

Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 3

Elektrodynamika kwantowa

Elektrodynamika kwantowa to teoria kwantowa oddziaływań elektromagnetycznych. Oddziaływania (siły) wynikają z wymiany wirtualnych kwantów pola.

Częstość przejść dana jest przez: $\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(E_f)$

Rachunek zaburzeń:

$$M_{fi} = \langle \psi_f | \hat{H}' | \psi_i \rangle + \sum_{j \neq i} \langle \psi_f | \hat{H}' | \psi_j \rangle \frac{1}{E_i - E_j} \langle \psi_j | \hat{H}' | \psi_i \rangle + \dots$$

Proces rozpraszania $a + b \rightarrow c + d$ zachodzący poprzez wymianę cząstki X .

Opis czasoprzestrzenny:

stan początkowy i : $a + b$

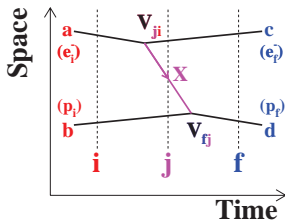
stan końcowy f : $a + b$

stan pośredni j : $b + c + X$

Uporządkowane czasowo oddziaływanie przebiega tak:

$$a \rightarrow c + X \Rightarrow b + X \rightarrow d$$

(np. oddziaływanie elektron proton poprzez wymianę fotonu)



W drugim rzędzie rachunku zaburzeń mamy (index ab oznacza, że a oddziałuje z X przed b (zależy od układu - nie jest lorentzowsko niezmiennicze):

$$\begin{aligned} M_{fi}^{ab} &= \frac{\langle \psi_f | \hat{H}' | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{H}' | \psi_i \rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle \psi_d | \hat{H}' | \psi_X \psi_b \rangle \langle \psi_c \psi_X | \hat{H}' | \psi_a \rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_X + E_b)} \\ &= \frac{\langle \psi_d | \hat{H}' | \psi_X \psi_b \rangle \langle \psi_c \psi_X | \hat{H}' | \psi_a \rangle}{E_a - E_c - E_X} \end{aligned}$$

Komentarze:

- pęd jest zachowany w $a \rightarrow c + X$ oraz $b + X \rightarrow d$,
- wymieniana czastka spełnia relację $E_X^2 - p_X^2 = m_X^2$,
- elementy macierzowe $\langle \psi_d | \hat{H}' | \psi_X \psi_b \rangle$ oraz $\langle \psi_c \psi_X | \hat{H}' | \psi_a \rangle$ zależą od siły sprzężenia (np. γe oraz γp).

W przypadku gdy uporządkowanie w czasie byłoby odwrotne $b \rightarrow d + X$, a potem $a + X \rightarrow c$, element macierzowy miałby postać:

$$M_{fi}^{ba} = \frac{\langle \psi_c | \hat{H}' | \psi_X \psi_a \rangle \langle \psi_d \psi_X | \hat{H}' | \psi_b \rangle}{E_b - E_d - E_X}$$

Zakładając, że sprzężenia w obu wierzchołkach są takie same, tzn.:

$$\langle \psi_c | \hat{H}' | \psi_X \psi_a \rangle = \langle \psi_d \psi_X | \hat{H}' | \psi_b \rangle = g$$

dostajemy (czynniki $1/(2E_X)$ wprowadzony w związku z relatywistyczną normalizacją funkcji falowej):

$$M_{fi}^{ba} = \frac{g^2}{E_b - E_d - E_X} \times \frac{1}{2E_X}$$

Sumując elementy macierzowe odpowiadające obu możliwym uporządkowaniom w czasie dostajemy:

$$M_{fi} = M_{fi}^{ab} + M_{fi}^{ba} = g^2 \left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \frac{1}{E_b - E_d - E_X} \right) \times \frac{1}{2E_X}$$

Ponieważ $E_a + E_b = E_c + E_d \Rightarrow E_b - E_d = E_c - E_a$ więc mamy:

$$M_{fi} = g^2 \frac{2E_X}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} \times \frac{1}{2E_X}$$

Korzystając z relacji $E_X^2 = (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 + m_X^2$ ostatecznie mamy:

$$M_{fi} = \frac{g^2}{q^2 - m_X^2}, \quad \text{gdzie} \quad q^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$$

M_{fi} jest lorentzowsko niezmienniczy. Masa niezmiennicza $m_{inv}^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$ wymienianej cząstki, X , nie jest równa masie spoczynkowej m_X .

Diagramy Feynmana

Po wysumowaniu po wszystkich możliwych uporządkowaniach w czasie otrzymujemy **lorentzowsko niezmienniczy element macierzowy**:

$$M_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2}$$

”Uporządkowana czasowo MK”:

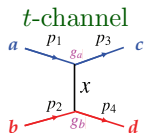
- pęd zachowany w wierzchołkach,
- energia niezachowana w wierzchołkach,
- wymieniana cząstka na powłoce masy:

$$E_X^2 - |\vec{p}_X|^2 = m_X^2$$

Diagram Feynmana:

- pęd i energia zachowane w wierzchołkach
- wymieniana cząstka wirtualna:

$$E_X^2 - |\vec{p}_X|^2 \neq m_X^2$$



Mamy: $q^2 = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = t$

Dla rozpraszania elastycznego: $p_1 = (E, \vec{p}_1)$, $p_3 = (E, \vec{p}_3)$

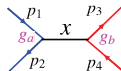
$$q^2 = (E - E)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 < 0$$

Mamy: $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = s$

W układzie CMS: $p_1 = (E, \vec{p})$, $p_2 = (E, -\vec{p})$

$$q^2 = (E + E)^2 - (\vec{p} - \vec{p})^2 = 4E^2 > 0$$

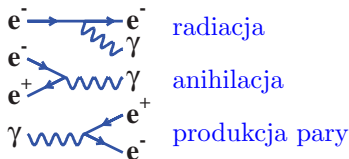
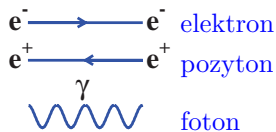
s-channel



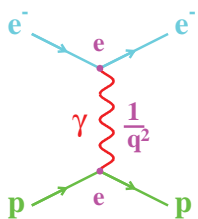
Fizyka w diagramach Feynmana

Wielkość $1/(q^2 - m_X^2)$ nazywamy **propagatorem**. Jest on odwrotnie proporcjonalny do tego jak bardzo cząstka jest poza powłoką masy. Im bardziej poza powłoką masy tym mniejsze jest p-two produkcji takiego stanu wirtualnego.

Podstawowe elementy składowe diagramów Feynmana w QED:



Siła oddziaływania pomiędzy wirtualnym fotonem i fermionem nazywana jest sprzężeniem i jest proporcjonalna do ładunku fermionu.



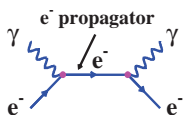
Element macierzowy dla rozpraszania elastycznego ep :

$$iM = \langle \bar{u}_e | ie\gamma^\mu | u_e \rangle \times \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \times \langle \bar{u}_p | ie\gamma^\nu | u_p \rangle$$

Wielkości γ^μ oraz $g^{\mu\nu}$ to macierze 4×4 uwzględniające strukturę spinową oddziaływania, natomiast \bar{u} oraz u to tzw. spinory. Wielkości te oraz postacie prądów fermionowych wynikają z **równania Diraca**.

Przykłady procesów elektromagnetycznych

Rozpraszanie Comptona:

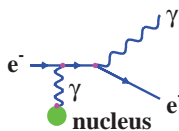


$$M \sim e^2$$

$$\sigma \sim |M|^2 \sim e^4$$

$$\sigma \sim (4\pi)^2 \alpha^2$$

Bremsstrahlung:

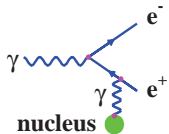


$$M \sim Ze \cdot e \cdot e$$

$$\sigma \sim |M|^2 \sim Z^2 e^6$$

$$\sigma \sim (4\pi)^3 Z^2 \alpha^3$$

Produkcja pary e^+e^- :

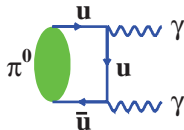


$$M \sim e \cdot e \cdot Ze$$

$$\sigma \sim |M|^2 \sim Z^2 e^6$$

$$\sigma \sim (4\pi)^3 Z^2 \alpha^3$$

Rozpad π^0 :

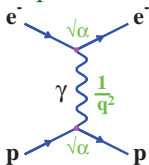


$$M \sim Q_u e \cdot Q_u e$$

$$\sigma \sim |M|^2 \sim Q_u^4 e^4$$

$$\sigma \sim (4\pi)^2 Q_u^4 \alpha^2$$

Rozpraszanie ep :

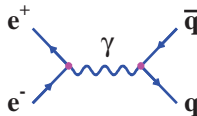


$$M \sim e \cdot e$$

$$\sigma \sim |M|^2 \sim e^4$$

$$\sigma \sim (4\pi)^2 \alpha^2$$

Anihilacja $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$:



$$M \sim e \cdot Q_u e$$

$$\sigma \sim |M|^2 \sim Q_u^2 e^4$$

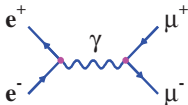
$$\sigma \sim (4\pi)^2 Q_u^2 \alpha^2$$

Wyższe rzędy w rachunku zaburzeń

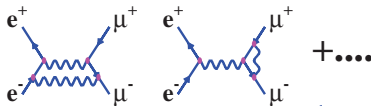
Aby obliczyć przekrój czynny należy dodać do siebie elementy macierzowe odpowiadające kolejnym rzędom w rachunku zaburzeń:

$$M_{fi} = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$$

- najniższy rząd: $|M|^2 \propto \alpha^2 \sim \frac{1}{137^2}$



- drugi rząd: $|M|^2 \propto \alpha^4 \sim \frac{1}{137^4}$



- trzeci rząd: $|M|^2 \propto \alpha^6 \sim \frac{1}{137^6}$

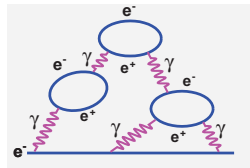


- Wkład od każdego kolejnego rzędu jest ograniczony czynnikiem α^2 . Zakładając, że α jest małe, w sumie dominuje najniższy rząd.
- Sumowanie amplitud, a więc różnych diagramów, może prowadzić do interferencji pozytywnych lub negatywnych.

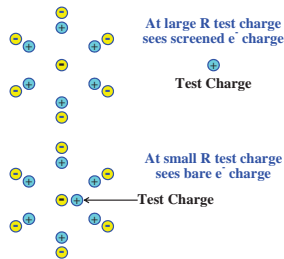
Biegnała stała sprzężenia α

Stała sprzężenia $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ określa siłę oddziaływania pomiędzy elektronem i fotonem. W rzeczywistości α nie jest stałe, ale zależy od wirtualności fotonu!

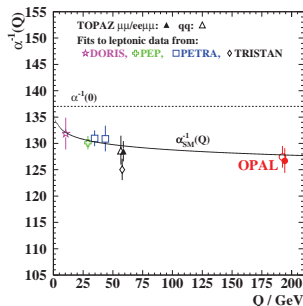
Fluktuacje kwantowe prowadzą do powstania chmury wirtualnych cząstek w otoczeniu elektronu (nieskończona liczba podobnych diagramów). Pary e^+e^- ulegają polaryzacji i ekranują ładunek 'gołego' elektronu.



Wartość α rośnie wraz ze wzrostem q^2 (tzn. kiedy jesteśmy bliżej 'gołego' elektronu).



$$\alpha(q^2 = 0) = 1/137, \quad \alpha(q^2 = 100 \text{ GeV}^2) = 1/128$$



Elektrodynamika kwantowa (QED): kwantowa teoria oddziaływań elektromagnetycznych przenoszonych przez bezmasowe fotony, sprzęgające się do ładunku elektrycznego. Siła oddziaływania $\langle \psi_f | \hat{H} | \psi_i \rangle \propto \sqrt{\alpha}$, $\alpha = e^2/4\pi$.

Chromodynamika kwantowa (QCD): kwantowa teoria oddziaływań silnych przenoszonych przez bezmasowe gluony sprzęgające się do ładunku ‘silnego’.

W QCD ładunkiem jest ‘kolor’ - liczba kwantowa zachowana w oddziaływaniach silnych i przyjmująca trzy wartości: **red**, **green** oraz **blue**.

Kwarki niosą ‘kolor’: **r**, **g** oraz **b**

Antykwarki niosą ‘antykolor’: \bar{r} , \bar{g} oraz \bar{b}

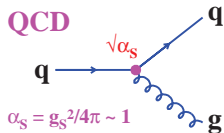
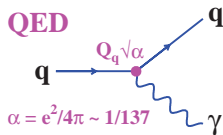
Leptony oraz γ , W^\pm , Z^0 nie niosą koloru (‘kolor’ = 0) i nie uczestniczą w oddziaływaniach silnych.

Gluony są bezmasowymi cząstkami o spinie 1 i przenoszą ładunek kolorowy. Oczekujemy 9 gluonów:

$$r\bar{b}, r\bar{g}, g\bar{r}, g\bar{b}, b\bar{r}, r\bar{r}, g\bar{g}, b\bar{b}$$

Rzeczywiste gluony są ortogonalnymi kombinacjami liniowymi powyższych stanów.

Kombinacja $\frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$ ma wypadkowy kolor równy 0 i nie przenosi oddziaływań silnych.



$$\alpha_s \gg \alpha_{em}$$

Oddziaływania kolorowe

Przykład: Rozpraszanie qq oraz anihilacja $q\bar{q}$.

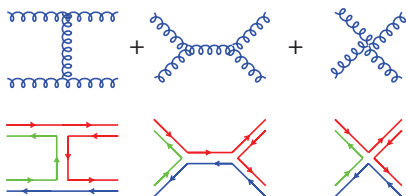
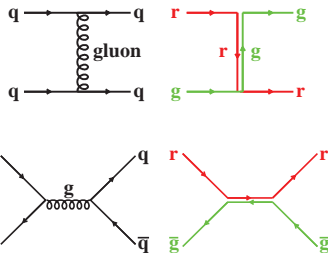
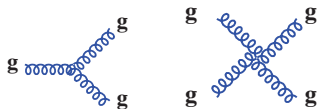
Dla małych odległości potencjały w QED i QCD wyglądają podobnie:

$$V_{QED} = -\frac{\alpha}{r} \quad V_{QCD} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$$

Podobieństwo to wynika z faktu, że oba oddziaływania przenoszone są za pomocą bezmasowych cząstek o spinie 1.

Gluony noszą jednak ładunek kolorowy. Oznacza, to że mogą między sobą silnie oddziaływać.

Mogą występować wierzchołki gluonowe:



Przykład: Rozpraszanie $gg \rightarrow gg$

np. $r\bar{g} + g\bar{b} \rightarrow r\bar{r} + r\bar{b}$

Uwięzienie (confinement)

Nie obserwujemy swobodnych kwarków ani gluonów. Uwięzienie kwarków w hadronach jest konsekwencją samoodziaływania gluonów.

Samoodziaływanie gluonów prowadzi do ich wzajemnego przyciągania, co powoduje że linie pola kolorowego układają się w wąską strunę, w przybliżeniu mającą stałą gęstość energii

$$\Rightarrow V(r) = kr \text{ gdzie } k \approx 1 \text{ GeV/fm}$$

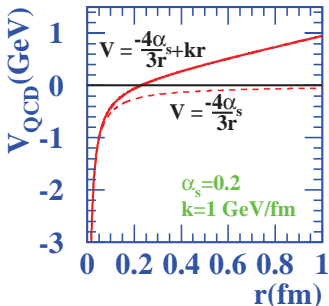
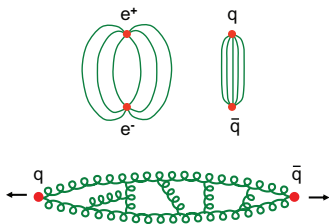
Do odseparowania kwarków potrzebna jest nieskończona energia! - **uwieżenie**.

Przykład: Jak silne są oddziaływania silne?

$$V_{QCD} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr$$
$$F = -\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r^2} + k$$

Dla dużych r mamy:

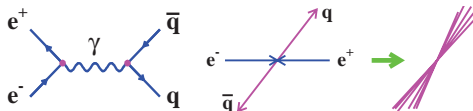
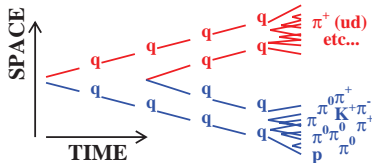
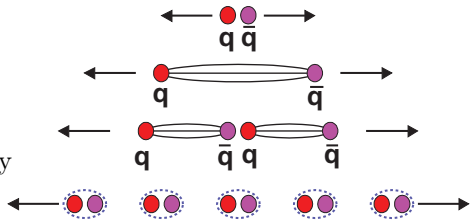
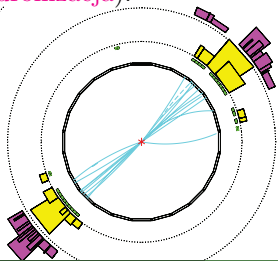
$$F = k = \frac{1.6 \cdot 10^{-10}}{10^{-15}} \text{ [N]} = 160000 \text{ N}$$



Hadronizacja i dżety

Rozważmy parę $q\bar{q}$ wyprodukowaną w anihilacji e^+e^- , tzn. $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$:

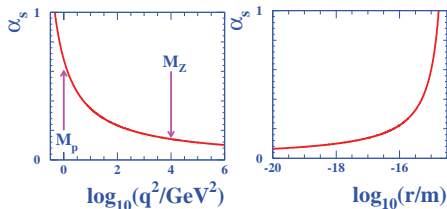
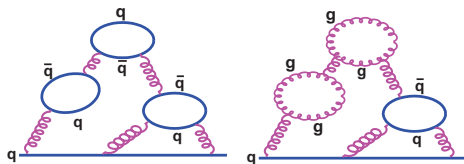
- początkowo kwarki oddalają się od siebie z dużą prędkością,
- tworzy się struna kolorowa pomiędzy nimi,
- energia struny staje się wystarczająca do wyprodukowania pary $q\bar{q}$,
- proces ten jest kontynuowany aż kwarki utworzą dżety hadronów (**hadronizacja**).



Biegająca silna stała sprzężenia α_s

Stała sprzężenia α_s podobnie jak α_{QED} zależy od q^2 (biegnie):

- Fluktuacje kwantowe w QCD prowadzą do powstania wokół kwarku chmury wirtualnych par $q\bar{q}$ oraz chmury wirtualnych gluonów (brak analogii w QED ze względu na brak samooddziaływania fotonu). ‘Goły’ kolor kwarku jest ekranowany zarówno przez kwarki jak i gluony.
- Chmura wirtualnych gluonów niesie kolor i efektywny ładunek kolorowy **rośnie** z odległością!
- Przy niskich energiach (duże odległości) α_s staje się duże i nie można stosować rachunku zaburzeń.
- Przy wysokich energiach (małe odległości) α_s jest małe, kwarki zachowują się jak swobodne cząstki (asymptotic freedom) i można stosować rachunek zaburzeń.



QCD w anihilacji e^+e^-

Anihilacja e^+e^- dostarcza bezpośredniego dowodu na istnienie koloru.

Porównajmy przekroje czynne na procesy $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ oraz $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

$$R_\mu = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

Zaniedbując masy cząstek w stanie końcowym (muon, kwark) jedyną różnicą pomiędzy nimi jest ładunek elektryczny.

Obliczymy przekrój czynny na proces $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$, gdzie $f\bar{f}$ oznacza $\mu^+\mu^-$ lub $q\bar{q}$.

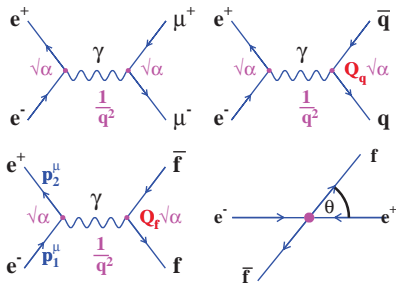
Mamy: $p_1^\mu = (E, 0, 0, E)$, $p_2^\mu = (E, 0, 0, -E)$, $q^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (2E, 0, 0, 0)$

Obliczamy element macierzowy i różniczkowy przekrój czynny:

$$M = \langle v_{e^+} | Q_e e | u_{e^-} \rangle \frac{1}{q^2} \langle v_{f^-} | Q_f e | u_{f^+} \rangle = -\frac{4\pi\alpha Q_e Q_f}{q^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi |M|^2 \frac{d\rho(E_f)}{d\Omega} = 2\pi \frac{(-4\pi\alpha Q_e Q_f)^2}{q^4} \frac{E^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) = \frac{\alpha^2 Q_f^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta)$$

Czynnik $(1 + \cos^2 \theta)$ wynika z równania Diraca i opisuje rozpad fotonu o spinie 1 na dwa fermiony o spinie 1/2.



QCD w anihilacji e^+e^-

Całkowity przekrój czynny na proces $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$:

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha^2 Q_f^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\pi \alpha^2 Q_f^2}{2s} \int_{-1}^{+1} (1 + y^2) dy = \frac{4\pi \alpha^2 Q_f^2}{3s}\end{aligned}$$

W szczególności otrzymujemy:

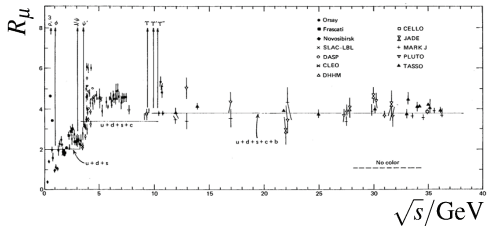
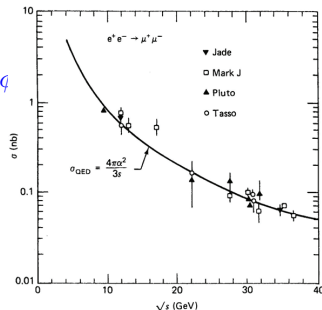
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Dla pojedynczego kwarku q wielkość $R = Q_q^2$. W rzeczywistości obserwujemy $e^+e^- \rightarrow \text{jets}$, musimy więc sumować po kwarkach i kolorach: $R = 3 \sum_i Q_i^2$

gdzie suma przebiega po zapachach kwarków kinematycznie dostępnych w danym eksperymencie ($\sqrt{s} > 2m_q$).

W obszarze $\sqrt{s} < 11$ GeV duży wpływ rezonansów.

Pomiar R_μ wyklucza hipotezę braku koloru.



Eksperymentalne dowody na istnienie koloru i gluonów

Konieczność wprowadzenia koloru wynika m. in. z:

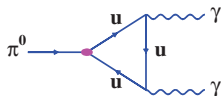
- Rozkład wielkości R_μ
- istnienie barionu $\Omega^- (sss)$ o spinie 3/2 złożonego z trzech kwarków dziwnych s . Funkcja falowa jest symetryczna względem przestawień kwarków ($\psi = s \uparrow s \uparrow s \uparrow$). Jednak kwarki jako fermiony wymagają antysymetrycznej funkcji falowej, tzn. konieczny jest dodatkowy stopień swobody - **kolor**:

$$\psi = (s \uparrow s \uparrow s \uparrow) \psi_{kolor} = (s \uparrow s \uparrow s \uparrow) \frac{1}{\sqrt{6}} (rgb + gbr + brg - grb - rbg - bgr)$$

- częstość rozpadu $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

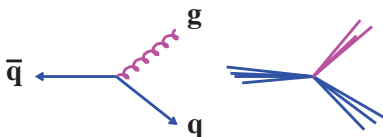
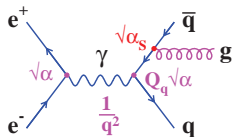
$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \propto N_{kolor}^2$$

$$\text{Exp: } N_{kolor} = 2.99 \pm 0.12$$



Eksperymentalne potwierdzenie istnienia gluonów:

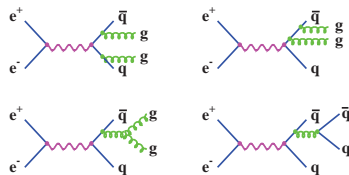
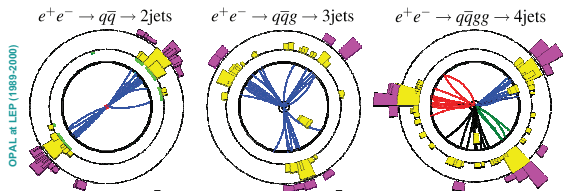
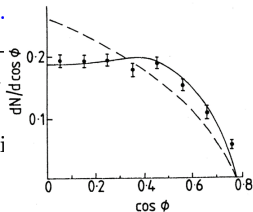
- przypadki trój-dżetowe $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$



Eksperymentalne potwierdzenie istnienia gluonów

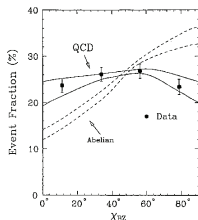
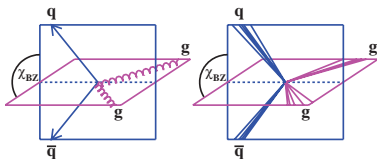
Rozkład kątowy dżetów gluonowych zależy od spinu gluonu.

Rysunek przedstawia rozkład kąta ϕ pomiędzy dżetem o największej energii (zakładamy, że jest to dżet kwarkowy) oraz kierunkiem lotu pozostałych dwóch dżetów (w układzie ich środka masy). Zmierzony rozkład kąta ϕ jest zgodny z przewidywaniami dla spinu gluonu równego 1 (linia przerywana - spin 0).



- przypadki cztero-dżetowe $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}gg$ ($q\bar{q}q\bar{q}$)

Rozkład kąta χ_{BZ} pomiędzy płaszczyznami zawierającymi dżety kwarkowe i gluonowe wymaga istnienia samoodziaływania gluonów.



Pomiary silnej stałej sprzężenia α_s

Pomiar w oparciu o stosunek R_μ .

W praktyce sumujemy diagramy, co oznacza, że nie rozróżniamy przypadki 2/3 dżetowe:

$$R_\mu = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_q Q_q^2$$

$$R_\mu = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_q Q_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right)$$

Pomiar:

$$\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \simeq \frac{3.9}{3.66} \Rightarrow \alpha_s(q^2 = 25^2) \simeq 0.20$$

Inne metody pomiaru α_s , np. stosunek liczby przypadków 3 i 2 dżetowych:

$$\frac{\sigma(3 \text{ dżety})}{\sigma(2 \text{ dżety})} = \frac{\sigma(q\bar{q}g)}{\sigma(q\bar{q})} \propto \alpha_s$$

Podsumowanie aktualnych pomiarów α_s przedstawia rysunek obok - α_s biegnie!

