

# Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 8

## Szczególna Teoria Względności (STW) - podsumowanie:

- służy do opisu obiektów poruszających się z dużymi prędkościami,
- słuszna w inercjalnych układach odniesienia,
- zdarzenie to punkt w czasoprzestrzeni  $(t, x, y, z)$ ,
- upływ czasu i odległości przestrzenne wygodnie mierzyć w tych samych jednostkach (np. czas w metrach pokonanych przez światło),
- obserwatorzy znajdujący się w różnych inercjalnych układach odniesienia przypisują najczęściej różne wartości odległości  $\Delta x$  i upływu czasu  $\Delta t$  pomiędzy dwoma zdarzeniami,
- zgadzają się jednak co do wartości odstępu czasu  $\Delta\tau$  (czas własny), mierzonego na zegarze w układzie w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu:

$$\Delta s^2 \equiv \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta\tau^2$$

- długość własna  $\Delta\sigma$  - odległość pomiędzy jednoczesnymi zdarzeniami:

$$\Delta s^2 \equiv \Delta t^2 - \Delta x^2 = -\Delta\sigma^2$$

## Zasada maksymalnego starzenia się:

Cząstka swobodna porusza się pomiędzy dwoma zdarzeniami w czasoprzestrzeni po linii, wzdłuż której upływ czasu pomiędzy tymi zdarzeniami, mierzony na zegarze związanym z cząstką, jest maksymalny.

**Metryka w STW:** (płaska czasoprzestrzeń)

Odległości pomiędzy punktami w przestrzeni określają jej geometrię.

Interwały pomiędzy zdarzeniami w czasoprzestrzeni określają geometrię czasoprzestrzeni:

$$\Delta s^2 \equiv \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta \tau^2 \qquad \Delta s^2 \equiv \Delta t^2 - \Delta x^2 = -\Delta \sigma^2$$

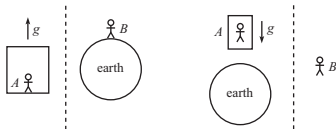
Gdy istnieje centrum przyciągania wygodne stają się współrzędne sferyczne:

$$(\Delta \tau)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 - (r \Delta \phi)^2$$

**Równoważność masy bezwładnej i grawitacyjnej:**

$$\left. \begin{array}{l} F = G \frac{M m_g}{r^2} \\ F = m_i a \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{m_g}{m_i} g$$

Masa grawitacyjna jest proporcjonalna do masy bezwładnej.



**Zasada równoważności Einsteina (ZRE):**

Układ odniesienia poruszający się ze stałym przyspieszeniem jest lokalnie nieodróżnialny od układu znajdującego się w spoczynku lub poruszającego się ruchem jednostajnym w polu grawitacyjnym.

# Lokalność układów inercjalnych

Układ inercjalny nie może być zbyt duży (czasoprzestrzeń).

Lokalny charakter układów inercjalnych wymaga stosowania OTW - do opisu ruchu w pobliżu masywnych obiektów potrzeba wielu lokalnych układów inercjalnych.

Pojęcie 'obserwatora' w STW i tzw. 'odległego obserwatora' w OTW (układ inercjalny ale nie sięgający źródła przyciągania grawitacyjnego)

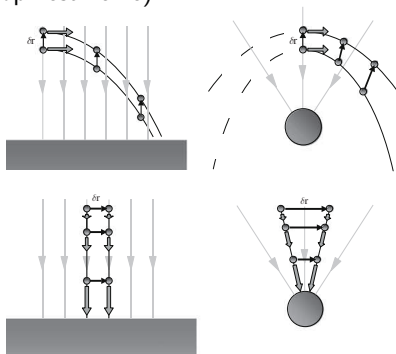
Einstein: krzywizna czasoprzestrzeni

Newton: przyspieszenia pływowe

Dla dwóch trajektorii  $\vec{r}_1(t)$  oraz  $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) + \delta\vec{r}$  mamy ( $\Phi$  - potencjał grawitacyjny):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\delta\vec{r} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}) + \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_1) \approx -(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_1)$$

Miarą krzywizny jest zmiana odległości pomiędzy liniami prostymi, które były początkowo równoległe.



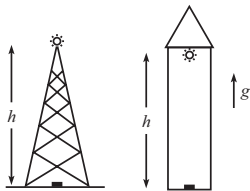
# Grawitacyjna dylatacja czasu

**Wniosek z ZRE:** Zegary znajdujące się wyżej w polu grawitacyjnym spieszą w porównaniu do zegarów znajdujących się niżej.

$t_s$  - odstęp czasu pomiędzy sygnałami emitowanymi przez źródło

$t_r$  - odstęp czasu pomiędzy sygnałami rejestrowanymi przez odbiornik

$S$  - chwilowy układ spoczynkowy rakiety ( $t = 0$ )



**Analiza w układzie  $S$ :** Rozważmy serię szybkich błysków ( $t_s$  małe) - prędkość oraz droga przebyte przez źródło w czasie  $t_s$  dążą do zera:

$$v_s = gt \rightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad l_s = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0$$

a więc można zaniedbać ruch rakiety jeśli rozważamy źródło.

Ale czas potrzebny na dotarcie sygnału do odbiornika jest skończony  $h/c$ , a więc nie można zaniedbać ruchu rakiety jeśli rozważamy odbiornik.

Zaniedbując efekty wyższego rzędu znajdujemy, że:

$$v_r = gt = g \frac{h}{c} \quad \text{oraz} \quad h - l_r = h - \frac{1}{2}g(h/c)^2 \xrightarrow{(h/c)^2 \rightarrow 0} h$$

Klasyczny efekt Dopplera prowadzi do zależności:

$$t_r = \frac{ct_s}{c+v} = \frac{t_s}{1+v/c} \Rightarrow f_r = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f_s = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) f_s$$

Obserwator znajdujący się na powierzchni Ziemi widzi, że zegar na wieży spiesz y w porównaniu z jego zegarem:

$$\Delta t_h = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \Delta t_0$$

**Uwaga 1:** Ponieważ cała analiza odbyła się w jednym układzie odniesienia ( $S$ ), więc to co obserwator widzi jest równoważne temu co aktualnie jest.

**Uwaga 2:** Mogłoby się wydawać, że skoro  $t_r$  jest mierzone w układzie  $S$ , a odbiornik porusza się względem niego, więc w zasadzie powinniśmy pomnożyć  $f_r$  przez  $\gamma$  - jednak jest to efekt drugiego rzędu w  $gh/c^2$ , który systematycznie zaniedbywaliśmy, więc teraz nie możemy go uwzględnić.

Pierwszy eksperyment (precyzja – zmiana częstości promieniowania gamma (R.Pound, G.Rebka, Phys. Rev. Lett. 3, 439 (1959)))

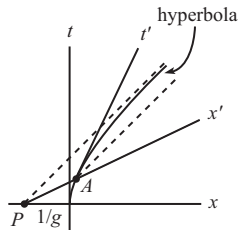
# Układ jednostajnie przyspieszony

Rozważamy cząstkę o masie  $m$  jednostajnie przyspieszaną siłą  $f = mg$ . Cząstka początkowo spoczywa w układzie  $S$ , a następnie znajduje się w kolejnych chwilowych układach inercjalnych  $S'$ :

$$f'_x = f_x = \text{const}$$

$$f = \frac{dp}{dt} = \frac{d(\gamma mv)}{dt} \Rightarrow \gamma v = gt \Rightarrow v = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt)^2}}$$

$$x = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{gt dt}{\sqrt{1 + (gt)^2}} = \frac{1}{g} \left( \sqrt{1 + (gt)^2} - 1 \right)$$



Definiując punkt  $P (x_P, t_P) = (-1/g, 0)$  mamy  $(x - x_P)^2 - t^2 = \frac{1}{g^2}$

Nachylenie linii  $PA$ , gdzie  $A$  jest dowolnym punktem na linii świata cząstki, dane jest przez:

$$\frac{t_A - t_P}{x_A - x_P} = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt)^2}} = v$$

Linia  $PA$  definiuje więc chwilową oś  $x'$ . Oznacza to, że zdarzenie  $P$  jest jednocześnie w  $S'$  z dowolnym zdarzeniem zachodzącym w układzie cząstki.

Punkt  $P$  jest analogiem horyzontu zdarzeń wokół czarnej dziury.

# Układ jednostajnie przyspieszony

Jaka jest odległość punktów  $P$  i  $A$  w chwilowym układzie cząstki  $S'$ ?

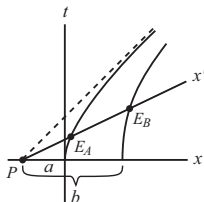
$$\text{Mamy } \gamma = \sqrt{1 + (gt)^2} \text{ oraz } x_A - x_P = \frac{1}{g} \sqrt{1 + (gt)^2}$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \Rightarrow \left\{ \Delta t' = 0 \right\} \Rightarrow x'_A - x'_P = \frac{1}{\gamma}(x_A - x_P) = \frac{1}{g}$$

W układzie  $S'$  punkt  $P$  pozostaje zawsze w stałej odległości od cząstki!

Z jednostajnie przyspieszanych cząstek budujemy jednostajnie przyspieszony układ odniesienia (ale taki w którym odległości pomiędzy nimi pozostają stałe w ich układach chwilowych  $S'$ ):

$$g_A = \frac{1}{a} \text{ oraz } g_B = \frac{1}{b} \Rightarrow g(z) \propto \frac{1}{z}$$



$A$  i  $B$  odczuwają różne przyspieszenia własne. Nie jest możliwe skonstruowanie statycznego układu (o skończonych rozmiarach) w którym wszystkie punkty odczuwają jednakowe przyspieszenie własne.

Po opuszczeniu układu  $S'$  po pewnym czasie mijamy punkt  $P$ , ale obserwator pozostający w układzie  $S'$  stwierdzi, że czas 'spadania' na  $P$  jest nieskończony.



# Jednostki masy - masa w metrach

Opis czasoprzestrzeni w pobliżu masywnych obiektów jest prostszy jeśli masa ciała jest wyrażona w jednostkach długości.

$$F = G \frac{M_{kg} m_{kg}}{r^2} \qquad G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right]$$

$$\frac{G}{c^2} = \frac{6.6726 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right]}{8.9876 \cdot 10^{16} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]} = 7.424 \cdot 10^{-28} \left[ \frac{\text{m}}{\text{kg}} \right]$$

Obiekt	Masa [kg]	Masa [m]	Promień [m]
Ziemia	$5.9742 \cdot 10^{24}$	$4.44 \cdot 10^{-3}$	$6.371 \cdot 10^6$
Słońce	$1.989 \cdot 10^{30}$	$1.477 \cdot 10^3$	$6.960 \cdot 10^8$
Czarna dziura w centrum Drogi Mlecznej	$5.2 \cdot 10^{36}$ ( $2.6 \cdot 10^6 M_{\odot}$ )	$3.8 \cdot 10^9$	
Czarna dziura w centrum gromady galaktyk Virgo	$6 \cdot 10^{39}$ ( $3 \cdot 10^9 M_{\odot}$ )	$4 \cdot 10^{12}$	

# Rozmaitość różniczkowa (differential manifold)

**Definicja:** Rozmaitość  $\mathcal{M}$  to dowolny zbiór (punktów), który można w sposób ciągły sparametryzować. Liczba niezależnych parametrów potrzebnych do jednoznacznego określenia dowolnego punktu w zbiorze określa **wymiar** rozmaitości. Same parametry nazywamy **współzrędnymi**  $(x^1, x^2, \dots, x^N)$ .

**Definicja:** Rozmaitość różniczkowa to rozmaitość na której można określić pole skalarne w każdym punkcie, które jest różniczkowalne wszędzie.

**Przykłady rozmaitości:**

- zbiór obrotów układu kartezjańskiego w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej - parametry to kąty Eulera,
- przestrzeń fazowa cząstki w mechanice klasycznej - parametry to współrzędne przestrzenne  $(x_1, x_2, x_3)$  oraz pędy  $(p_1, p_2, p_3)$ ,
- czasoprzestrzeń z geometrią Minkowskiego - parametry to  $(t, x_1, x_2, x_3)$ .

**Definicja:** Krzywa w rozmaitości określona jest równaniem parametrycznym:

$$x^a = x^a(u) \quad (a = 1, 2, \dots, N)$$

**Definicja:**  $M$ -wymiarowa **powierzchnia** w rozmaitości  $N$ -wymiarowej określona jest za pomocą  $M$ -parametrów:

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \dots, u^M) \quad (a = 1, 2, \dots, N)$$

# Geometria rozmaitości i tensor metryczny

Wybór współrzędnych do określenia położenia punktu w rozmaitości jest dowolny. Nowe współrzędne można zapisać jako funkcje starych współrzędnych:

$$x'^a = x'^a(x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (a = 1, 2, \dots, N)$$

Jeśli rozważymy dwa bliskie punkty  $P$  i  $Q$  w rozmaitości, których współrzędne to  $x^a$  oraz  $x^a + dx^a$ , to wówczas:

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^a}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial x'^a}{\partial x^N} dx^N = \sum_{b=1}^N \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b$$

Konwencja sumowania Einsteina:  $dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b$

Geometria rozmaitości określona jest poprzez zdefiniowanie odległości (interwału) pomiędzy punktami, których współrzędne różnią się o infinytezymalną wartość:

$$ds^2 = f(x^a, dx^a)$$

W OTW rozważamy interwały w postaci (rozmaitość pseudo-riemannowska):

$$ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b$$

gdzie  $g_{ab}(x)$  to tzw. tensor metryczny, który można uważać za symetryczną macierz  $N \times N$ , a więc zawierającą  $\frac{1}{2}N(N+1)$  niezależnych funkcji  $g_{ab}(x)$ .

# Tensor metryczny

Postać tensora metrycznego zależy od wyboru współrzędnych, natomiast przy transformacji współrzędnych niezmienniczy jest interwał pomiędzy dwoma punktami w rozmaitości:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = g_{ab}(x(x')) \frac{\partial x^a}{\partial x'^c} \frac{\partial x^b}{\partial x'^d} dx'^c dx'^d = g'_{cd}(x') dx'^c dx'^d = ds'^2$$

Funkcje metryczne  $g_{ab}(x)$  oraz  $g'_{ab}(x')$  opisują tę samą geometrię rozmaitości.

Tensor metryczny można wyznaczyć wprost z wektorów bazowych:

$$g_{ab}(x) = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x'^a} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x'^b} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \hat{x}_i \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} \hat{x}_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} \delta_{ij}$$

Przykłady tensorów metrycznych:

- 3D przestrzeń Euklidesowa:

współrzędne kartezjańskie:  $g_{ab} = \text{diag}(1, 1, 1)$

współrzędne sferyczne:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = (dr, d\theta, d\phi) [g_{ab}] \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

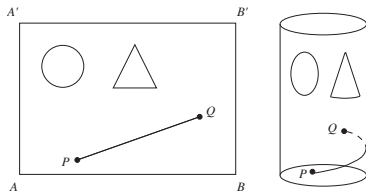
- czasoprzestrzeń Minkowskiego:  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

# Geometria rozmaitości

Lokalna geometria określona za pomocą  $g_{ab}(x)$  jest wewnętrzną cechą rozmaitości i nie zależy od tego czy i w jaki sposób ta rozmaitość jest zanurzona w przestrzeni o wyższym wymiarze.

Rozważmy robaka na kartce papieru na której zdefiniowana jest odległość  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

Jeśli kartka zostanie zwinięta w cylinder, to robak nie będzie w stanie stwierdzić żadnej różnicy - suma kątów w trójkącie będzie równa  $180^\circ$ , obwód okręgu  $2\pi r^2$ , itp.



Przejście od cylindra do płaskiej kartki oznacza zwykłą zmianę współrzędnych:

$$ds^2 = dz^2 + a^2 d\phi^2 = \left\{ \begin{matrix} x = z, \\ y = a\phi \end{matrix} \right\} = dx^2 + dy^2$$

Inaczej sytuacja wygląda w przypadku sfery 2D zanurzonej w 3D przestrzeni Euklidesowej. Nie istnieje transformacja współrzędnych, która przetransformowałaby odległość wyrażoną we współrzędnych sferycznych  $(\theta, \phi)$ :

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

do postaci Euklidesowej  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  w całym obszarze jednocześnie.

