

Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 3

Rozpraszanie $2 \rightarrow 2$ w układzie środka masy

W układzie środka masy mamy: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ oraz $E_1 + E_2 = \sqrt{s}$, tak więc:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4|\vec{p}_i^*| \sqrt{s}} \int |M_{fi}|^2 \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3\vec{p}_4}{2E_4}$$

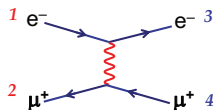
Całka analogiczna do tej występującej w rozpadzie dwuciałowym:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{4|\vec{p}_i^*| \sqrt{s}} \frac{|\vec{p}_f^*|}{4\sqrt{s}} \int |M_{fi}|^2 d\Omega^* = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|} \int |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

gdzie $d\Omega^* = d(\cos\theta^*) d\phi^*$.

Przykład: Rozpraszanie elastyczne, $|\vec{p}_i^*| = |\vec{p}_f^*|$

$$\sigma_{elastic} = \frac{1}{64\pi^2 s} \int |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$



Powyższa formuła na przekrój czynny jest użyteczna do obliczenia całkowitego przekroju czynnego (bo jest niezmienniczy). Nie jest natomiast użyteczna do obliczenia różniczkowego przekroju czynnego w układzie innym niż CMS (bo $d\Omega^*$ jest wyrażone za pomocą wielkości z CMS):

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|} |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

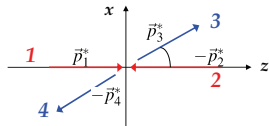
Rozpraszanie $2 \rightarrow 2$ w układzie środka masy

Wyraźmy $d\Omega^*$ za pomocą wielkości niezmienniczej dt gdzie t jest zmienną Mandelstama:

$$t \equiv (p_1^* - p_3^*)^2 = p_1^{*2} + p_3^{*2} - 2p_1^* \cdot p_3^* = m_1^2 + m_3^2 - E_1^* E_3^* + 2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| \cos \theta^*$$

$$dt = 2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| d(\cos \theta^*)$$

$$d\Omega^* = d(\cos \theta^*) d\phi^* = \frac{dt d\phi^*}{2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*|}$$



Różniczkowy przekrój czynny w nowych zmiennych ma postać:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3^*|}{|\vec{p}_1^*|} |M_{fi}|^2 d\Omega^* = \frac{1}{2 \cdot 64\pi^2 s |\vec{p}_1^*|} |M_{fi}|^2 d\phi^* dt$$

Całkując po $d\phi^*$ (zakładamy brak zależności od ϕ^* w $|M_{fi}|^2$) otrzymujemy:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s |\vec{p}_i^*|} |M_{fi}|^2 \quad (\text{niezmienniczy})$$

gdzie $|\vec{p}_i^*|^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2]$ jest stałą.

Przykład: Rozpraszanie elastyczne $e^- p \rightarrow e^- p$ w LAB w granicy $E_1 \gg m_1$:

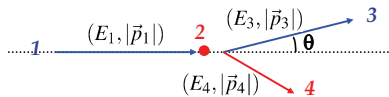
$$|\vec{p}_i^*|^2 = \frac{(s - m_2)^2}{4s} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi (s - m_2^2)^2} |M_{fi}|^2$$

Rozpraszanie $2 \rightarrow 2$ w układzie laboratoryjnym

Rozważamy rozpraszanie na stacjonarnej tarczy w układzie laboratoryjnym (LAB), np. elektron-proton.

Rozpatrujemy rozpraszanie elastyczne w którym masę cząstek padających można zaniedbać: $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = m_4 = M$.

$$d\Omega = 2\pi d(\cos \theta)$$
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{dt} \frac{dt}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{dt}{d(\cos \theta)} \frac{d\sigma}{dt}$$



Definiujemy czteropędy cząstek:

$$p_1 = (E_1, 0, 0, E_1), \quad p_2 = (M, 0, 0, 0), \quad p_3 = (E_3, E_3 \sin \theta, 0, E_3 \cos \theta), \quad p_4 = (E_4, \vec{p}_4)$$

$$\text{Obliczamy } t = (p_1 - p_3)^2 = -2p_1 \cdot p_3 = -2E_1 E_3 (1 - \cos \theta).$$

Ale z zasady zachowania czteropędu $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ mamy jednocześnie:

$$t = (p_2 - p_4)^2 = 2M^2 - 2p_2 \cdot p_4 = 2M^2 - 2ME_4 = 2M^2 - 2M(E_1 + M - E_3) \\ = -2M(E_1 - E_3)$$

Porównując oba wyrażenia na t znajdujemy:

$$E_3 = \frac{E_1 M}{M + E_1 - E_1 \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d(\cos \theta)} = 2M \frac{dE_3}{d(\cos \theta)} = \dots = 2M \frac{E_3^2}{M} = 2E_3^2$$

Rozpraszanie $2 \rightarrow 2$ w układzie laboratoryjnym

Różniczkowy przekrój czynny ma więc postać:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{dt}{d(\cos\theta)} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2\pi} 2E_3^2 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{E_3^2}{\pi} \frac{1}{16\pi(s - M^2)^2} |M_{fi}|^2$$

Korzystając z relacji

$$s = (p_1 + p_2)^2 = M^2 + 2p_1 \cdot p_2 = M^2 + 2ME_1 \quad \Rightarrow \quad s - M^2 = 2ME_1$$

w granicy $m_1 \rightarrow 0$ otrzymujemy:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{E_3}{ME_1} \right)^2 |M_{fi}|^2 = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{1}{M + E_1(1 - \cos\theta)} \right)^2 |M_{fi}|^2$$

W sytuacji gdy masa m_1 nie może być zaniedbana otrzymujemy:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{p_1 m_1} \frac{|\vec{p}_3|^2}{|\vec{p}_3|(E_1 + m_2) - E_3|\vec{p}_1| \cos\theta} |M_{fi}|^2$$

W powyższym wyrażeniu mamy tylko jedną niezależną zmienną, θ , co widać z zasady zachowania energii zapisanej w postaci:

$$E_1 + m_2 = \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} + \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_3|^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos\theta + m_4^2}$$

tzn. $|\vec{p}_3|^2$ jest funkcją θ .

Podsumowanie rozpadu i rozpraszania dwuciałowego

Korzystając ze złotej reguły Fermiego wyrażonej za pomocą niezmienniczego elementu macierzowego otrzymaliśmy następujące wyniki.

- Częstość rozpadu dwuciałowego:

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}^*|}{32\pi^2 m_i^2} \int |M_{fi}|^2 d\Omega, \quad p^* = \frac{1}{2m_i} \sqrt{[m_i^2 - (m_1 + m_2)^2][m_i^2 - (m_1 - m_2)^2]}$$

- Przekrój czynny na rozpraszanie w układzie CMS:

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|} \int |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

- Niezmienniczy różniczkowy przekrój czynny:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s |\vec{p}_i^*|^2} |M_{fi}|^2, \quad |\vec{p}_i^*|^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]$$

- Różniczkowy przekrój czynny w układzie laboratoryjnym ($m_1 = 0$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{E_3}{ME_1} \right)^2 |M_{fi}|^2 = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{1}{M + E_1(1 - \cos\theta)} \right)^2 |M_{fi}|^2$$

- Różniczkowy przekrój czynny w układzie laboratoryjnym ($m_1 \neq 0$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{p_1 m_1} \frac{|\vec{p}_3|^2}{|\vec{p}_3|(E_1 + m_2) - E_3 |\vec{p}_1| \cos\theta} |M_{fi}|^2$$