

Szczególna i ogólna teoria względności (wybrane zagadnienia)

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 9

Równania pola Einsteina

Równania pola Einsteina mają postać:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}), \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad T \equiv T^\mu_\mu$$

gdzie $R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\nu\rho}$ oraz $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ to odpowiednio **tensor i skalar Ricci'ego**.

$R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ to **tensor krzywizny** - w przestrzeni 4D posiada 20 niezależnych składowych.

$T_{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ to **tensor energii-pędu**, którego składowe w lokalnym kartezjańskim inercjalnym układzie w punkcie P mają następującą interpretację ($u^\mu = \gamma_u(c, \vec{u})$):

- $T^{00} = \rho u^0 u^0 = \gamma_u^2 \rho c^2$ - gęstość energii cząstek,
- $T^{0i} = \rho u^0 u^i = \gamma_u^2 \rho c u^i$ - strumień energii ($\times c^{-1}$) w kierunku i -tym,
- $T^{i0} = T^{0i}$ - gęstość pędu ($\times c$) w kierunku i -tym,
- $T^{ij} = \rho u^i u^j = \gamma_u^2 \rho u^i u^j$ - tempo przepływu i -tej składowej pędu na jednostkę powierzchni w kierunku j -tym.

Przykład: Tensor energii-pędu dla idealnego płynu (brak sił pomiędzy cząstkami, brak przewodnictwa ciepła, brak lepkości) ma postać (p tutaj oznacza izotropowe ciśnienie):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

- Równania pola Einsteina w 4D to układ 10 nieliniowych równań różniczkowych, których rozwiązaniem jest metryka $g^{\mu\nu}$. W ogólnym przypadku równań pola Einsteina nie da się rozwiązać metodami analitycznymi.
- Pierwsze dokładne rozwiązanie r. E. zostało znalezione przez K. Schwarzschilda (1873-1916) w 1916 roku (miesiąc po opublikowaniu OTW).
- Rozwiązanie Schwarzschilda określa geometrię statycznej czasoprzestrzeni (metryka nie zależy od czasu, a element długości ds^2 jest niezmienniczy ze względu na transformację $t \rightarrow -t$) na zewnątrz sferycznie symetrycznego rozkładu materii.
- Metryka Schwarzschilda:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

t - 'odległy czas' - czas mierzony na zegarze obserwatora znajdującego się daleko od centrum przyciągania grawitacyjnego.

r = (obwód sfery współśrodkowej z masą M)/ 2π - 'zredukowany obwód'

θ, ϕ - kąty polarny i azymutalny mierzone na sferze współśrodkowej z masą M .

Lagranżjan i działanie dla cząstki relatywistycznej

- Relatywistyczny lagranżjan dla cząstki swobodnej: $L = -mc\sqrt{1 - \beta^2} - V(\vec{r})$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\gamma m \dot{\vec{r}}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V(\vec{r})$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -mc^2 \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}{c^2}} = \gamma m v_i$$

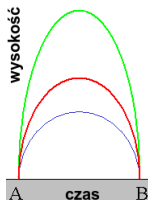
$$\begin{aligned} H &= v_i p_i - L = \frac{p_i p_i}{\gamma m} + \frac{mc^2}{\gamma} + V = \\ &= \frac{1}{\gamma mc^2} (p^2 c^2 + m^2 c^4) + V = \frac{E^2}{\gamma mc^2} + V = E + V = T + mc^2 + V \end{aligned}$$

- Zasada najmniejszego działania ($c d\tau = ds$):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{-mc^2}{\gamma} \right) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} -mc^2 d\tau = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{ds^2}$$

- Trajektoria cząstki swobodnej w czasoprzestrzeni jest taka, aby upływ jej czasu własnego był maksymalny.

- Przykład: rzut pionowy $y = v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2$



Lagranżjan i linie geodezyjne w geometrii Minkowskiego

- Dla ogólnej metryki $g_{\mu\nu}(x)$ i parametryzacji w postaci czasu własnego mamy:

$$L = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} = -mc^2 \quad \text{oraz} \quad -\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

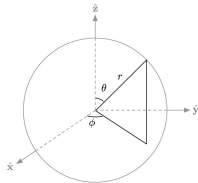
- Prowadzi to do następującego równania dla linii geodezyjnej:

$$g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\nu + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^\beta\dot{x}^\nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}^\nu + \Gamma^\nu_{\beta\alpha}\dot{x}^\beta\dot{x}^\alpha = 0$$

- **Przykład: Linie geodezyjne na sferze:**

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$$\vec{e}'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial (x')^\beta} \vec{e}_\alpha \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \vec{e}_\theta = r(\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) \\ \vec{e}_\phi = r \sin \theta(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \end{cases}$$



$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \xrightarrow{r=R} \begin{pmatrix} dt \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -R^2 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Lagranżjan i linie geodezyjne na sferze

Używając do parametryzacji czasu własnego mamy ($x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \phi$):

$$\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)} = \sqrt{c^2\dot{t}(\tau)^2 - R^2\dot{\theta}(\tau)^2 - R^2\sin^2\theta(\tau)\dot{\phi}(\tau)^2} = c$$

Ponieważ jedyną niezerową pochodną metryki jest $\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -2R^2 \sin\theta \cos\theta$,
więc równania linii geodezyjnej przyjmują postać:

$$c\ddot{t}(\tau) = 0$$

$$R^2\ddot{\theta}(\tau) + \sin\theta(\tau)\cos\theta(\tau)R^2\dot{\phi}(\tau)^2 = 0$$

$$R^2\sin^2\theta(\tau)\ddot{\phi}(\tau) - 2\sin\theta(\tau)\cos\theta(\tau)R^2\dot{\theta}(\tau)\dot{\phi}(\tau) = 0$$

Chcemy znaleźć linię geodezyjną łączącą biegun północny i południowy:

$$\theta(\tau_0 = 0) = 0 \quad \theta(\tau_f) = \pi \quad \text{oraz} \quad t(0) = 0 \quad t(\tau_f) = T$$

Rozwiązaniem trzeciego równania jest $\dot{\phi}(\tau) = 0 \Rightarrow \phi(\tau) = \phi_0 = \text{const}$

Pozostałe dwa równania upraszczają się do postaci:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}(\tau) = 0 &\Rightarrow \theta(\tau) = A\tau + B \Rightarrow \theta(\tau) = \pi\tau/t_f \\ \ddot{t}(\tau) = 0 &\Rightarrow t(\tau) = C\tau + D \Rightarrow t(\tau) = T\tau/t_f \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \sqrt{\tau_f^2 + \frac{\pi^2 R^2}{c^2}}$$

Linie geodezyjne to łuki kół wielkich łączące oba bieguny (lub inne punkty).

- Zapisujemy Lagranżjan dla metryki Schwarzschilda ($c = 1$, masa w [m]):

$$L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right)$$

oraz korzystając z równań E-L otrzymujemy równanie linii geodezyjnej:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = \text{const} \equiv k$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{Mc^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 - r \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{const} \equiv h$$

Ograniczamy rozważania do płaszczyzny równikowej ($\theta = \frac{\pi}{2}$, $d\theta = 0$).

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = \text{const} \equiv k$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{Mc^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0$$

$$r^2 \dot{\phi} = \text{const} \equiv h$$

Interpretacja fizyczna stałych k oraz h :

- Ponieważ L nie zależy jawnie od t oraz ϕ , więc składowe p_0 oraz p_3 4-wektora pędu, $p_\mu = m_0 \dot{x}_\mu$, są zachowane:

$$\left\{ E = p_\mu u^\mu, \quad u^\mu = (c, 0, 0, 0) \Rightarrow E = p_0 \right\}$$

$$p_0 = m_0 g_{00} \dot{t} = m_0 c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = m_0 c^2 k \Rightarrow k = \frac{E}{m_0 c^2}$$

$$p_3 = m_0 g_{33} \dot{\phi} = -m_0 r^2 \dot{\phi} = -m_0 h \Rightarrow h = \frac{L}{m_0}$$

Własności metryki Schwarzschilda (MS):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2$$

- Osobliwość w $r = 0$ - to jest rzeczywista osobliwość, której nie można usunąć poprzez transformację współrzędnych.
- Horyzont zdarzeń (promień Schwarzschilda) - pozorna osobliwość w $r = 2M$.
- $(1 - 2M/r)$ - krzywizna (w przypadku nie obracającego się obiektu sferycznie symetrycznego zależy jedynie od r , a nie zależy od ϕ)
- dla $r \rightarrow \infty$ lub $M \rightarrow 0$ krzywizna $(1 - 2M/r) \rightarrow 1$ (płaska czasoprzestrzeń)

- Przykład: W jakiej odległości od masy M czasoprzestrzeń staje się płaska?

Słońce: $M_{\odot} = 1500 \text{ m}$, $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$, $d = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

$$1 - \frac{2M_{\odot}}{r} = 1 - 10^{-6} \Rightarrow r = \frac{2M_{\odot}}{10^{-6}} = 3 \cdot 10^9 \text{ m} \approx 4R_{\odot}$$

$$1 - \frac{2M_{\odot}}{r} = 1 - 10^{-8} \Rightarrow r = \frac{2M_{\odot}}{10^{-8}} = 3 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 2d$$

Uwzględnienie krzywizny czasoprzestrzeni konieczne jest przy opisie orbit planet.

Czarna dziura: $M = 10^6 M_{\odot}$, $1 \text{ ly} = 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}$

$$1 - \frac{2M}{r} = 1 - 10^{-6} \Rightarrow r = \frac{2M}{10^{-6}} \approx 0.32 \text{ ly}$$

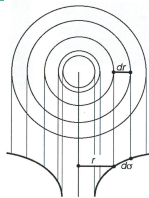
- MS stosuje się do obszaru na zewnątrz masywnego obiektu (Ziemia, Słońce, ...).
- Czarna dziura nie ma powierzchni – MS opisuje całą przestrzeń, aż do $r = 0$.
- Osobliwość dla $r = 0$ jest 'rzeczywista', tzn. wszystko co dociera do centrum czarnej dziury jest zgniecione do zerowej objętości (punktu).
- Natura osobliwości nie jest znana – mechanika kwantowa nie dopuszcza istnienia czegokolwiek w punkcie, ale nie istnieje jeszcze kwantowa teoria grawitacji.
- W osobliwości załamują się wszystkie prawa fizyki – na szczęście wszystkie 'rzeczywiste' osobliwości wydają się być 'ubrane' (kosmiczny cenzor) – tzn. istnieje powierzchnia $r = 2M$ którą można przekroczyć tylko w jedną stronę...

Rozciągnięcie radialne przestrzeni i przesunięcie ku czerwieni

• dla $r > 2M$ mamy:

- odległość pomiędzy współśrodkowymi sferami w kierunku radialnym jest większa niż odległość wynikająca z pomiaru współrzędnej r :

$$d\sigma \equiv dr_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr$$



- grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni: $d\tau \equiv dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$

Przykład: Znajdź odległość pomiędzy współśrodkowymi sferami o współrzędnych $r_1 = 4 \text{ km}$ i $r_2 = 5 \text{ km}$, dla czarnej dziury o masie Słońca ($M = 1.477 \text{ km}$).

$$\Delta r_{\text{shell}} = \int_{r_1}^{r_2} dr_{\text{shell}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{r - 2M}} = \left\{ r = z^2 \right\} = 1.723 \text{ km}$$

Przykład: Jak zmienia się okres fali światła wysłanego ze sfery o promieniu $r_1 = 4M$ i absorbowanego na sferze o promieniu $r_2 = 8M$?

$$\frac{dt_{\text{shell}, 1}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}} = dt = \frac{dt_{\text{shell}, 2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}} \Rightarrow \frac{dt_{\text{shell}, 2}}{dt_{\text{shell}, 1}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}} = \frac{0.866}{0.707} = 1.22$$

Odpowiada to przesunięciu światła żółtego do głęboko czerwonego krańca widma.

Czarna dziura w mechanice Newtona

Obiekt o masie m_{kg} , znajdujący się początkowo w dużej odległości od czarnej dziury o masie M_{kg} , i będący względem niej w spoczynku, jest przez nią przyciągany grawitacyjnie. Zgodnie z teorią Newtona mamy:

$$0 = E = \frac{1}{2}m_{kg}v^2 - G\frac{M_{kg}m_{kg}}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM_{kg}}{r}}$$
$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2GM_{kg}}{c^2r}} = \sqrt{\frac{2M}{r}}$$

Wynik ten jest słuszny także w OTW, ale dla obserwatora znajdującego się na sferze współśrodkowej z masą M .

Minimalny promień sfery z której wysłany obiekt może się oddalić w nieskończoność:

$$r_{\text{horyzont}} = 2M$$

Wynik ten słuszny jest także w OTW gdy r jest 'zredukowanym obwodem'.

Interpretacja fizyczna różna w teorii Newtona i Einsteina!

OTW - światło wysłane radialnie na zewnątrz z horyzontu zdarzeń nigdy nie opuści horyzontu.

Trzy układy współrzędnych

Układ poruszający się (spadający) swobodnie:

- najprostszy opis zdarzeń (można stosować STW),
- lokalność układu - siły pływowe,
- jedyny układ w okolicach czarnej dziury, w którym może przetrwać człowiek.

Układ powłoki sferycznej (wokół centrum przyciągania grawitacyjnego):

- np. powierzchnia Ziemi - brak możliwości naturalnego ruchu - odczuwamy siłę grawitacji,
- lokalnie stosujemy STW z metryką:

$$(d\tau)^2 = (dt_{\text{shell}})^2 - (dr_{\text{shell}})^2 - (r d\phi)^2$$

- taki układ może istnieć tylko na zewnątrz horyzontu zdarzeń.

Współrzędne Schwarzschilda opisują całą czasoprzestrzeń wokół czarnej dziury:

- obserwatorzy na sferach przekazują informacje o współrzędnych,
- żaden obserwator nie znajduje się w układzie Schwarzschilda.