

Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 10

Funkcje falowe hadronów w modelu kwarków

W rzeczywistym świecie obserwujemy jedynie “bezbarwne” stany związane kwarków - **hadrony** (mezony $q\bar{q}$, spin-0, 1, ..., oraz bariony qqq , spin- $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ...).

Konstruując funkcje falowe hadronów wszystkie kwarki traktujemy jako identyczne fermiony, które mogą znajdować się w stanach oznaczanych przez współrzędne przestrzenne (space), spin, zapach (flavour), kolor (colour):

$$\psi = \psi_{\text{space}} \cdot \psi_{\text{flavour}} \cdot \psi_{\text{spin}} \cdot \psi_{\text{colour}}$$

Wszystkie hadrony są tzw. **singletami kolorowymi**, tzn. ich wypadkowy kolor jest równy zero:

$$\psi_{\text{colour}}^{q\bar{q}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$

$$\psi_{\text{colour}}^{qqq} = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb + gbr + brg - grb + rbg - bgr)$$

Parzystością nazywamy stany własne operatora parzystości \hat{P} , który zmienia współrzędne przestrzenne na przeciwne, nie zmieniając współrzędnej czasowej:

$$\hat{P}\psi(\vec{r}, t) = \psi(-\vec{r}, t), \quad \hat{P}\psi = P\psi, \quad P = \pm 1$$

Jeśli hamiltonian oddziaływania komutuje z operatorem parzystości $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$, wtedy parzystość jest zachowana w danym oddziaływaniu.

Parzystość jest zachowana w oddziaływaniach silnych i elektromagnetycznych, ale nie jest zachowana w oddziaływaniach słabych.

Cząstki mogą być **stanami własnymi** operatora parzystości. Mówimy wtedy, że P reprezentuje **wewnętrzną parzystość** cząstki/antycząstki.

QFT wymaga, aby fermiony/antyfermiony miały przeciwne parzystości, natomiast bozony/antybozony taką samą parzystość.

Wybieramy: $P = +1$ dla kwarków i leptonów oraz $P = -1$ dla ich antycząstek.

Bozony cechowania (γ, g, W, Z) są cząstkami wektorowymi o parzystości ujemnej ($J^P = 1^-$), gdzie J jest całkowitym momentem pędu.

Działanie operatora parzystości \hat{P} na:

$$\text{pęd } (\vec{p} \rightarrow -\vec{p}), \quad \text{moment pędu } (\vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \vec{r} \times \vec{p}), \quad \text{spin } (\vec{s} \rightarrow \vec{s})$$

Parzystość układu dwóch cząstek o wewnętrznych parzystościach P_1 i P_2 oraz orbitalnym momencie pędu L może być określona jedynie w układzie CMS:

$$|p, l, m\rangle = \sum_{\theta, \phi} |p, \theta, \phi\rangle \langle p, \theta, \phi | p, l, m\rangle = \sum_{\theta, \phi} Y_l^{*m}(\theta, \phi) |\vec{p}, -\vec{p}\rangle$$

Odwroćenie osi we współrzędnych sferycznych: $r \rightarrow r, \theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi + \phi$:

$$Y_l^{*m}(\theta, \phi) \Rightarrow Y_l^{*m}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^{*m}(\theta, \phi)$$

$$\hat{P}|p, l, m\rangle = P_1 P_2 (-1)^l \sum_{\theta, \phi} Y_l^{*m}(\theta, \phi) |\vec{p}, -\vec{p}\rangle = P_1 P_2 (-1)^l |p, l, m\rangle$$

czyli $P = P_1 P_2 (-1)^L$.

Spin w mechanice kwantowej

W mechanice kwantowej definiujemy operatory podnoszenia/opuszczania (ladder operators) $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$:

$$\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle$$

które pozwalają na wygenerowanie wszystkich stanów $|j, m\rangle$ ze stanu $|j, j\rangle$.

Przykład: $|1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \uparrow\uparrow$

Ponieważ operatory $\hat{J}_{x,y}$ wyrażają się przez pochodne (np. $\hat{J}_x = \hat{Y}\hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_y$, gdzie $\hat{P}_y = -i\hbar(\partial/\partial y)$, $\hat{P}_z = -i\hbar(\partial/\partial z)$), więc możemy zastosować regułę różniczkowania iloczynu ($d(uv) = u dv + v du$):

$$\begin{aligned}\hat{J}_-|1, 1\rangle &= (\hat{J}_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle)|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle(\hat{J}_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) \\ \sqrt{2}|1, 0\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \quad \Rightarrow \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\end{aligned}$$

Podobnie, działając operatorem \hat{J}_- na stan $|1, 0\rangle$ otrzymujemy stan $|1, -1\rangle$. Dla układu dwóch cząstek o spinie 1/2 mamy więc trzy stany symetryczne ze względu na zamianę cząstek $1 \leftrightarrow 2$:

$$|1, 1\rangle = \uparrow\uparrow, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \quad |1, -1\rangle = \downarrow\downarrow$$

Czwarty stan, ortogonalny do pozostałych, ma postać: $|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$

- ▶ Symetrie odgrywają zasadniczą rolę w fizyce cząstek - jednym z celów fizyki cząstek jest odkrywanie podstawowych symetrii istniejących we Wszechświecie.
- ▶ Załóżmy, że fizyka jest niezmiennicza względem transformacji (np. obrotu układu współrzędnych):

$$\psi \rightarrow \psi' = \hat{U}\psi$$

- ▶ Aby była zachowana normalizacja prawdopodobieństwa musi zachodzić:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \hat{U}\psi | \hat{U}\psi \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi \rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$$

- ▶ Aby przewidywania fizyczne były niezmiennicze względem transformacji symetrii, również wszystkie elementy macierzowe nie mogą ulec zmianie:

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{H} | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} | \psi \rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \hat{H} \quad \Rightarrow \quad [\hat{H}, \hat{U}] = 0$$

- ▶ Rozważmy infinitezymalną transformację (\hat{G} nazywamy generatorem trans.):

$$\hat{U} = 1 + i\varepsilon \hat{G} \quad \Rightarrow \quad \hat{U} \hat{U}^\dagger = 1 + i\varepsilon(\hat{G} - \hat{G}^\dagger) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \Rightarrow \quad \hat{G} = \hat{G}^\dagger$$

Operator \hat{G} jest hermitowski, więc odpowiada wielkości mierzalnej G .

Symetrie i prawa zachowania

$$\blacktriangleright [\hat{H}, \hat{U}] = 0 \Rightarrow [\hat{H}, 1 + i\varepsilon\hat{G}] = 0 \Rightarrow [\hat{H}, \hat{G}] = 0$$

W mechanice kwantowej ewolucja czasowa wartości oczekiwanej operatora \hat{G} dana jest przez:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{G}\rangle = i\langle[\hat{H}, \hat{G}]\rangle = 0 \Rightarrow G \text{ jest wielkością zachowaną}$$

► Każdej symetrii w przyrodzie odpowiada wielkość która jest zachowana.

► Przykład: Oczekujemy, że fizyka nie zależy od położenia: $x \rightarrow x + \varepsilon$

$$\psi'(x) = \psi(x + \varepsilon) = \psi(x) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \approx \left(1 + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = (1 + i\varepsilon\hat{p}_x)\psi(x)$$

Generatorem tej transformacji symetrii jest $\hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow$ zachowane p_x .

► Operacja symetrii może zależeć od więcej niż jednego parametru:

$$\hat{U} = 1 + i\vec{\varepsilon} \cdot \hat{\vec{G}}$$

► Przykład: przesunięcie w przestrzeni 3D:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{\varepsilon} \Rightarrow \hat{U} = 1 + i\vec{\varepsilon} \cdot \hat{\vec{p}}, \quad \text{gdzie } \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

Symetria w fizyce cząstek: izospin

- Transformację skończoną można zapisać jako szereg kolejnych transformacji infinitymalnych:

$$\hat{U}(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\vec{\alpha}}{n} \cdot \vec{G} \right)^n = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{G}}$$

- Przykład: skończone przesunięcie w 1D: $x \rightarrow x + x_0$, $\hat{U}(x_0) = e^{ix_0 \hat{p}_x}$:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \hat{U}\psi(x) = \exp\left(x_0 \frac{d}{dx}\right)\psi(x) = \left(1 + x_0 \frac{d}{dx} + \frac{x_0^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots\right)\psi(x) = \\ &= \psi(x) + x_0 \frac{d\psi}{dx} + \frac{x_0^2}{2!} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \dots = \psi(x + x_0) \end{aligned}$$

- Proton i neutron mają podobne masy, a oddziaływania silne nie zależą od ładunku elektrycznego, tzn. $V_{pp} \approx V_{np} \approx V_{nn}$.

Propozycja: proton i neutron można traktować jako dwa stany tego samego obiektu - nukleonu:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przez analogie do dwóch stanów spinowych, powyższa symetria nosi nazwę **izospinu** - oczekujemy, że fizyka nie zależy od obrotów w przestrzeni izospinu.

Neutron i proton tworzą dublet izospinowy o całkowitym izospinie $I = \frac{1}{2}$ oraz trzeciej składowej $I_3 = \pm \frac{1}{2}$

Symetria zapachowa oddziaływań silnych

- ▶ Oddziaływania silne nie rozróżniają zapachów kwarków. Ze względu na to, że $m_u \approx m_d$, oczekujemy, że zamiana wszystkich kwarków u na kwarki d i na odwrót z punktu widzenia oddziaływań silnych nic nie zmienia.
- ▶ Niezmienniczość oddziaływań silnych ze względu na zamianę $u \leftrightarrow d$ można interpretować jako niezmienniczość względem obrotów w przestrzeni izospinu:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{gdzie} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Unitarna macierz \hat{U} o wymiarze 2×2 zależy od $8 - 4 = 4$ rzeczywistych parametrów, a więc baza w przestrzeni macierzy \hat{U} składa się z czterech niezależnych macierzy.

W języku teorii grup te cztery macierze tworzą grupę $U(2)$.

Jedna z macierzy odpowiada mnożeniu przez czynnik fazowy: $\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\phi}$

Pozostałe trzy macierze tworzą grupę $SU(2)$ z warunkiem $\det U = 1$.

$$\hat{U} = 1 + i\varepsilon\hat{G} \quad \det \hat{U} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Tr} \hat{G} = 0$$

Naturalnym wyborem macierzy \hat{G} są macierze Pauliego:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Definiujemy izospin (przez analogię do spinu): $\hat{T} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\hat{U} = e^{i\vec{\alpha} \cdot \hat{T}}$

$$\hat{U} = 1 + \frac{1}{2}i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}i\varepsilon_3 & \frac{1}{2}i(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) \\ \frac{1}{2}i(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) & 1 - \frac{1}{2}i\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Powyższa macierz jest unitarna i posiada jednostkowy wyznacznik:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = I + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \det \hat{U} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

- Izospin posiada te same własności co spin (ale te wielkości nie mają ze sobą nic wspólnego):

$$[T_1, T_2] = iT_3 \quad [T_2, T_3] = iT_1 \quad [T_3, T_1] = iT_2 \quad [T^2, T_3] = 0 \quad T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$$

- Stany własne izospinu $|I, I_3\rangle$, przez analogię do momentu pędu, spełniają relacje:

$$T^2|I, I_3\rangle = I(I+1)|I, I_3\rangle \quad T_3|I, I_3\rangle = I_3|I, I_3\rangle$$

Własności izospinu

- Stany izospinowe kwarków: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

W ogólności $I_3 = \frac{1}{2}(N_u - N_d)$

- Definiujemy operatory podnoszenia i opuszczania:

$$T_+ \equiv T_1 + iT_2 \quad T_+|I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3+1)}|I, I_3+1\rangle \quad d \rightarrow u$$

$$T_- \equiv T_1 - iT_2 \quad T_-|I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3-1)}|I, I_3-1\rangle \quad u \rightarrow d$$

Własności: $T_+|I, I\rangle = 0$, $T_-|I, -I\rangle = 0$

Czyli: $T_+u = 0$, $T_+d = u$, $T_-u = d$, $T_-d = 0$

- Składanie izospinów - pełna analogia do składania spinu (momentu pędu):

$$|I^{(1)}, I_3^{(1)}\rangle |I^{(2)}, I_3^{(2)}\rangle \rightarrow |I, I_3\rangle$$

• $I_3 = I_3^{(1)} + I_3^{(2)}$

• I przybiera wartości całkowite z zakresu od $|I^{(1)} - I^{(2)}|$ do $|I^{(1)} + I^{(2)}|$

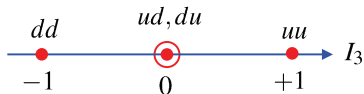
- Symetria ze względu na obroty w przestrzeni izospinu oznacza, że wielkości I_3 oraz I są zachowane w oddziaływaniach silnych.

Konstrukcja stanów izospinowych z kwarków

- Konstrukcja funkcji falowej protonu: do układu dwóch kwarków, dodajemy trzeci, tak aby pełna funkcja była antysymetryczna.

$$uu \equiv \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle$$

$$dd \equiv \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |1, -1\rangle$$



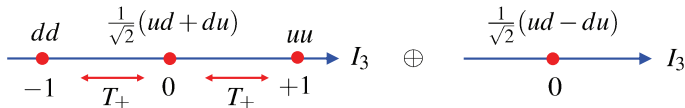
Aby otrzymać stan $|1, 0\rangle$ działamy operatorem opuszczania:

$$T_- |1, +1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle = T_-(uu) = ud + du \quad \Rightarrow \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)$$

Stan $|0, 0\rangle$ znajdujemy z warunku ortogonalności do stanu $|1, 0\rangle$:

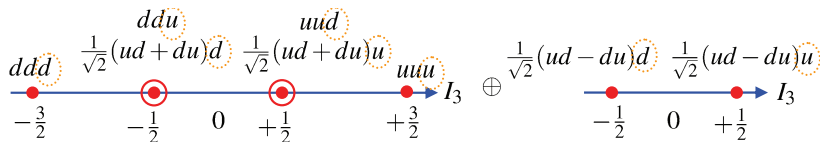
$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)$$

- Z czterech możliwych kombinacji dubletów izospinowych otrzymujemy tryplet o izospinie $I = 1$ oraz singlet $I = 0$: $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$



Konstrukcja stanów izospinowych z kwarków

- ▶ Wewnątrz multipletów poruszamy się za pomocą operatorów T_{\pm}
- ▶ Zgodnie z oczekiwaniem $I_3 = \frac{1}{2}(N_u - N_d)$
- ▶ Stany o różnym całkowitym izospinie są fizycznie różne: singlet jest antysymetryczny, a triplet symetryczny ze względu na zamianę kwarków $1 \leftrightarrow 2$
- ▶ Do każdego z powyższych stanów dodajemy trzeci kwark (u lub d)



- ▶ Korzystając z operatorów drabinowych i ortogonalności grupujemy osiem stanów w multiplety izospinowe, np. multiplet $I = \frac{3}{2}$ otrzymujemy startując od stanu $ddd \equiv |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$

$$T_+|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = T_+(ddd) = (T_+d)dd + d(T_+d)d + dd(T_+d)$$

$$\sqrt{3}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = udd + dud + ddu \quad \Rightarrow \quad |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$$

$$T_+|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}T_+(udd + dud + ddu) \quad \Rightarrow \quad |\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$$

$$T_+|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}T_+(uud + udu + duu) \quad \Rightarrow \quad |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle = uuu$$

Funkcja falowa protonu

- ▶ Pozostałe dwa stany $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ znajdujemy z relacji ortogonalności.
- ▶ Podsumowując: osiem stanów: $uuu, uud, udd, duu, dud, ddu, ddd$ zostało pogrupowanych w kwadruplet izospinowy i dwa dublety izospinowe o różnych własnościach symetrii:

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \otimes (3 \oplus 1) = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = 4 \oplus 2 \oplus 2$$

$$\left. \begin{aligned} |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle &= uuu \\ |\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu) \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd) \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= ddd \end{aligned} \right\} \text{ Kwadruplet stanów, które są} \\ \text{symetryczne ze względu na zamianę} \\ \text{dowolnych dwóch kwarków}$$
$$\left. \begin{aligned} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu - udd - dud) \\ |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu) \end{aligned} \right\} \text{ Symetria mieszana} \\ \text{symetryczne ze względu na } 1 \leftrightarrow 2$$
$$\left. \begin{aligned} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud) \\ |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu) \end{aligned} \right\} \text{ Symetria mieszana} \\ \text{antysymetryczne ze względu na } 1 \leftrightarrow 2$$

- ▶ Stany o symetrii mieszanej nie mają określonej symetrii ze względu na zamianę kwarków $1 \leftrightarrow 3$.

Kombinacje spinów

- ▶ Stosując dokładnie tą samą algebrę otrzymujemy możliwe spinowe funkcje falowe dla kombinacji trzech cząstek o spinie połówkowym:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle &= \uparrow\uparrow\uparrow \\ \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow) \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= \downarrow\downarrow\downarrow \end{aligned} \right\}$$

Kwadruplet stanów, które są symetryczne ze względu na zamianę dowolnych dwóch kwarków

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{aligned} \right\}$$

Symetria mieszana
symetryczne ze względu na $1 \leftrightarrow 2$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{aligned} \right\}$$

Symetria mieszana
antysymetryczne ze względu na $1 \leftrightarrow 2$

- ▶ Kwarki są fermionami – całkowita funkcja falowa musi być antysymetryczna.
- ▶ Całkowita funkcja falowa układu trzech kwarków ma postać:

$$\psi = \phi_{\text{flavour}} \chi_{\text{spin}} \xi_{\text{color}} \eta_{\text{space}}$$

- ▶ Kolorowa funkcja falowa układu związanego qqq jest antysymetryczna.
- ▶ Rozważamy jedynie stan podstawowy barionów bez orbitalnego momentu pędu, tzn. $L = 0$.

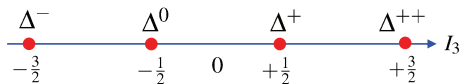
Barionowe funkcje falowe

► Dla $L = 0$ przestrzenna funkcja falowa jest symetryczna $(-1)^L$, tzn. że

$$\xi_{\text{color}} \eta_{\text{space}} - \text{antysymetryczna} \quad \Rightarrow \quad \phi_{\text{flavour}} \chi_{\text{spin}} - \text{symetryczna}$$

► Możliwe konstrukcje całkowicie symetrycznej spinowo-izospinowej f. falowej:

① złożenie całkowicie symetrycznych spinowej i izospinowej funkcji falowej



Spin 3/2
Izospin 3/2

② Kombinacja stanów mieszanych

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(M_S)\chi(M_S) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(M_A)\chi(M_A)$$

Spin 1/2
Izospin 1/2

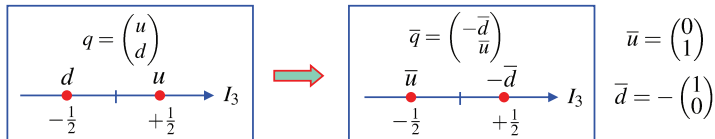
jest całkowicie symetryczna.

Funkcja falowa protonu o spinie ‘do góry’:

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{1}{6\sqrt{2}}(2uud - udu - duu)(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(udu - duu)(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}}(2u\uparrow u\uparrow d\downarrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow \\ &\quad + 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow \\ &\quad + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - d\downarrow u\uparrow u\uparrow) \end{aligned}$$

Antykwarki i mezony (u i d)

- Kwarki u , d oraz antykwarki \bar{u} , \bar{d} tworzą dublety izospinowe:



Uporządkowanie antykwarków w dublecie i znak "–" są niezbędne, aby wnioski fizyczne były niezmiennicze ze względu na zamianę $u \leftrightarrow d$, $\bar{u} \leftrightarrow \bar{d}$.

Dublet kwarkowy transformuje się jak:

$$q' = Uq \Rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u'^* \\ d'^* \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} u^* \\ d^* \end{pmatrix}$$

lub zapisując za pomocą dubletu antykwarkowego

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{q}' = U^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{q} \Rightarrow \bar{q}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{q}$$

Korzystając z ogólnej postaci macierzy U widać, że dublet antykwarkowy transformuje się tak samo jak dublet kwarkowy:

$$\bar{q}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{q} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -c_{12}^* & c_{11}^* \end{pmatrix} \bar{q} = U\bar{q}$$

Antykwarki i mezony (u i d)

- Działanie operatorów drabinkowych na stany izospinowe antykwarków:

$$T_+ \bar{u} = T_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\bar{d}$$

$$T_+ \bar{u} = -\bar{d} \quad T_+ \bar{d} = 0 \quad T_- \bar{u} = 0 \quad T_- \bar{d} = -\bar{u}$$

$$T_+ u = 0 \quad T_+ d = u \quad T_- u = d \quad T_- d = 0$$

- Konstrukcja stanów mezonowych z kombinacji (anty)kwarków u/d :



Układ $q\bar{q}$:

$$|1, +1\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \overline{|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle} = -u\bar{d}$$

$$|1, -1\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \overline{|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle} = d\bar{u}$$

Aby otrzymać stany z $I_3 = 0$ korzystamy z operatorów T_{\pm} i ortogonalności:

$$T_- |1, +1\rangle = T_- [-u\bar{d}]$$

$$\sqrt{2} |1, 0\rangle = -T_- [u]\bar{d} - uT_- [\bar{d}] = -d\bar{d} + u\bar{u}$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad \Rightarrow \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

Złożenie stanów izospinowych kwarku i antykwarku

$$\begin{array}{c} d \\ \bullet \\ -\frac{1}{2} \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ + \\ + \\ \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow I_3 \quad \otimes \quad \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bullet \\ -\frac{1}{2} \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ + \\ + \\ \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow I_3$$

proceedzi do powstania trypletu stanów o izospinie $I = 1$ i singletu z $I = 0$:

$$\begin{array}{c} d\bar{u} \\ \bullet \\ -1 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{T_+} \\ \xrightarrow{T_+} \\ \xrightarrow{T_+} \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \bullet \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{T_+} \\ \xrightarrow{T_+} \\ \xrightarrow{T_+} \end{array} \begin{array}{c} -u\bar{d} \\ \bullet \\ +1 \end{array} \rightarrow I_3 \quad \oplus \quad \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \bullet \\ 0 \end{array} \rightarrow I_3$$

Zapisujemy to: $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$

Aby przekonać się, że stan $|0,0\rangle$ jest singletem korzystamy z operatorów T_{\pm} :

$$T_+|0,0\rangle = T_+ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u\bar{d} + u\bar{d}) = 0$$

$$T_-|0,0\rangle = T_- \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} - d\bar{u}) = 0$$

Stan singletowy z punktu widzenia operatorów T_{\pm} jest 'ślepą uliczką'.

Symetria zapachowa SU(3)

► Masa kwarku dziwnego s jest niewiele większa od mas kwarków u i d , dlatego z punktu widzenia oddziaływań silnych (i ich układów związanych - hadronów) można przyjąć, że są one (w przybliżeniu) symetryczne ze względu na zamiany $u \leftrightarrow d \leftrightarrow s$.

Ta przybliżona symetria może być wyrażona za pomocą unitarnej macierzy \hat{U} :

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

Ponieważ macierz spełnia warunek $\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1$ więc mamy tylko $18 - 9 = 9$ niezależnych macierzy (tworzą one tzw. grupę U(3)).

Jedną z tych macierzy jest macierz jednostkowa mnożona przez zespoloną fazę. Pozostałe 8 macierzy spełnia warunek $\det \hat{U} = 1$ i tworzą grupę SU(3).

Są one generatorami grupy SU(3): $\vec{T} = \frac{1}{2} \vec{\lambda}$ $\hat{U} = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}}$

► W symetrii zapachowej SU(3) stany kwarkowe reprezentowane są przez:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Symetria zapachowa SU(3)

► Ponieważ symetria SU(3) *uds* zawiera symetrię SU(2) *ud* więc trzy macierze można zapisać w postaci:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trzecia składowa izospinu $T_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ zlicza różnicę liczby kwarków *u* i *d*:

$$T_3 u = +\frac{1}{2}u \quad T_3 d = -\frac{1}{2}d \quad T_3 s = 0$$

Operatory drabinkowe mają postać: $T_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$ $d \bullet \xleftarrow{T_{\pm}} \bullet \xrightarrow{T_{\pm}} \bullet u$

Przez analogię konstruujemy macierze generujące przejścia $u \leftrightarrow s$ i $d \leftrightarrow s$:

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda'_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda''_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Oprócz macierzy λ_3 mamy dwie dodatkowe macierze bezśladowe. Jednak te trzy macierze nie są liniowo niezależne.

Symetria zapachowa SU(3)

Definiujemy macierz λ_8 jako kombinację liniową:

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

która określa położenie na osi pionowej diagramu

$$(T_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8)$$

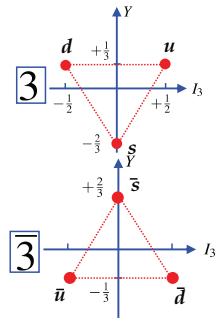
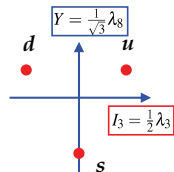
Macierze $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ noszą nazwę macierzy Gell-Mann'a.

► Działanie operatorów I_3 i Y na stany kwarkowe:

$$\begin{array}{lll} T_3 u = +\frac{1}{2}u & T_3 d = -\frac{1}{2}d & T_3 s = 0 \\ Y u = +\frac{1}{3}u & Y d = +\frac{1}{3}d & Y s = -\frac{2}{3}s \end{array}$$

i antykwarkowe:

$$\begin{array}{lll} T_3 \bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{u} & T_3 \bar{d} = +\frac{1}{2}\bar{d} & T_3 \bar{s} = 0 \\ Y \bar{u} = -\frac{1}{3}\bar{u} & Y \bar{d} = -\frac{1}{3}\bar{d} & Y \bar{s} = +\frac{2}{3}\bar{s} \end{array}$$



Operatory drabinkowe w SU(3)

Z pozostałych macierzy można utworzyć operatory drabinkowe, które umożliwiają przejścia pomiędzy stanami:

Jako przykład rozpatrzmy działanie operatora V_+ :

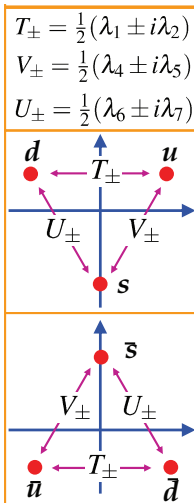
$$V_+ = \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{czyli } V_+s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +u$$

Działanie pozostałych operatorów drabinkowych:

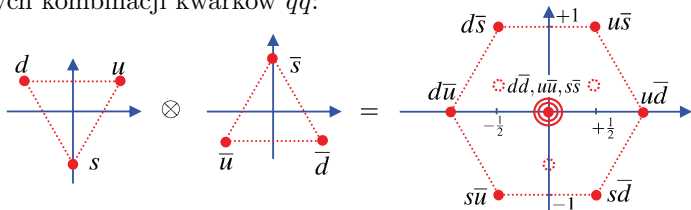
$$\begin{array}{llll} T_+d = u & T_-u = d & T_+\bar{u} = -\bar{d} & T_-\bar{d} = -\bar{u} \\ V_+s = u & V_-u = s & V_+\bar{u} = -\bar{s} & V_-\bar{s} = -\bar{u} \\ U_+s = d & U_-d = s & U_+\bar{d} = -\bar{s} & U_-\bar{s} = -\bar{d} \end{array}$$

Wszystkie pozostałe kombinacje dają w wyniku zero.



Lekkie mezony (zbudowane z uds)

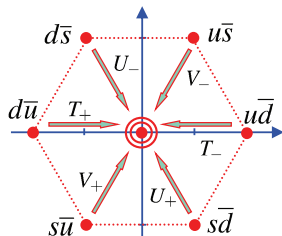
- Wykorzystamy operatory drabinkowe do konstrukcji stanów mezonowych z 9 możliwych kombinacji kwarków $q\bar{q}$:



Trzy stany centralne, $Y = 0$, $I_3 = 0$, otrzymujemy przechodząc od stanów zewnętrznych do środka:

$$\begin{aligned}
 T_+ |d\bar{u}\rangle &= |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle & T_- |u\bar{d}\rangle &= |d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle \\
 V_+ |s\bar{u}\rangle &= |u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle & V_- |u\bar{s}\rangle &= |s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle \\
 U_+ |s\bar{d}\rangle &= |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle & U_- |d\bar{s}\rangle &= |s\bar{s}\rangle - |d\bar{d}\rangle
 \end{aligned}$$

Ponieważ tylko dwa spośród tych stanów są liniowo niezależne, a mamy trzy stany z $Y = 0$, $I_3 = 0$, oznacza to, że jeden z tych stanów nie należy do tego samego multipletu i nie można go osiągnąć za pomocą operatorów drabinkowych.



Najpierw należy utworzyć dwa niezależne ortogonalne stany spośród:

$$|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \quad |u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle \quad |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle$$

Ponieważ symetria jest tylko przybliżona ($m_s > m_{u,d}$), dlatego wybór nie jest dowolny. Ponieważ obserwujemy eksperymentalnie trzy lekkie mezony π^+ , π^- oraz π^0 ($m \approx 140$ MeV), więc identyfikujemy stan π^0 jako:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

Drugi ze stanów konstruujemy z dwóch pozostałych, żądając aby był ortogonalny do stanu π^0 :

$$\psi_2 = \alpha(|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle) + \beta(|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

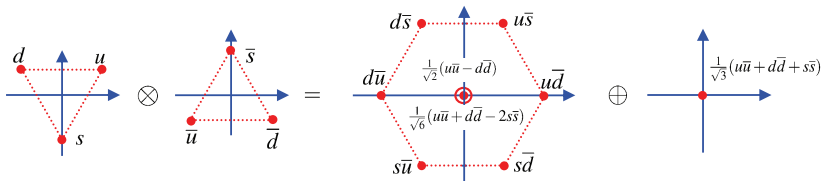
Ostatni stan, który nie należy do tego samego multipletu, konstruujemy, żądając aby był ortogonalny do stanów ψ_1 i ψ_2 :

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

- ψ_3 jest rzeczywiście stanem singletowym:

$$T_+ \psi_3 = T_- \psi_3 = U_+ \psi_3 = U_- \psi_3 = V_+ \psi_3 = V_- \psi_3 = 0$$

Kombinacja kwark-antykwarok daje 9 stanów grupujących się w oktet i singlet:



co w teorii grup zapisujemy: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$

- Porównajmy ten wynik z kombinacją dwóch cząstek o spinie połówkowym:

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1:$$

Tryplet: spin 1 : $|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, +1\rangle$

Singlet: spin 0 : $|0, 0\rangle$

Pomiędzy stanami trypletowymi można poruszać się za pomocą operatorów drabinkowych, podobnie jak po oktecie mezonowym.

Stan singletowy nie niesie momentu pędu - przez analogię mówimy że mezonowy stan singletowy jest "bezzapachowy".

Mezony pseudoskalarne i wektorowe

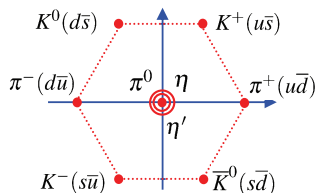
► Mezony pseudoskalarne ($L = 0, S = 0, J = 0, P = -1$)

Ponieważ symetria zapachowa SU(3) jest tylko przybliżona, dlatego fizyczne stany o $Y = 0, I_3 = 0$ mogą być mieszaninami stanów oktetowych oraz singletowych. Doświadczenie pokazuje, że:

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\eta \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

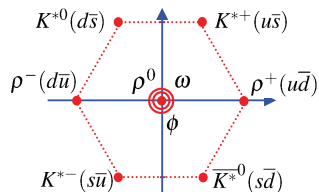
$$\eta' \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$



► Mezony wektorowe ($L = 0, S = 1, J = 1, P = -1$)

W przypadku mezonów wektorowych stany fizyczne są w przybliżeniu "idealną mieszaniną":

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad \omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad \phi \approx s\bar{s}$$



$$\pi^\pm : 140 \text{ MeV}$$

$$\pi^0 : 135 \text{ MeV}$$

$$\rho^\pm : 775 \text{ MeV}$$

$$\rho^0 : 775 \text{ MeV}$$

$$K^\pm : 494 \text{ MeV}$$

$$K^0/\bar{K}^0 : 498 \text{ MeV}$$

$$K^{*\pm} : 892 \text{ MeV}$$

$$K^{*0}/\bar{K}^{*0} : 896 \text{ MeV}$$

$$\eta : 549 \text{ MeV}$$

$$\eta' : 958 \text{ MeV}$$

$$\omega : 783 \text{ MeV}$$

$$\phi : 1020 \text{ MeV}$$

Funkcje falowe mezonów

Funkcje falowe stanów $u\bar{d}$, $u\bar{s}$, $d\bar{u}$, $d\bar{s}$, $s\bar{u}$, $s\bar{d}$ są jasno określone.

Stany posiadające wypadkowy zapach równy zero podlegają mieszanii:

Współczynniki mieszania określone są eksperymentalnie na podstawie mas cząstek i częstości ich rozpadów.

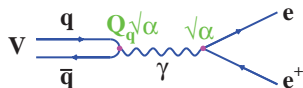
Przykład: Leptonowy rozpad mezonów wektorowych:

$$M_{fi}(\rho_0 \rightarrow e^+e^-) \sim \frac{e}{q^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Q_u e - Q_d e) \right]$$

$$\Gamma_{\rho_0 \rightarrow e^+e^-} \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma_{\omega_0 \rightarrow e^+e^-} \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \right) \right]^2 = \frac{1}{18}$$

$$\Gamma_{\phi \rightarrow e^+e^-} \propto \left[\frac{1}{3} \right]^2 = \frac{1}{9}$$



Przewidywanie:

$$\Gamma_{\rho_0} : \Gamma_{\omega_0} : \Gamma_{\phi} = 9 : 1 : 2$$

Eksperyment:

$$8.8 \pm 2.6 : 1 : 1.7 \pm 0.4$$

Masy mezonów częściowo wynikają z mas “konstytuentnych” kwarków:

$$m_s > m_u, m_d \Rightarrow m(K) > m(\pi)$$

Jednak $m(\rho^+) = 775 \text{ MeV} > m(\pi^+) = 140 \text{ MeV}$ gdzie obie cząstki to stany $u\bar{d}$, a jedyną różnicą jest orientacja spinów.

Masy mezonów - oddziaływanie spin-spin

QED: Energia potencjalna związana z oddziaływaniem dwóch spinów:

$$U \propto \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 = \left\| \vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{S} \right\| \propto \alpha_{em} \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2}$$

QCD: “Chromomagnetyczne” oddziaływanie spin-spin: $U \propto \alpha_s \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2}$

Formuła masowa dla mezonów ($L = 0$): $m(q_1 q_2) = m_1 + m_2 + \frac{A}{m_1 m_2} \langle S_1 \cdot S_2 \rangle$

$$\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 \rangle = \frac{1}{2} s(s+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{dla } J^P = 0^- \\ +\frac{1}{4} & \text{dla } J^P = 1^- \end{cases}$$

Mezony 1^- są cięższe od mezonów 0^- :

$$m_P = m_1 + m_2 - \frac{3A}{4m_1 m_2} \quad (J^P = 0^-)$$

$$m_V = m_1 + m_2 + \frac{A}{4m_1 m_2} \quad (J^P = 1^-)$$

Parametr A oraz masy kwarków

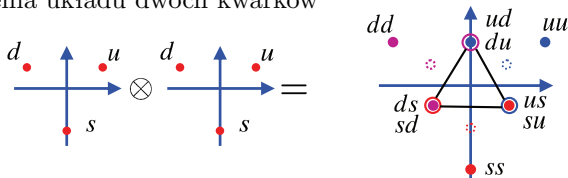
wyznaczamy przez dopasowanie do danych:

$$m_u = m_d = 307 \text{ MeV}, \quad m_s = 490 \text{ MeV}, \quad A = 0.06 \text{ GeV}^3$$

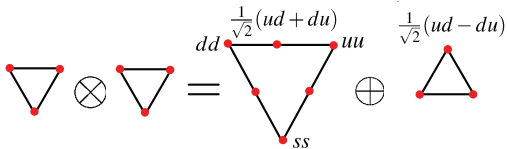
Mezon	Masa [MeV]	
	Teoria	Eksperyment
π	140	138
K	484	496
ρ	780	770
ω	780	782
K^*	896	894
ϕ	1032	1019

Kombinacje kwarków uds w stany barionowe

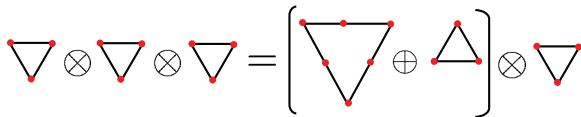
► Konstrukcja stanów barionowych jest bardzo żmudna. Dlatego ograniczymy się jedynie do otrzymania struktury multipletowej rozpoczynając od utworzenia układu dwóch kwarków



Otrzymujemy symetryczny sekstet i antysymetryczny triplet $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$:

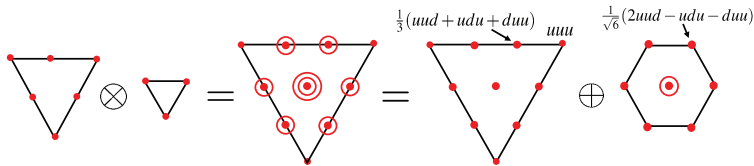


Następnie dodajemy trzeci kwark:



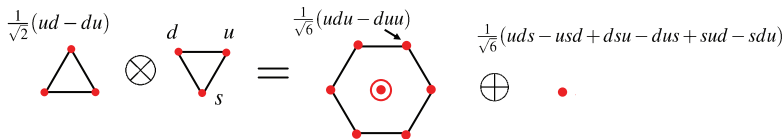
Stany barionowe

❶ Konstrukcja w oparciu o sekstet: $2 \otimes 6 = 10 \oplus 8$



Otrzymujemy symetryczny dekuplet i oktet o mieszanej symetrii.

❷ Konstrukcja w oparciu o tryplet: $\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$



Otrzymujemy oktet o mieszanej symetrii i całkowicie antysymetryczny singlet:

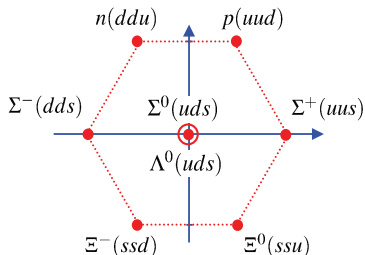
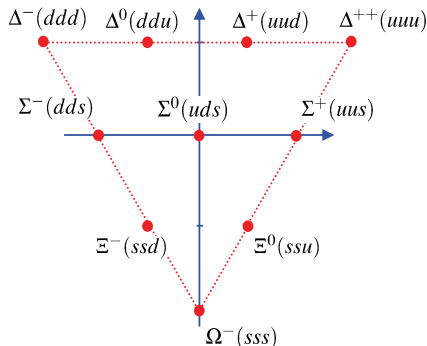
$$T_+ \psi_{singlet} = \frac{1}{\sqrt{6}}(uus - usu + usu - uus + suu - suu) = 0$$

► Podsumowując, kombinację trzech kwarków uds można zapisać jako:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Stany barionowe

- ▶ Dekuplet barionowy ($L = 0, S = 3/2, J = 3/2, P = +1$) - symetryczna funkcja falowa spinowa i zapachowa $\phi(S)\chi(S)$
- ▶ Oktet barionowy ($L = 0, S = 1/2, J = 1/2, P = +1$) - symetria mieszana funkcji falowej spinowej jak i zapachowej $\alpha\phi(M_S)\chi(M_S) + \beta\phi(M_A)\chi(M_A)$



- ▶ Nie można utworzyć całkowicie symetrycznej funkcji falowej w oparciu o całkowicie antysymetryczny singlet zapachowy, ponieważ nie istnieje całkowicie antysymetryczna spinowa funkcja falowa dla układu trzech kwarków.

- ▶ Gdyby symetria zapachowa $SU(3)$ była ścisła to wszystkie masy cząstek w multipletach byłyby takie same. Symetria jest jednak łamana ze względu na to, że $m_s > m_u \approx m_d$. Eksperymentalne masy cząstek w multipletach:

Dekuplet:	$\Delta(1232)$	$\Sigma(1318)$	$\Theta(1384)$	$\Omega(1672)$
Oktet:	$n(939)$	$\Sigma(1193), \Lambda(1116)$	$\Theta(1318)$	

- ▶ Masy cząstek w multipletach rosną wraz ze wzrostem liczby kwarków s .
- ▶ Różnice mas pomiędzy oktetem i dekupletem pochodzą od oddziaływania chromomagnetycznego spin-spin pomiędzy kwarkami.

Dla $L = 0$, barionowa formuła masowa przyjmuje postać:

$$m(q_1 q_2 q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left(\frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle}{m_1 m_2} + \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{m_1 m_3} + \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{m_2 m_3} \right)$$

Parametr A' oraz masy kwarków wyznaczamy z dopasowania do danych:

$$m_d = m + u = 0.365 \text{ GeV}, \quad m_s = 0.540 \text{ GeV}, \quad A' = 0.026 \text{ GeV}^3$$

- ▶ Wyznaczone powyżej masy konstytuentne kwarków są większe niż otrzymane dla mezonów ze względu na efektywnie inne środowisko QCD w barionach i mezonach.

Momenty magnetyczne barionów

► Anomalne momenty magnetyczne barionów ($\mu_p = 2.792\mu_N$, $\mu_n = -1.913\mu_N$, gdzie $\mu_N = e\hbar/2m_p$) można wyjaśnić na podstawie momentów magnetycznych kwarków i odpowiednich funkcji falowych.

► Kwarki są fermionami Diraca, więc dla spinu \uparrow mamy:

$$\hat{\vec{\mu}} = Q \frac{e}{m} \hat{\vec{S}}, \quad \hat{\mu}_z = Q \frac{e}{m} \hat{S}_z, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu_u = \langle u \uparrow | \hat{\mu}_z | u \uparrow \rangle = +\frac{2}{3} \frac{e\hbar}{2m_u} = +\frac{2m_p}{3m_u} \mu_N \\ \mu_d = \langle d \uparrow | \hat{\mu}_z | d \uparrow \rangle = -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_d} = -\frac{m_p}{3m_d} \mu_N \end{cases}$$

► Obliczmy moment magnetyczny protonu (kolejność kwarków w funkcji falowej protonu nie ma znaczenia przy obliczaniu momentu magnetycznego):

$$\begin{aligned} \mu_p &= \langle p \uparrow | \hat{\mu}_z^{(1)} + \hat{\mu}_z^{(2)} + \hat{\mu}_z^{(3)} | p \uparrow \rangle = \\ &= \frac{1}{6} \langle (2u \uparrow u \uparrow d \downarrow - u \uparrow d \downarrow d \uparrow - u \downarrow u \uparrow d \uparrow) | \hat{\mu}_z | (2u \uparrow u \uparrow d \downarrow - u \uparrow d \downarrow d \uparrow - u \downarrow u \uparrow d \uparrow) \rangle = \\ &= \frac{4}{6} \langle u \uparrow u \uparrow d \downarrow | \hat{\mu}_z | u \uparrow u \uparrow d \downarrow \rangle + \frac{1}{6} \langle u \uparrow d \downarrow d \uparrow | \hat{\mu}_z | u \uparrow d \downarrow d \uparrow \rangle + \frac{1}{6} \langle u \downarrow u \uparrow d \uparrow | \hat{\mu}_z | u \downarrow u \uparrow d \uparrow \rangle \\ &= \frac{4}{6} (\mu_u + \mu_u - \mu_d) + \frac{1}{6} (\mu_u - \mu_u + \mu_d) + \frac{1}{6} (-\mu_u + \mu_u + \mu_d) = \frac{4}{3} \mu_u - \frac{1}{3} \mu_d \end{aligned}$$

► Podobnie dla neutronu otrzymujemy: $\mu_n = \frac{4}{3} \mu_d - \frac{1}{3} \mu_u$

► Fit: $\mu_u = +1.85\mu_N$, $\mu_d = -0.97\mu_N$, $m_u = 0.338 \text{ GeV}$, $m_d = 0.322 \text{ GeV}$