

Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 7

Chcemy obliczyć $(j_\mu)^\nu = \bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)$ dla wszystkich czterech stanów helicity.

Dla dowolnych spinorów ψ oraz ϕ mamy:

$$\bar{\psi}\gamma^0\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4$$

$$\bar{\psi}\gamma^1\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1$$

$$\bar{\psi}\gamma^2\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1)$$

$$\bar{\psi}\gamma^3\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 + \psi_4^*\phi_2$$

Rozważmy kombinację $\mu_R^-\mu_L^+$, tzn. $\psi = u_\uparrow = \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix}$ oraz $\phi = v_\downarrow = \begin{pmatrix} s \\ -c \\ s \\ -c \end{pmatrix}$:

$$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^0v_\downarrow(p_4) = E(cs - sc + cs - sc) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^1v_\downarrow(p_4) = E(-c^2 + s^2 - c^2 + s^2) = 2E(s^2 - c^2) = -2E \cos \theta$$





$$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^2v_\downarrow(p_4) = -iE(-c^2 - s^2 - c^2 - s^2) = 2iE$$

$$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^3v_\downarrow(p_4) = E(cs + sc + cs + sc) = 4Esc = 2E \sin \theta$$

A więc prąd mionowy dla kombinacji RL ma postać:

$$(j_\mu)^\nu = \bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) = 2E(0, -\cos \theta, i, \sin \theta)$$

Prądy mionowe dla 4 kombinacji stanów helicity:

	<i>RL</i>	$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) = 2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta)$
	<i>RR</i>	$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) = (0, 0, 0, 0)$
	<i>LL</i>	$\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) = (0, 0, 0, 0)$
	<i>LR</i>	$\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) = 2E(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta)$

W granicy $E \gg m$ tylko dwie kombinacje helicity dają niezerowe prądy (podobnie jest w QCD).

Spinory dla elektronu i pozytonu mają postać:

$$u_\uparrow(p_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_\downarrow(p_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_\uparrow(p_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_\downarrow(p_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prądy elektronowe można otrzymać albo analogicznie jak w przypadku prądów mionowych, albo bezpośrednio z wyznaczonych wcześniej prądów mionowych.

$$(j_e)^\nu = \bar{v}(p_2)\gamma^\nu u(p_1) \qquad (j_\mu)^\nu = \bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)$$

Prąd elektronowy $(j_e)^\mu$

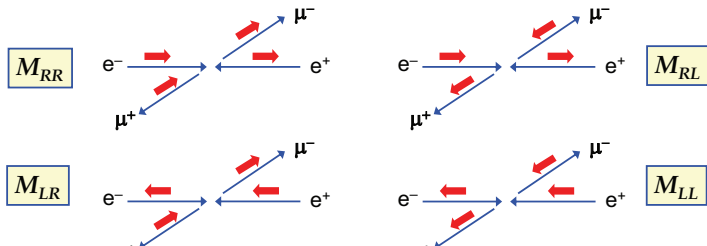
Prądy elektronowy i mionowy są swoimi sprzężeniami hermitowskimi:

$$\begin{aligned} [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)]^\dagger &= [u(p_3)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v(p_4)]^\dagger = v(p_4)^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}u(p_3) = \\ &= v(p_4)^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0u(p_3) = v(p_4)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u(p_3) = \bar{v}(p_4)\gamma^\mu u(p_3) \end{aligned}$$

Aby otrzymać prądy elektronowe należy sprzężać w sposób zespolony prądy mionowe i ustalić $\theta = 0$:

$$\begin{array}{ll} e^- \xrightarrow{\text{red}} \xleftarrow{\text{red}} e^+ & RL \quad \bar{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\nu u_\uparrow(p_1) = 2E(0, -1, -i, 0) \\ e^- \xrightarrow{\text{red}} \xleftarrow{\text{red}} e^+ & LR \quad \bar{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\nu v_\downarrow(p_1) = 2E(0, -1, i, 0) \end{array}$$

W rezultacie musimy więc obliczyć tylko cztery elementy macierzowe:



Obliczenie elementu macierzowego

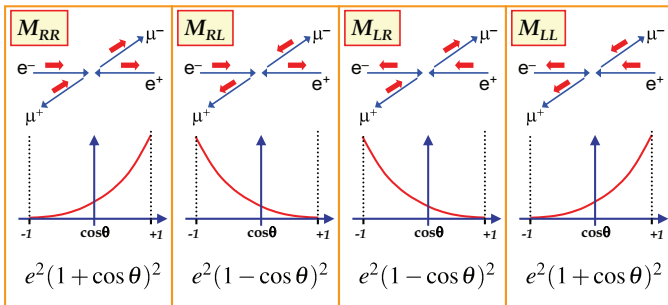
Możemy teraz już obliczyć wszystkie 4 elementy macierzowe $M = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu$:

$$M_{RR} \equiv M_{e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+} = -\frac{e^2}{s} [2E(0, -1, -i, 0)] \cdot [2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta)]$$

$$= -e^2(1 + \cos\theta) = -4\pi\alpha(1 + \cos\theta)$$

Podobnie dostajemy:

$$|M_{RR}|^2 = |M_{LL}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1 + \cos\theta)^2, \quad |M_{RL}|^2 = |M_{LR}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1 - \cos\theta)^2$$

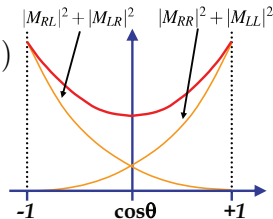


Przy założeniu, że padające elektrony i pozytony są niespolaryzowane, wszystkie 4 możliwe stany helicy są jednakowo prawdopodobne.

Różniczkowy i całkowy przekrój czynny

Aby otrzymać przekrój czynny należy wysumować po końcowych stanach spinowych i uśrednić po początkowych stanach spinowych:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64\pi^2 s} (|M_{RR}|^2 + |M_{RL}|^2 + |M_{LR}|^2 + |M_{LL}|^2) \\ &= \frac{(4\pi\alpha)^2}{256\pi^2 s} (2(1 + \cos\theta)^2 + 2(1 - \cos\theta)^2) = \\ &= \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) = \frac{\alpha^2}{2s} \frac{(p_1 \cdot p_4)^2 + (p_1 \cdot p_3)^2}{(p_1 \cdot p_2)^2}\end{aligned}$$

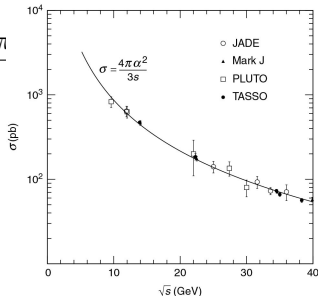


Całkowy przekrój czynny otrzymujemy całkując po θ i ϕ :

$$\int (1 + \cos^2\theta) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} (1 + \cos^2\theta) d(\cos\theta) = \frac{16\pi}{3}$$

Całkowy przekrój czynny już w najniższym rzędzie bardzo dobrze opisuje dane:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

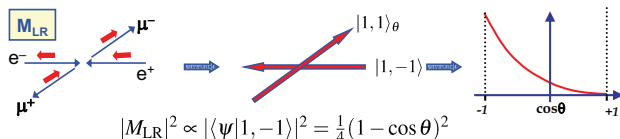
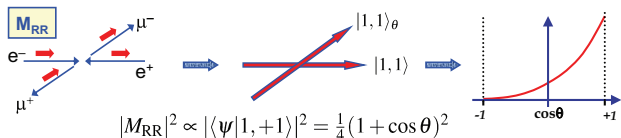


Uwagi dotyczące spinu (dla $E \gg m$)

- ▶ Ze względu na dozwolone stany helicity, elektron i pozyton oddziałują w stanie spinowym $S_z = \pm 1$, tzn. w stanie o całkowitym spinie 1 wzdłuż osi z : $|1, 1\rangle$ lub $|1, -1\rangle$.
- ▶ Podobnie mion i antimion produkowane są w stanie o całkowitym spinie 1 w kierunku osi o kącie polarnym θ , tzn. $|1, 1\rangle_\theta$.
- ▶ Stan $|1, 1\rangle_\theta$ wyrażamy za pomocą stanów własnych operatora S_z :

$$\psi = |1, 1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)|1, -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta |1, 0\rangle + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)|1, 1\rangle$$

Prowadzi to do wyznaczonych wcześniej zależności kątowych:



Stany własne helicity dla cząstek/antycząstek gdy $E \gg m$ mają postać:

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad v_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix}$$

gdzie $s = \sin(\theta/2)$, $c = \cos(\theta/2)$

Definiujemy macierz $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

► W granicy $E \gg m$ stany helicity są stanami własnymi γ^5 :

$$\gamma^5 u_{\uparrow} = +u_{\uparrow}, \quad \gamma^5 u_{\downarrow} = -u_{\downarrow}, \quad \gamma^5 v_{\uparrow} = -v_{\uparrow}, \quad \gamma^5 v_{\downarrow} = +v_{\downarrow}$$

► Stany własne γ^5 definiuje się jako **lewo** i **prawo skrętne stany chiralne**, tzn.:

$$\gamma^5 u_R = +u_R, \quad \gamma^5 u_L = -u_L, \quad \gamma^5 v_R = -v_R, \quad \gamma^5 v_L = +v_L$$

► Tylko w granicy $E \gg m$ zachodzi: $u_r \equiv u_{\uparrow}$, $u_L \equiv u_{\downarrow}$, $v_R \equiv v_{\uparrow}$, $v_L \equiv v_{\downarrow}$.

Definiujemy operatory rzutowania: $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$ oraz $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ które rzutują chiralne stany własne:

$$\begin{aligned} P_R u_R &= u_R, & P_R u_L &= 0, & P_L u_R &= 0, & P_L u_L &= u_L \\ P_R v_R &= 0, & P_R v_L &= v_L, & P_L v_R &= v_R, & P_L v_L &= 0 \end{aligned}$$

Każdy spinor można zapisać jako sumę składowych chiralnych:

$$\psi = \psi_R + \psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi + \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$$

W QED oddziaływanie pomiędzy fermionem i fotonem opisane jest przez:

$$\begin{aligned} ie\bar{\psi}\gamma^\mu\phi &= ie(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)\gamma^\mu(\phi_R + \phi_L) \\ &= ie(\bar{\psi}_R\gamma^\mu\phi_R + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\phi_L + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\phi_R + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\phi_L) \end{aligned}$$

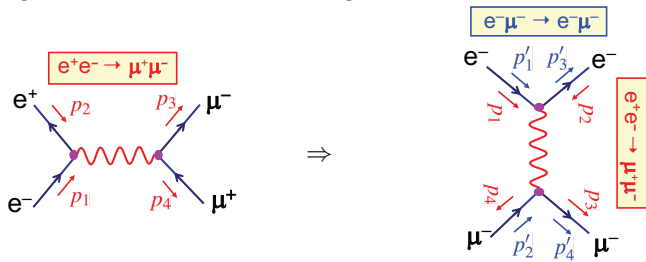
Korzystając z własności macierzy γ^5 : $(\gamma^5)^2 = 1$, $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$, $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$ można pokazać, że

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\phi_L = 0, \quad \bar{\psi}_L\gamma^\mu\phi_R = 0$$

A więc, tylko niektóre chiralne stany własne dają wkład do oddziaływania.

Symetria krzyżowania (crossing symmetry)

Jeśli dysponujemy niezmienniczym elementem macierzowym dla procesu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ to możemy "obrócić" diagram tak aby odpowiadał procesowi $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ i zastosować zasadę **symetrii krzyżowania** w celu zapisania odpowiadającego mu elementu macierzowego.



► Stosujemy transformacje: $p_1 \rightarrow p'_1$, $p_2 \rightarrow -p'_3$, $p_3 \rightarrow p'_4$, $p_4 \rightarrow -p'_2$:

$$e^+(p_1)e^-(p_2) \rightarrow \mu^+(p_3)\mu^-(p_4) \quad \Rightarrow \quad e^-(p'_1)\mu^-(p'_2) \rightarrow e^-(p'_3)\mu^-(p'_4)$$

A następnie znajdujemy element macierzowy dla $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ stosując symetrię krzyżowania:

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = 2e^4 \frac{(p_1 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \quad \Rightarrow \quad \langle |M_{fi}|^2 \rangle = 2e^4 \frac{(p'_1 \cdot p'_4)^2 + (p'_1 \cdot p'_2)^2}{(p'_1 \cdot p'_3)^2}$$