}{\partial(p'\theta'\varphi')} \frac{\partial(p'\theta'\varphi')}{\partial(p'\Omega')}$$

Ponieważ $\frac{\partial(p_1 p_2 p_3)}{\partial(p'_1 p'_2 p'_3)} = \frac{\partial p_3}{\partial p'_3} = \gamma + \gamma\beta \frac{\partial E'}{\partial p'_3} = \gamma + \gamma\beta \frac{p'_3}{E'} = \frac{E}{E'}$, więc

$$\frac{\partial(p\Omega)}{\partial(p'\Omega')} = \sin \theta \frac{1}{p^2 \sin \theta} \frac{E}{E'} p'^2 \sin \theta' \frac{1}{\sin \theta'} = \frac{E p'^2}{E' p^2} = \frac{E \sin^2 \theta}{E' \sin^2 \theta'}$$

A więc przekroje czynne w obu układach związane są relacją:

$$\frac{\partial^2 \sigma(p', \theta', \varphi')}{\partial p' \partial \Omega'} = \frac{\partial^2 \sigma(p, \theta, \varphi)}{\partial p \partial \Omega} \frac{\partial(p\Omega)}{\partial(p'\Omega')} = \frac{\partial^2 \sigma(p, \theta, \varphi)}{\partial p \partial \Omega} \frac{E p'^2}{E' p^2}$$

Rozkład pędu w CMS i LAB

Rozważmy izotropowy rozkład cząstek o ustalonej energii w CMS.
Jak wygląda ten rozkład w LAB?

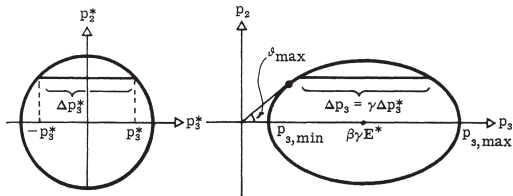
$$p_1 = p_1^*, \quad p_2 = p_2^*, \quad p_3 = \gamma(p_3^* + \beta E^*), \quad E^* = \text{const}$$

Spektrum, które w CMS ma kształt sfery, w LAB przyjmuje postać elipsoidy o półosiach, $a_1 = p^*$, $a_2 = p^*$, a_3 :

$$p_{3,\text{max}} = \gamma(p^* + \beta E^*)$$

$$p_{3,\text{min}} = \gamma(-p^* + \beta E^*)$$

$$p_{3,\text{center}} = \gamma\beta E^*$$



Równanie elipsoidy:

$$\frac{p_1^{*2} + p_2^{*2} + p_3^{*2}}{p^{*2}} = \frac{p_1^2}{p^{*2}} + \frac{p_2^2}{p^{*2}} + \frac{(p_3 - \gamma\beta E^*)^2}{p^{*2}} = 1$$

Elipsoida przechodzi przez punkt (0,0,0) gdy:

$$p_{3,\text{min}} = \gamma(-p^* + \beta E^*) = \gamma p^* [(\beta/v^*) - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad v^* = \beta$$

Dla $v^* > \beta$ punkt (0,0,0) leży wewnątrz elipsoidy.

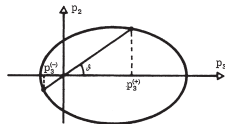
Rozkład pędu w CMS i LAB

Wartości pędów odpowiadające temu samemu kątowi θ w LAB otrzymujemy wstawiając $p_2 = p_3 \operatorname{tg} \theta$ do równania elipsoidy (wybieramy układ tak aby $p_1 = 0$):

$$p_3^{\pm} = \frac{\beta\gamma E^* \pm \sqrt{\beta^2\gamma^2 E^{*2} - (1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta)(\beta^2\gamma^2 E^{*2} - \gamma^2 p^{*2})}}{1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta}$$

Maksymalna wartość kąta θ występuje dla $p_3^+ = p_3^-$, co oznacza zerowanie się pierwiastka, a stąd:

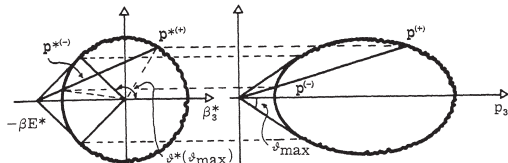
$$\operatorname{tg}^2 \theta_{\max} = \frac{v^{*2}}{\gamma^2(\beta^2 - v^{*2})} \quad \text{gdzie} \quad v^* = \frac{p^*}{E^*}$$



Jakiemu kątowi θ^* w CMS odpowiada kąt θ_{\max} w LAB?

$$p_2 = p_2^*, \quad p_3 = \gamma(p_3^* + \beta E^*)$$

$$(0, 0)_{\text{LAB}} \rightarrow (p_2^* = 0, p_3^* = -\beta E^*)$$



Z rysunku odczytujemy:

$$-\cos \theta^*(\theta_{\max}) = \frac{p^*}{\beta E^*} \Rightarrow \cos \theta^*(\theta_{\max}) = -\frac{v^*}{\beta}$$

Opis rozpraszania elastycznego - zmienne niezależne

Do opisu rozpraszania elastycznego cząstek bezspinowych w mechanice kwantowej służy amplituda zależna jedynie od czteropędów tych cząstek:

$$T_{fi} = T(p_1, k_1, p_2, k_2)$$

Całkowita liczba zmiennych wynosi 16. Jednak:

- $|T_{fi}|^2 \propto P\text{-two}$ \Rightarrow nie zależy od układu, a więc tylko niezmienniki:

$$p_1^2, k_1^2, p_2^2, k_2^2, p_1k_1, p_1k_2, p_1p_2, k_1k_2, k_1p_2, k_2p_2$$

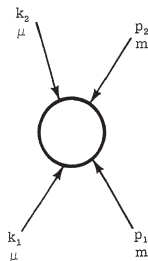
- ale $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ i $k_1^2 = k_2^2 = \mu^2$ to parametry,
- pozostałe 6 zmiennych można użyć do opisu rozpraszania, ale tylko dwie są niezależne ze względu na zachowanie czteropędu $p_1 + k_1 + p_2 + k_2 = 0$.

Zachodzą np. następujące relacje:

$$k_1p_1 = k_2p_2, \quad k_1p_2 = k_2p_1, \quad \mu^2 + k_1k_2 = m^2 + p_1p_2, \quad p_1p_2 = -m^2 - p_1k_1 - p_1k_2$$

Jako zmienne niezależne można np. wybrać: p_1k_1 i p_1k_2 .

Symbolem 'prime' będziemy oznaczać zmienne dotyczące cząstek 'wychodzących'.



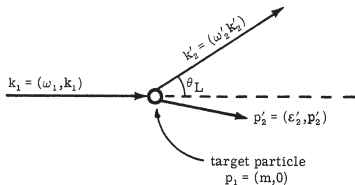
Układy wykorzystywane do opisu rozpraszania

Układ laboratoryjny (LAB) - jedna z cząstek pierwotnych spoczywa (np. p_1):

$$p_1 = (m, 0), \quad p'_2 = (E'_2, \vec{p}'_2), \quad k_1 = (\omega_1, \vec{k}_1), \quad k'_2 = (\omega'_2, \vec{k}'_2)$$

$$\omega_1 = \frac{p_1 k_1}{m}, \quad \omega'_2 = \frac{p_1 k'_2}{m}, \quad E'_2 = \frac{p_1 p'_2}{m}$$

$$k_1 k'_2 = \omega_1 \omega'_2 - |\vec{k}_1| |\vec{k}'_2| \cos \theta_L$$



Kąt θ_L wyrażony poprzez niezmienniki:

$$\cos \theta_L = \frac{\omega_1 \omega'_2 - k_1 k'_2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \mu^2)(\omega'^2_2 - \mu^2)}} = \frac{(k_1 p_1)(k'_2 p_1) - m^2(k_1 k'_2)}{\sqrt{[(k_1 p_1)^2 - m^2 \mu^2][(k'_2 p_1)^2 - m^2 \mu^2]}}$$

Układ środka masy (CMS): $\vec{k}_1 + \vec{p}_1 = \vec{k}'_2 + \vec{p}'_2 = 0$

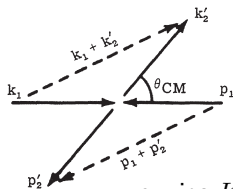
$$|\vec{k}_1| = |\vec{p}_1| \equiv K, \quad |\vec{k}'_2| = |\vec{p}'_2| \equiv K'$$

$$E_{\text{CMS}}^2 = (p_1 + k_1)^2 = (p'_2 + k'_2)^2$$

$$\Rightarrow (E_1 + \omega_1)^2 = (E'_2 + \omega'_2)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{K^2 + m^2} + \sqrt{K^2 + \mu^2} \right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{K'^2 + m^2} + \sqrt{K'^2 + \mu^2} \right)^2$$



a więc $K = K'$.

Układy wykorzystywane do opisu rozpraszania

Do opisu rozpraszania w CMS używamy energii $E_{\text{CM}}^2 \equiv s$. Jako drugą zmienną nie możemy wybrać K ponieważ

$$K^2 = \frac{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}{4s}$$

K^2 jest kwadratem pędu każdej z cząstek w CMS przed lub po rozpraszaniu.

Zmienna s jest kwadratem energii w układzie CMS:

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + k_1)^2 = (p'_2 + k'_2)^2 = (p_1 + k_1)(p'_2 + k'_2) \\ &= \left(\sqrt{K^2 + m^2} + \sqrt{K^2 + \mu^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Jako drugą zmienną do opisu rozpraszania w CMS stosuje się kąt θ_{CM} :

$$\begin{aligned} t &\equiv (k_1 - k'_2)^2 = 2\mu^2 - 2k_1 k'_2 = 2(\mu^2 - \omega^2 + K^2 \cos \theta_{\text{CM}}) = \\ &= \left\{ \omega^2 = K^2 + \mu^2 \right\} = 2K^2(\cos \theta_{\text{CM}} - 1) = \\ &= \frac{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}{2s} (\cos \theta_{\text{CM}} - 1) \end{aligned}$$

Stąd:

$$\cos \theta_{\text{CM}} = 1 + \frac{t}{2K^2} = 1 + \frac{2ts}{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}$$

Układy wykorzystywane do opisu rozpraszania

Układ Breita (Brick Wall) - obie cząstki "odbijają się od ściany", jedna z nich zmienia pęd na przeciwny ($\vec{k}_1 + \vec{k}'_2 = 0$):

$$k_1 = (\omega, \vec{k}), \quad k'_2 = (\omega, -\vec{k})$$

$$p_1 = (E, \vec{p}_1), \quad p'_2 = (E, \vec{p}'_2)$$

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}'_2| = p = \sqrt{E^2 - m^2}$$

$$k_1 - k'_2 = p'_2 - p_1 \Rightarrow (0, 2\vec{k}) = (0, \vec{p}'_2 - \vec{p}_1)$$

$2\vec{k}$ to przekaz trój-pędu.

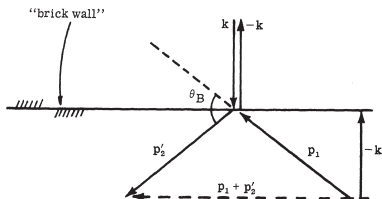
Jako niezależne zmienne do opisu rozpraszania można wybrać energie:

$$k_1 + k'_2 = (2\omega, \vec{0}) \Rightarrow \omega_B^2 = \frac{1}{4}(k_1 + k'_2)^2$$

$$(p_1 + p'_2)(k_1 + k'_2) = 4E\omega \Rightarrow E_B = \frac{1}{2} \frac{(p_1 + p'_2)(k_1 + k'_2)}{\sqrt{(k_1 + k'_2)^2}}$$

Kąt rozproszenia cząstki 'p':

$$t \equiv (k_1 - k'_2)^2 = (p_1 - p'_2)^2 = 2p^2(\cos \theta_B - 1) \Rightarrow \cos \theta_B = 1 + \frac{t}{2p^2}$$

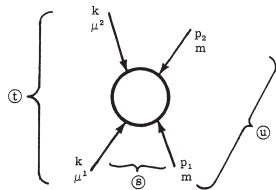


Zmienne Mandelstama s, t, u

$$s \equiv (k_1 + p_1)^2 = (k_2 + p_2)^2 = -(k_1 + p_1)(k_2 + p_2)$$

$$t \equiv (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 = -(k_1 + k_2)(p_1 + p_2) = 2(\mu^2 + k_1 k_2) = 2(m^2 + p_1 p_2)$$

$$u \equiv (k_1 + p_2)^2 = (p_1 + k_2)^2 = -(k_1 + p_2)(p_1 + k_2)$$



Znaczenie zmiennych s, t, u :

- s to kwadrat energii w CMS gdy padającymi cząstkami są k_1, p_1 lub k_2, p_2 .
- t to kwadrat przekazu czteropędu (w układzie Breita redukuje się do kwadratu przekazu trójpędu).
- u nie ma prostej interpretacji fizycznej w żadnym układzie (ponieważ jest różnicą pędów cząstek o różnych masach).

Tylko dwie spośród zmiennych s, t, u są niezależne:

$$s + t + u = 4\mu^2 + 2m^2 + 2k_1(p_1 + p_2 + k_2) = 2\mu^2 + 2m^2$$