KATEDRA ROBOTYKI I MECHATRONIKI
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 5

LAB 5

TEMAT:
MODULACJA I DEMODULACJA CZĘSTOTLIWOŚCI

I. CEL ĆWICZENIA:

Celem ćwiczenia jest wprowadzenie do zagadnienia modulacji i demodulacji częstotliwości, poznanie podstaw matematycznych oraz metod wytwarzania sygnału zmodulowanego częstotliwościowo, poznanie podstawowych sposobów demodulacji sygnału zmodulowanego częstotliwościowo oraz poznanie metod obliczania i określania podstawowych parametrów określających właściwości sygnału zmodulowanego.

II. WSTĘP TEORETYCZNY:

Podobnie jak dla modulacji amplitudowej poznanej na poprzednich ćwiczeniach rozważmy na początku niezmodulowaną falę nośną.

$$f_C(t) = A\cos(\omega_C t + \theta)$$

Jeżeli ω_C zmienia się zgodnie z informacją, którą chcemy przesłać, to mówimy, że fala nośna jest zmodulowana częstotliwościowo. Należy jednak zauważyć, że jeżeli ω_C zmienia się w czasie to funkcja $f_C(t)$ przestaje być sinusoidą, dlatego należy zmodyfikować znaną dotychczas definicję częstotliwości. Wprowadźmy zatem nową wielkość i zdefiniujmy ją jako *częstotliwość chwilową*. Wielkość ta powinna być tak zdefiniowana, aby w każdym przypadku dawała wynik zgodny z prawdą (czyli nie tylko przy zmianach częstotliwości ω w czasie ale również przy jej stałej wartości).

Zatem dla danej funkcji:

$$f(t) = A\cos\theta(t)\text{, gdzie}$$

A – stała

$\theta(t)$ - argument funkcji cosinus (który może być również uważany za jej fazę)

częstotliwość chwilowa jest określona jako *pochodna* funkcji $\theta(t)$ względem czasu. Należy zauważyć, że tak skonstruowana definicja częstotliwości chwilowej jest bardzo uniwersalna, ponieważ praktycznie dowolną funkcję czasu można przedstawić w postaci $f(t) = A\cos\theta(t)$, podstawiając $\theta(t) = \arccos[f(\frac{t}{A})]$. Częstotliwość chwilową będziemy oznaczać wzorem $\omega_i(t)$ i obliczać zgodnie z definicją jako:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

Przykładowo przedstawione są poniżej częstotliwości chwilowe dla różnych funkcji:

Funkcja	*Częstotliwość chwilowa [rad/s]*
$f(t) = A\cos 3t$	$\omega_i(t) = 3$
$f(t) = A\cos(5t + 9)$	$\omega_i(t) = 5$
$f(t) = A\cos(te^{-t})$	$\omega_i(t) = e^{-t} - te^{-t}$

Przy modulacji częstotliwościowej moduluje się (zmienia) częstotliwość $\omega_i(t)$ zgodnie z sygnałem modulującym $f_m(t)$, podobnie jak w przypadku modulacji amplitudowej, gdzie modulowano tym sygnałem amplitudę A. Dla zwiększenia skuteczności transmisji należy przesunąć częstotliwości określane przez $f_m(t)$ w wyższe zakresy, czyli w pobliże ω_C. Odpowiada to wprowadzeniu stałej ω_C do wyrażenia opisującego $\omega_i(t)$. Należy zauważyć, że w przypadku modulacji częstotliwościowej nie ma tłumienia fali nośnej jak przy modulacji amplitudowej, czyli amplituda fali nośnej nie ulega zmianie.

Można zatem przedstawić $\omega_i(t)$ w następującej postaci:

$$\omega_i(t) = \omega_C + k_f f_m(t) \text{, gdzie}$$

ω_C oraz k_f są stałymi.

Dla danej częstotliwości chwilowej $\omega_i(t)$ postać przesyłanego przebiegu możemy określić następująco:

$$f_{FM}(t) = A\cos\theta(t)$$

przy czym (zgodnie z definicją):

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_i(\tau)d\tau = \omega_C t + k_f \int_0^t f_m(\tau)d\tau$$

przy założeniu $\omega(0) = 0$.

Ostatecznie przebieg zmodulowany ma postać:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f \int_0^t f_m(\tau)d\tau\right]$$

Przy czym stałą całkowania przyjęto równą zeru, ponieważ reprezentuje dowolne opóźnienie czasowe nie mające charakteru zniekształcenia. Należy zauważyć, że dla sygnału modulującego $f_m(t) = 0$ sygnał zmodulowany $f_{FM}(t)$ jest sinusoidą, co nie byłoby prawdą gdyby we wzorze na częstotliwość chwilową nie było składnika ω_C.

Gdy po raz pierwszy badano modulację częstotliwościową, stwierdzono, że częstotliwość funkcji $f_{FM}(t)$ zmienia się od wartości $\omega_C - k_f[\min f_m(t)]$ do wartości $\omega_C + k_f[\max f_m(t)]$. Zatem można by stwierdzić, że zmniejszając dowolnie stałą k_f można utrzymać częstotliwość funkcji zmodulowanej $f_{FM}(t)$ dowolnie blisko wartości ω_C. Mogłoby to prowadzić do znacznych oszczędności pasma bez stosowania technik typu SSB. Niestety takie rozumowanie jest całkowicie błędne, ponieważ można wykazać, że transformata Fouriera sygnału o częstotliwości chwilowej zmieniającej się od ω_1 do ω_2 nie jest ograniczona do zakresu częstotliwości między ω_1 i ω_2. Nie należy w tym miejscu mylić częstotliwości chwilowej z częstotliwością w transformacie Fouriera.

W zależności od parametru k_f modulację częstotliwości możemy podzielić na wąskopasmową (małe wartości stałej k_f) oraz modulację szerokopasmową (większe wartości k_f).

1. Wąskopasmowa modulacja częstotliwości

Ogólna postać fali zmodulowanej częstotliwościowo jest następująca:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f \int_0^t f_m(\tau)d\tau\right]$$

Dla uproszczenia możemy zdefiniować następującą zależność:

$$g(t) = \int_0^t f_m(\tau)d\tau$$

w związku z tym otrzymamy:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f g(t)\right]$$

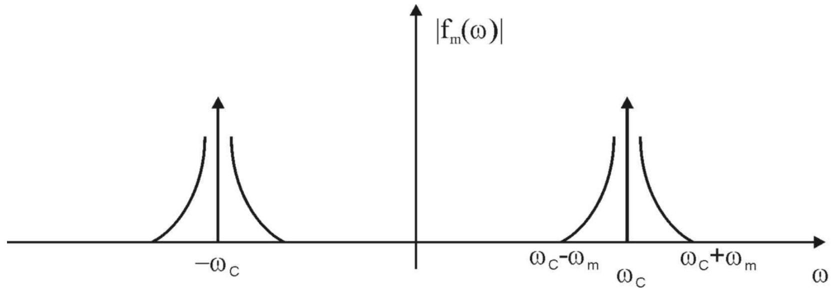
Ze wzoru na cosinus sumy kątów możemy w/w wyrażenie zapisać jako:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f g(t)\right] = A\cos\omega_C t\cos k_f g(t) - A\sin\omega_C t\sin k_f g(t)$$

Jeżeli k_f jest na tyle małe, że $k_f g(t)$ jest zawsze dużo mniejsze od jedności (mała wartość stałej k_f determinuje modulację wąskopasmową) to cosinus iloczynu $k_f g(t)$ jest równy w przybliżeniu jedności a sinus wartości argumentu wyrażonego w radianach. Po takim przybliżeniu otrzymujemy:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f g(t)\right] = A\cos\omega_C t\cos k_f g(t) - A\sin\omega_C t\sin k_f g(t) \approx$$
$$\approx A\cos\omega_C t - A g(t) k_f \sin\omega_C t$$

Ostatnie wyrażenie jest wzorem matematycznym opisującym wąskopasmową modulację częstotliwościową. Jeżeli założymy, że funkcja modulująca $f_m(t)$ ma widmo ograniczone do częstotliwości mniejszych niż ω_m to funkcja $g(t)$ też będzie miała widmo ograniczone do tych częstotliwości. Można wykazać, że transformata takiego sygnału będzie wyglądała w sposób następujący (rys. 1):



Rysunek 1. Widmo wąskopasmowego sygnału zmodulowanego częstotliwościowo

Jak widać z rysunku 1 transformata sygnału zmodulowanego będzie osiągać nieskończoność dla $G(\omega)$ (będącej transformatą funkcji $g(t)$) równej zeru. Nie jest to kłopotliwe, ponieważ odpowiadająca jej funkcja czasu $f_{FM}(t)$ jest funkcją ograniczoną. Należy natomiast zauważyć dwie istotne rzeczy: po pierwsze widać, że częstotliwości składowe sygnału informacyjnego można przesunąć w dowolne miejsce (np. w zakres odpowiednio wysokich częstotliwości) celem umożliwienia skutecznej transmisji sygnału, a po drugie widać, że widmo sygnału zmodulowanego częstotliwościowo jest widmem ograniczonym na osi częstotliwości, zatem stosując wiele częstotliwości nośnych oddalonych od siebie o co najmniej $2\omega_m$ jesteśmy w stanie przesłać wiele sygnałów jednocześnie. Z tych rozważań wynika, że spełnione są podstawowe dwa kryteria schematu modulacji: 1-umożliwienie skutecznej transmisji radiowej (w wysokich częstotliwościach) oraz 2-zwielokrotniania sygnałów informacyjnych. Trzecie kryterium mówiące o możliwości jednoznacznego odtworzenia sygnału informacyjnego jest również spełnione, ale zostanie to opisane w dalszej części.

2. Szerokopasmowa modulacja częstotliwości

Jeżeli stała k_f nie jest na tyle mała, żeby przybliżenie funkcji sinus i cosinus było słuszne to wtedy występuje tzw. *szerokopasmowa* modulacja częstotliwościowa. Przesyłany sygnał ma postać określoną uprzednio tzn.:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f g(t)\right]$$

Gdybyśmy znali funkcję $g(t)$ to moglibyśmy znaleźć transformatę Fouriera przebiegu zmodulowanego częstotliwościowo. Należałoby po prostu oszacować $F_{FM}(\omega)$ według definicji przekształcenia. Jednakże rozważając przypadek ogólny, gdzie funkcja modulująca $f_m(t)$ może mieć dowolny kształt i wiemy o niej tylko tyle, że ma widmo ograniczone do częstotliwości poniżej ω_m (i wiemy, że $g(t)$ też ma tak samo ograniczone widmo) to nie jesteśmy w stanie znaleźć transformaty Fouriera fali zmodulowanej częstotliwościowo. Zatem dla modulacji częstotliwościowej nie jest prawdziwe to, co zachodzi dla modulacji amplitudowej, gdzie transformata przebiegu zmodulowanego jest w prosty sposób związana z transformatą sygnału informacyjnego. Jeżeli wykazalibyśmy teraz, że w przypadku ogólnym transformata sygnału zmodulowanego $F_{FM}(\omega)$ będzie ograniczona i zajmie pasmo częstotliwości od ω_1 do ω_2 nawet bez znajomości dokładnej jej postaci to udowodnilibyśmy, że można skutecznie przesłać sygnał zmodulowany częstotliwościowo i zwielokrotnić liczbę kanałów. Nie jest to zadanie proste, ponieważ dla ogólnego przypadku nie jest możliwe ani znalezienie postaci transformaty sygnału zmodulowanego częstotliwościowo ani nawet zakresu zajmowanego przez ten sygnał w dziedzinie częstotliwości, można to jedynie oszacować.

Na początku dla uproszczenia można założyć, że sygnałem informacyjnym $f_m(t)$, czyli modulującym jest sinusoida. Zatem zakładając, że:

$$f_m(t) = a\cos\omega_m t \text{ , gdzie}$$

a – jest stałą amplitudą sygnału modulującego, natomiast
ω_m – jest stałą częstotliwością sygnału modulującego
otrzymamy wzór na częstotliwość chwilową:

$$\omega_i(t) = \omega_C + k_f f_m(t) = \omega_C + ak_f \cos\omega_m t$$

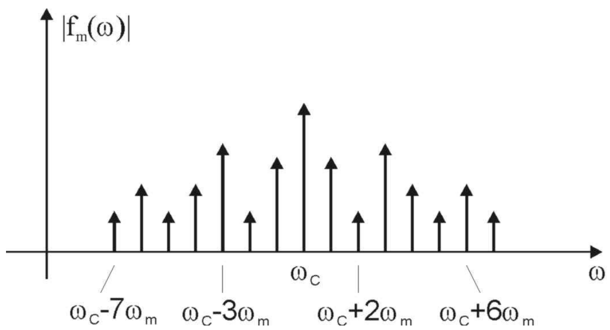
oraz wzór na postać sygnału zmodulowanego:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + \frac{ak_f}{\omega_m}\sin\omega_m t\right]$$

wprowadźmy jako definicję następujące oznaczenie:

$$\beta = \frac{ak_f}{\omega_m}$$

Okazuje się, że transformata Fouriera tak zmodulowanego częstotliwościowo sygnału ma składowe częstotliwościowe odległe o ω_m wzdłuż całej dziedziny częstotliwości tak jak to zostało przedstawione na rysunku 2.



Rysunek 2. Widmo szerokopasmowego sygnału zmodulowanego częstotliwościowo przy jednotonowym sygnale modulującym

Niestety poszczególne składowe częstotliwości w widmie nie są równe zeru wraz z oddalaniem się od częstotliwości nośnej ω_C. Znaczy to, że jeden sygnał zmodulowany częstotliwościowo zajmuje całe widmo częstotliwości. Oczywiście jest to niedopuszczalne, jeśli chcemy dokonać zwielokrotnienia częstotliwości.

Jednakże dla ustalonej wartości współczynnika β poszczególne składowe widma dążą do zera wraz ze wzrostem ich „odległości" od częstotliwości ω_C. Znaczy to, że jeśli przyjmiemy za równe zeru wszystkie składowe widma począwszy od pewnego momentu (np. od wartości $\omega_C + 20\omega_m$) to otrzymamy ograniczone pasmo fali zmodulowanej częstotliwościowo. Powstaje zatem pytanie jaki należy dobrać poziom poniżej którego będziemy uważać daną składową częstotliwościową za nieistotną. Oczywiście bez względu na to jak mały poziom wybierzemy, pomijając wszystkie składowe poniżej tego poziomu, zniekształcimy przebieg. Mówiąc inaczej proponujemy „odcięcie ogonów transformaty” w celu uzyskania przebiegu zmodulowanego o ograniczonym paśmie. Jaką część ogona możemy odciąć, aby wynik nie był zbyt zniekształcony?

Odpowiedź na to pytanie powinna zależeć od przewidywanego zastosowania. Przy przesyłaniu muzyki o wysokiej jakości należy być bardziej ostrożnym, niż przy przekazywaniu zwykłej rozmowy. Odpowiedź można uzyskać tylko w sposób praktyczny. Należy wstępnie postanowić jakie częstotliwości należy obciąć i przepuścić sygnał przez filtr pasmowy, który je obcina. Porównując sygnał na wyjściu z filtru z sygnałem wejściowym należy stwierdzić, czy jest on do przyjęcia. Skuteczność tego zabiegu można stwierdzić posiadając odbiornik radiowy z modulacją częstotliwościową (FM). Pasma stacji nadawczych zostały sztucznie ograniczone w omawiany sposób, lecz jakość dźwięku jest wystarczająca dla ludzkiego słuchu.

Przy określaniu żądanej szerokości pasma musimy wziąć pod uwagę dwa czynniki pierwszy to tzw. poziom istotności, rozgraniczający amplitudy składowych widma (np. z rysunku 2), które mają znaczenie od tych które nie mają znaczenia (na przykład można założyć, że amplitudy mniejsze niż 1% amplitudy niezmodulowanej fali nośnej nie są brane pod uwagę). Drugi to wartość współczynnika β od którego zależy rozkład i wielkość poszczególnych amplitud we widmie. Okazuje się, że dla bardzo małych i bardzo dużych wartości β liczba składowych znaczących nie zależy zbyt silnie od przyjętego poziomu istotności. Poziom istotności wpływa znacznie na szerokość pasma jedynie w środkowym zakresie wartości β. Interesujące jest to, ze dla małej wartości β szerokość pasma jest równa $2\omega_m$ a dla bardzo dużych wartości β jest równa $2\beta\omega_m$. Ponieważ $\beta = ak_f / \omega$ bardzo małe wartości odpowiadają małej wartości k_f, a więc modulacji wąskopasmowej. W tym przypadku szerokość pasma $2\omega_m$ jest zgodna z wartością znalezioną poprzednio przy użyciu przybliżenia trygonometrycznego.

Dogodnie byłoby dysponować ogólną regułą określania szerokości pasma sygnału zmodulowanego częstotliwościowo w funkcji β i częstotliwości sygnału informacyjnego ω_m. Jedną z takich reguł zaproponował John Carson (jeden z pierwszych badaczy modulacji częstotliwościowej w 1922r.). Została ona powszechnie przyjęta ze względu na swoją skuteczność. Według tej reguły szerokość pasma BW_{FM} (Band Width) sygnału zmodulowanego częstotliwościowo jest wyrażona następującą przybliżoną zależnością:

$$BW_{FM} \approx 2(\beta\omega_m + \omega_m)$$

Widać, że zgodnie z tą regułą szerokość pasma dla dużych wartości β jest w przybliżeniu równa $2\beta\omega_m$, natomiast dla małych β zgodnie z oczekiwaniami jest równa $2\omega_m$. Ponieważ

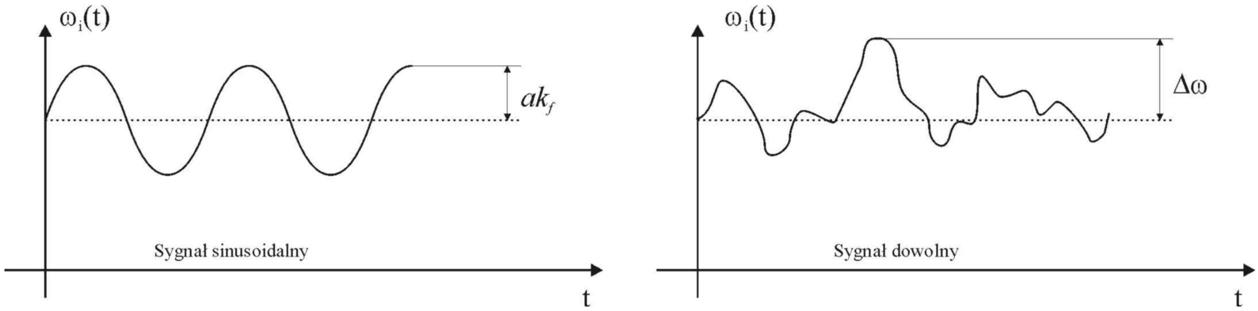
$$\beta = \frac{ak_f}{\omega}$$

to regułę Carsona można zapisać również jako:

$$BW_{FM} \approx 2(ak_f + \omega_m)$$

Jak widać z powyższych obliczeń oszacowana została szerokość pasma zajmowanego przez sygnał zmodulowany częstotliwościowo przy pomocy jednotonowego sygnału modulującego (sinusoidy). Niestety zależność ta nie jest precyzyjna w przypadku ogólnym, kiedy sygnał modulujący nie jest falą sinusoidalną. Można by powiedzieć, że skoro każdą funkcję $f_m(t)$ można przedstawić w przybliżeniu jako sumę sinusoid, to wystarczy zsumować transformaty poszczególnych sinusoid. Nie jest to prawdą, ponieważ funkcja $\cos\left[\omega_C t + k_f(g_1(t) + g_2(t))\right]$ nie równa się sumie funkcji $\cos\left[\omega_C t + k_f g_1(t)\right] + \cos\left[\omega_C t + k_f g_2(t)\right]$. Znaczy to, że fala zmodulowana częstotliwościowo dwoma sygnałami informacyjnymi nie jest suma odpowiadających im dwóch przebiegów zmodulowanych. Właściwość tę nazywa się niekiedy „modulacją nieliniową”.

Skoro znamy już sposób na oszacowanie szerokości pasma w przypadku modulacji jednotonowej to należałoby znaleźć zależność, która miałaby zastosowanie do modulującego sygnału informacyjnego w postaci ogólnej. Aby to zrobić należy przyjrzeć się poszczególnym składnikom występującym w regule Carsona i odpowiedzieć na pytanie, jaką one mają interpretację fizyczną w stosunku do sygnału informacyjnego. Częstotliwość ω_m jest oczywiście największą składową częstotliwościową tego sygnału, a w przypadku pojedynczej sinusoidy jedyną. W rzeczywistości można oczekiwać, że szerokość pasma przebiegu zmodulowanego będzie zależeć od największej częstotliwości sygnału informacyjnego $f_m(t)$. Składnik ak_f reprezentuje maksymalne odchylenie częstotliwości $\omega_i(t)$ od $\omega_C(t)$. Rysując przebieg $\omega_i(t)$ możemy określić *maksymalną dewiację częstotliwości* jako największą wartość, o jaką $\omega_i(t)$ odchyla się od stałej wartości $\omega_C(t)$ (rysunek 3).



Rysunek 3. Definicja maksymalnej dewiacji częstotliwości dla sygnału sinusoidalnego oraz dla sygnału dowolnego

Przypomnijmy, że dla sinusoidalnej fali modulującej $f_m(t)$, określiliśmy częstotliwość chwilową jako:

$$\omega_i(t) = \omega_C + k_f f_m(t) = \omega_C + ak_f \cos \omega_m t$$

Maksymalna dewiacja częstotliwości $\Delta\omega$ dla *dowolnego sygnału* $f_m(t)$, jest zdefiniowana następująco:

$$\Delta\omega = \max[\omega_i(t) - \omega_C] = \max\lfloor\omega_C + k_f f_m(t) - \omega_C\rfloor = \max\lfloor k_f f_m(t)\rfloor$$

Obecnie możemy przekształcić regułę Carsona do przypadku ogólnego:

$$BW_{FM} \approx 2(\Delta\omega + \omega_m)$$

Tak przekształcona reguła jest słuszna nie tylko dla pojedynczego sinusoidalnego sygnału modulującego, ale również dla sygnału modulującego będącego dowolną funkcją czasu.

Można podać intuicyjną interpretację przedstawionej zależności. Jeżeli $\Delta\omega$ jest dużo większe od ω_m (szerokopasmowa modulacja częstotliwości), to częstotliwość nośna zmienia się znacznie, lecz względnie wolno. Znaczy to, że jej wartość chwilowa przechodzi bardzo powoli od ω_C-$\Delta\omega$ do ω_C+$\Delta\omega$. W dostatecznie krótkim odcinku czasu stanowi ona przybliżenie fali sinusoidalnej. Możemy w przybliżeniu uważać przebieg za sumę wielu fal sinusoidalnych o częstotliwościach z podanego przedziału. Zatem transformata Fouriera jest w przybliżeniu superpozycją transformaty wszystkich sinusoid odpowiadających temu przedziałowi częstotliwości. Dlatego rozsądne będzie założenie, że jej szerokość pasma jest w przybliżeniu równa szerokości tego przedziału częstotliwości, tj. $2\Delta\omega$. Jednakże dla bardzo małych wartości $\Delta\omega$ częstotliwość nośna zmienia się względnie szybko w bardzo małym zakresie częstotliwości. W przybliżeniu można uważać, że zmiany te wywołane są poprzez dwa generatory o częstotliwościach ω_C-$\Delta\omega$ oraz ω_C+$\Delta\omega$ załączane naprzemiennie z dużą częstotliwością równą dokładnie częstotliwości ω_m. Tak interpretowany sygnał zachowuje się analogicznie jak modulacja amplitudy gdzie częstotliwości generatorów stanowią dwie lezące obok siebie częstotliwości nośne natomiast częstotliwość załączania ω_m jest dla nich częstotliwością modulującą. Widma tonu modulującego rozkładają się po obu bokach każdej z częstotliwości nośnych. Pasmo takiego sygnału zajmowane jest od wartości $(\omega_C$-$\Delta\omega)-\omega_m$ do $(\omega_C$+$\Delta\omega)+\omega_m$. Jak widać dla małych wartości $\Delta\omega$ szerokość pasma jest równa $2\omega_m$, co jest zgodne z regułą Carsona dla przypadku ogólnego.

Powinno być oczywiste, że szerokość pasma fali zmodulowanej częstotliwościowo zwiększa się wraz ze wzrostem k_f. Wydaje się zatem, że nie ma powodu, aby nie używać małych k_f (wąskopasmowej modulacji częstotliwościowej) skoro powoduje to zmniejszenie szerokości pasma. Okazuje się jednak, ze duże wartości współczynnika k_f powodują wzrost skuteczności tłumienia szumów, co można udowodnić na drodze matematycznej. Można w związku z tym stwierdzić, że przewaga modulacji częstotliwościowej nad amplitudową polega na możliwości stłumienia niepożądanych szumów.

3. Modulatory

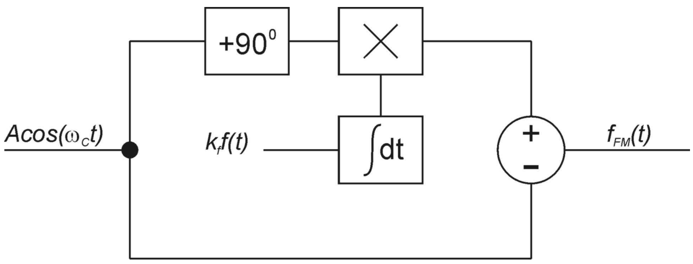
Jak zostało wykazane powyżej transformata wąskopasmowego i szerokopasmowego przebiegu zmodulowanego częstotliwościowo ma widmo ograniczone do pewnego zakresu częstotliwości wokół częstotliwości nośnej ω_c. Zatem spełnione są pierwsze dwa kryteria modulacji, czyli możemy przesłać skutecznie sygnały informacyjne dobierając odpowiednio wysoką częstotliwość nośną oraz można dokonywać zwielokrotniania z podziałem częstotliwości wielu oddzielnych sygnałów, przy założeniu, ze sąsiednie częstotliwości są odpowiednio odległe, tak że transformaty przebiegów zmodulowanych częstotliwościowo nie nakładają się.

Należy teraz tylko przedstawić sposoby generowania sygnału zmodulowanego częstotliwościowo oraz sposoby odtwarzania sygnału informacyjnego z odebranego przebiegu.

W przypadku modulacji wąskopasmowej przebieg zmodulowany częstotliwościowo można zapisać zgodnie z wyprowadzoną wcześniej zależnością trygonometryczną:

$$f_{FM}(t) = A\cos\omega_C t - Ag(t)k_f \sin\omega_C t$$

Przy czym *g(t)* jest całką sygnału informacyjnego. Odpowiedni schemat blokowy modulatora wąskopasmowego przedstawiony jest na rysunku 4.



Rysunek 4. Układ wąskopasmowego modulatora częstotliwości

Zauważmy, że w celu uzyskania sygnału szerokopasmowego sygnał wyjściowy z tego modulatora (poddany modulacji wąskopasmowej) można przepuścić przez układ, który mnoży wszystkie składowe częstotliwościowe sygnału wejściowego przez stałą. Jeżeli wszystkie składowe sygnału

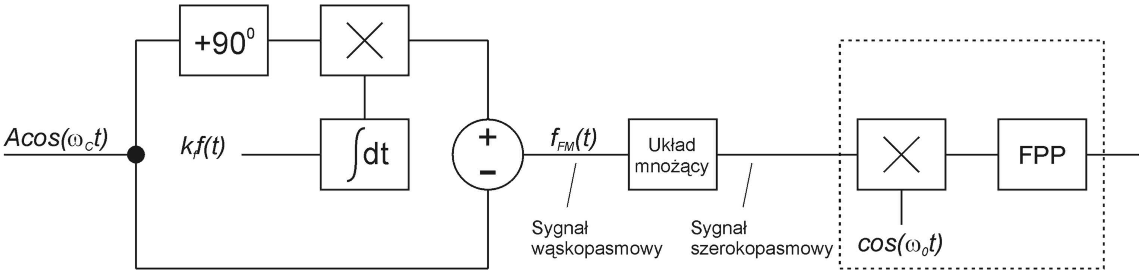
$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f g(t)\right]$$

o częstotliwości chwilowej $\omega_i(t) = \omega_C t + k_f f_m(t)$ pomnożymy, przez stałą C, to otrzymamy nową falę zmodulowaną częstotliwościowo o częstotliwości chwilowej:

$$\omega_i(t) = C\omega_C t + Ck_f f_m(t)$$

Maksymalna dewiacja częstotliwości tego przebiegu jest C krotnie większa od dewiacji przebiegu poprzedniego. Maksymalna częstotliwość sygnału informacyjnego (za jaki można uważać zmodyfikowany przebieg $Cf_m(t)$) jest nadal równa ω_m. Znaczy to, że częstotliwość zmienia się tak samo szybko jak częstotliwość sygnału wąskopasmowego, choć zajmuje wielokrotnie szersze pasmo. Dobierając zatem dostatecznie dużą stałą C, można otrzymać na tyle dużą dewiację częstotliwości, aby przebieg wynikowy nazwać szerokopasmowym.

Można to łatwo przedstawić w dziedzinie częstotliwości. Jeżeli przebieg pierwotny jest wąskopasmowy to zajmuje pasmo o szerokości równej w przybliżeniu $2\omega_m$ wokół częstotliwości ω_c (rysunek 1). Jeżeli wszystkie częstotliwości pomnożymy przez C, to nowy przebieg zajmie pasmo od $C(\omega_C-\omega_m)$ do $C(\omega_C+\omega_m)$. Jeżeli szerokość nowego pasma jest dużo większa od $2\omega_m$ (tzn. C jest dużo większe od jedności) to nowy przebieg należy uznać za szerokopasmowy. przedstawiona została zatem technika uzyskiwania sygnałów szerokopasmowych z sygnałów wąskopasmowych. odpowiedni modulator częstotliwości przedstawiono na rysunku 5 poniżej.



Rysunek 5. Układ szerokopasmowego modulatora częstotliwości

W praktyce zamiast układu podwajania częstotliwości można zastosować układ podnoszący do kwadratu. wynika to z tożsamości trygonometrycznej:

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$$

Zauważmy, ze układ mnożenia częstotliwości zwiększa szerokość pasma fali zmodulowanej częstotliwościowo, lecz także zwiększa nośną. jeżeli z jakiegoś powodu nie chcemy zwiększać częstotliwości nośnej do wartości $C\omega_C$, to musimy zastosować standardową technikę mnożenia przez falę cosinusoidalną i technikę filtracji pasmowej, aby przesunąć całe widmo w dowolne miejsce osi częstotliwości (podobnie jak w procesie spójnej demodulacji amplitudowej). Takie przesunięcie nie zmieni szerokości pasma przebiegu, który pozostanie szerokopasmowym. Układ przesuwający zaznaczony jest linią przerywaną na rysunku 5.

Należy zdawać sobie sprawę, że współczesne nadajniki sygnału FM są urządzeniami rozbudowanymi łączącymi w sobie cechy wysokiej wydajności, jakości i sprawności. Najczęściej są to specjalizowane układy konstruowane do określonego zastosowania.

4. Demodulatory

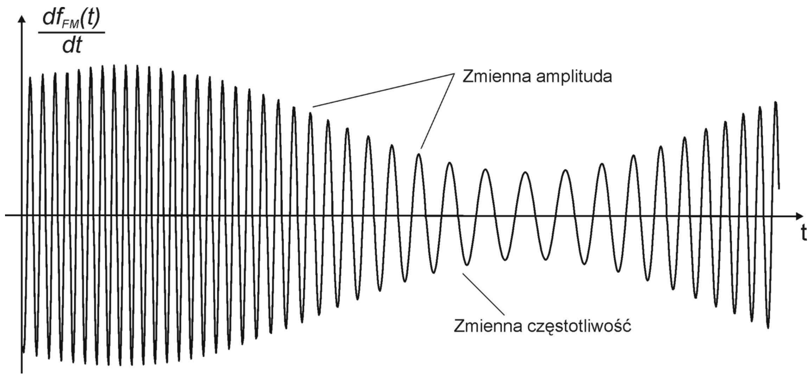
Zagadnienie demodulacji sygnału zmodulowanego częstotliwościowo można przedstawić w następujący sposób. Dla funkcji $f_{FM}(t)$ określonej w postaci ogólnej:

$$f_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f \int_0^t f_m(\tau)d\tau\right]$$

Należy odtworzyć sygnał informacyjny $f_m(t)$. Ponieważ nie znamy dokładnej transformaty Fouriera takiego sygnału (mamy tylko ogólne dane o zakresie zajmowanych częstotliwości przez sygnał) całą analizę należy przeprowadzić w dziedzinie czasu. różniczkując przebieg zmodulowany częstotliwościowo, otrzymamy funkcje:

$$\frac{df_{FM}(t)}{dt} = -A(\omega_C + k_f f_m(t))\sin\left[\omega_C t + k_f \int_0^t f_m(\tau)d\tau\right]$$

Taka pochodna dla dowolnej funkcji $f_m(t)$ może wyglądać w następujący sposób:

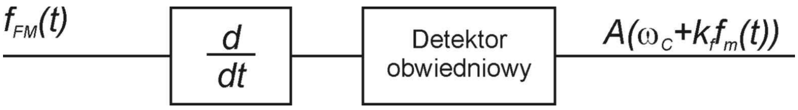


Rysunek 6. Pochodna przebiegu zmodulowanego częstotliwościowo

Jeżeli częstotliwość chwilowa części sinusoidalnej przebiegu wyrażonego równaniem opisującym pochodną przebiegu zmodulowanego jest zawsze dużo większa od ω_m (co zwykle występuje w praktyce) to obszar ograniczony z obu stron amplitudą sygnału użytecznego jest wypełniony przez sygnał nośny. W rzeczywistości częstotliwość nośna jest dużo większa niż częstotliwość zmian obwiedni sygnału z rysunku 6. Chociaż częstotliwość nośna nie jest stała to obwiednię sygnału określa zależność:

$$| A(\omega_C + k_f f_m(t)) |$$

Można, w związku z tym, użyć układu znanego z demodulacji amplitudowej zbudowanego na bazie detektora obwiedniowego. Niewielkie zmiany częstotliwości nośnej nie będą zauważalne przez detektor obwiedniowy. Układ do demodulacji sygnału zmodulowanego częstotliwościowo będzie wyglądał jak na rysunku 7 poniżej:

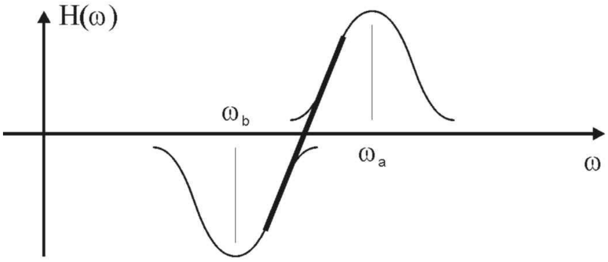


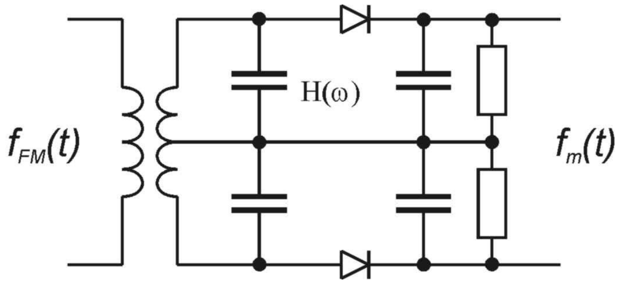
Rysunek 7. Demodulator sygnału zmodulowanego częstotliwościowo

Demodulator przedstawiony na rysunku 7 będzie działał [oprawnie zarówno dla sygnału wąskopasmowego jak i dla sygnału szerokopasmowego. Ponieważ z matematycznego punktu widzenia amplituda sygnału wyjściowego z układu różniczkującego jest liniowo zależna od częstotliwości sygnału wejściowego to układ różniczkujący zmienia charakter modulacji z częstotliwościowej na amplitudową. Tak wykorzystywany układ różniczkujący nazywa się często *dyskryminatorem.*

W praktyce nie ma potrzeby konstruowania układu różniczkującego. Do zmiany charakteru modulacji z częstotliwościowego na amplitudowy można użyć dowolnego układu o transmitancji w przybliżeniu zależnej liniowo od częstotliwości w interesującym nas zakresie. Nawet filtr pasmowo przepustowy może więc działać jako dyskryminator, jeżeli charakterystyka robocza stanowi zbocze narastające lub opadające (w prawie liniowym zakresie). Za filtrem należy umieścić detektor obwiedni. Ciekawostką jest fakt, że do odbioru sygnałów zmodulowanych częstotliwościowo można zastosować radioodbiornik przeznaczony do pracy w systemie modulacji amplitudowej po pewnych przeróbkach i dostrojeniu.

Na rysunku 8 przedstawiono schemat obwodu demodulatora działającego według tej zasady tylko, że zastosowano tam dwa filtry poprawiające liniowość dyskryminatora. W tym przypadku liniowość charakterystyki filtru poprawia się poprzez skonstruowanie układu z dwoma filtrami o przesuniętych charakterystykach w taki sposób, ze jedną charakterystykę odejmuje się od drugiej. Znaczy to, ze korzystamy z sygnału stanowiącego różnicę sygnałów wyjściowych dwóch filtrów pasmowo-przepustowych o różnych częstotliwościach środkowych. Górna część obwodu z rysunku 8 (złożona z połowy uzwojenia transformatora i z kondensatora w układzie filtrującym) dostrojona jest do częstotliwości ω_a natomiast dolna do częstotliwości ω_b. Reszta układu to dwa detektory obwiedniowe.





Rysunek 8. Demodulator częstotliwościowy liniowy

W praktyce korzysta się jeszcze z układów pracujących w oparciu o zasadę zliczania impulsów prostokątnych (po konwersji sygnału $f_{FM}(t)$ na ciąg impulsów prostokątnych), oraz z układów zbudowanych w oparciu o zamkniętą pętlę fazową PLL.

III. ZADANIA DO WYKONANIA:

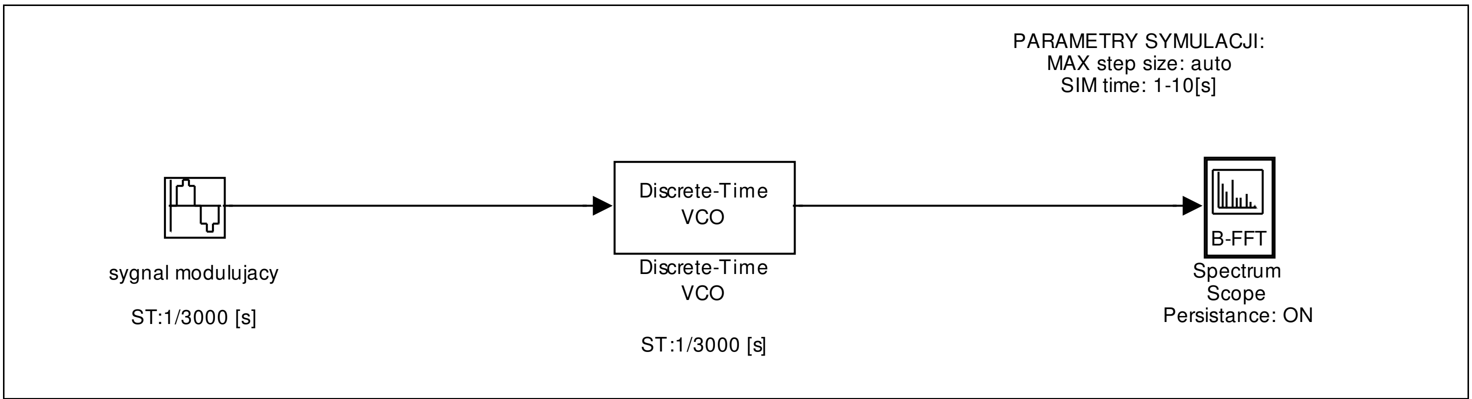
1. ANALIZA MATEMATYCZNA SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH CZĘSTOTLIWOŚCIOWO

Obliczyć i wypisać w tabeli częstotliwości chwilowe następujących funkcji:

1.	$f(t) = 5\cos(20t + \sin 4t)$
2.	$f(t) = \cos(t + \sin 3t + 10)$
3.	$f(t) = 10\sin(2t^2 + \cos 2t + 3)$
4.	$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{gdy} \quad t < 1 \\ \cos 3t & \text{gdy} \quad 1 \le t < 3 \\ \cos 5t & \text{gdy} \quad 3 \le t \end{cases}$

- Dla każdej z wyżej wymienionych funkcji wykreślić przebieg czasowy obliczonej częstotliwości chwilowej w SIMULINKU konstruując prosty układ realizujący obliczoną funkcję matematyczną i przedstawiający jej przebieg w funkcji czasu na oscyloskopie.
- Skonstruowany układ wraz z wynikowym przebiegiem czasowym umieścić w sprawozdaniu. Długość czasu trwania przebiegu widzianego na oscyloskopie dobrać w zależności od wykreślanej funkcji w taki sposób, aby był on czytelny (np. dla przypadku 4 czas powinien wynosić $0<t_{SYM}<4$ [s]).

Uruchomić oprogramowanie MATLAB, a następnie uruchomić pakiet SIMULINK. Skonstruować układ do generowania sygnału zmodulowanego częstotliwościowo jak pokazano na rysunku 9 poniżej:



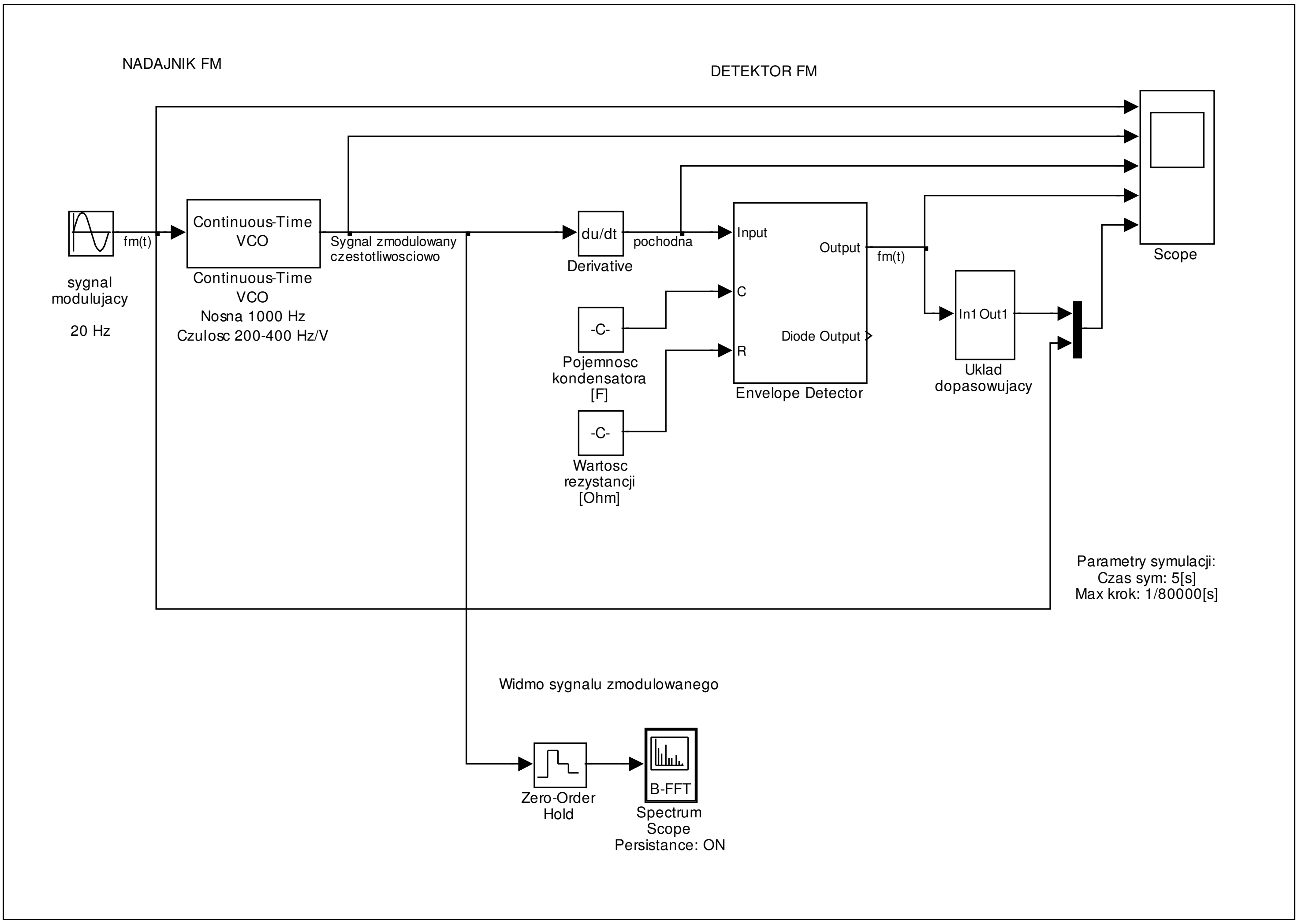
Rysunek 9. Układ generowania sygnału zmodulowanego częstotliwościowo.

- Dla podanych poniżej parametrów sygnału modulującego i nośnego obliczyć szerokość pasma zajmowanego przez sygnał zmodulowany $\boldsymbol{BW_{FM}}$ oraz obliczyć zakres częstotliwości zajętych przez sygnał zmodulowany (czyli od jakiej minimalnej do jakiej maksymalnej częstotliwości pasmo jest zajęte).
- Dobierając odpowiednie parametry układu sprawdzić wynik obliczony z wynikiem przedstawionym na analizatorze widma. Uzyskane wyniki obliczeń zestawić w tabeli oraz dołączyć uzyskane widma. *Uwaga: należy zachować poprawność jednostek wpisywanych do bloków: [Hz]; [rad/s]!*
- Wypisać, które parametry układu w SIMULINKU odpowiadają parametrom: a, w_m, w_c, k_f przebiegów.

1.	$f_m(t) = 10\cos(5t)$	$\omega_C = 5000[rad/s]$ - częstotliwość fali nośnej $k_f = 10$ - stały współczynnik
2.	$f_m(t) = 5\cos(10t)$	
3.	$f_m(t) = 100\cos(1000t)$	

2. DETEKCJA Z UŻYCIEM DEMODULATORA RÓŻNICZKUJĄCEGO I DETEKTORA OBWIEDNI

Skonstruować układ do testowania przesyłu informacji przy użyciu systemów modulacji częstotliwościowej jak pokazano na rysunku 10.

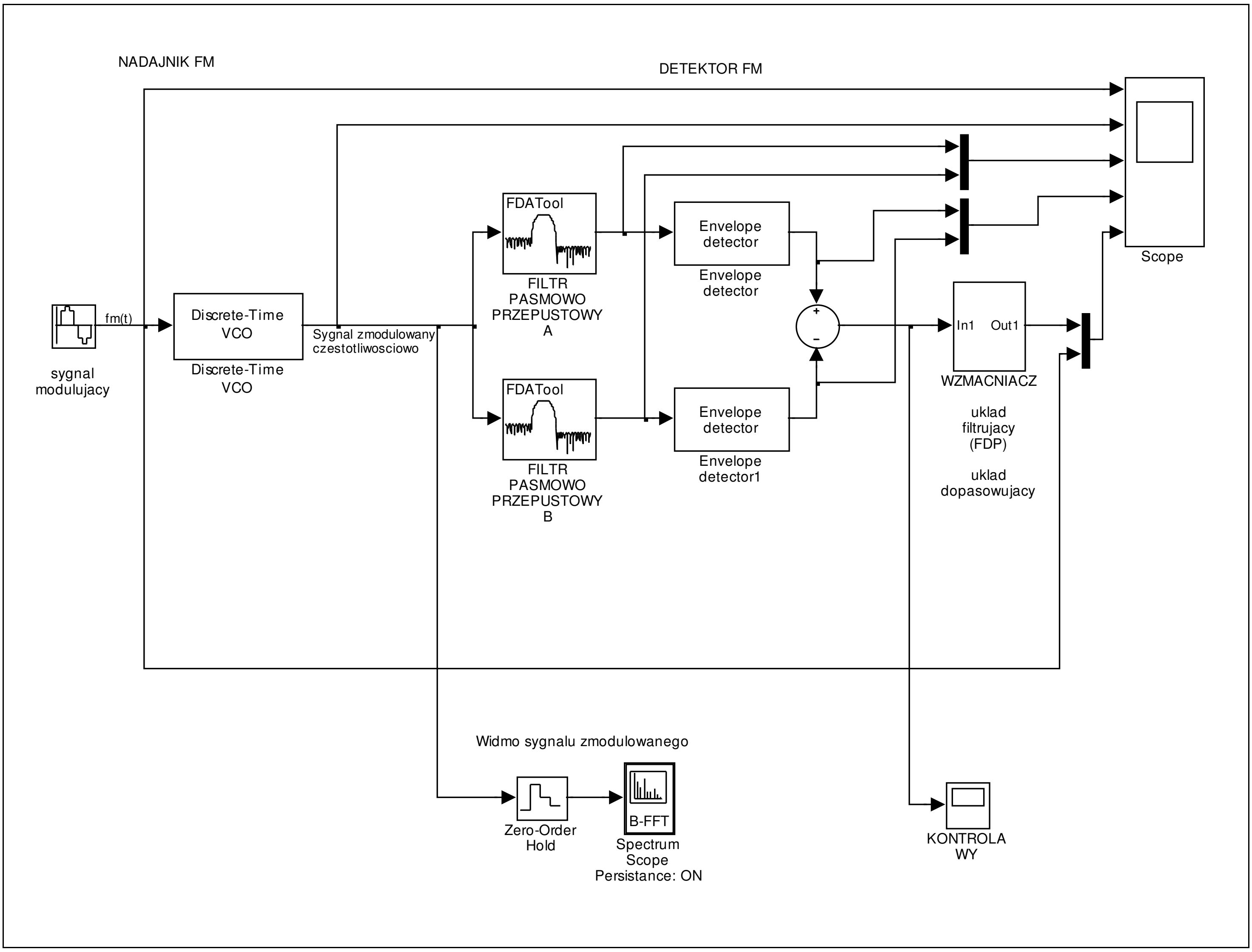


Rysunek 10. Układ do demodulacji częstotliwościowej z użyciem układu różniczkującego i detektora

- Dobrać odpowiednie parametry układu i uruchomić symulację
- Dostroić detektor obwiedniowy tak, aby dobrze znajdował obwiednię sygnału zróżniczkowanego
- Wykreślić przebiegi czasowe na poszczególnych etapach modulacji i demodulacji.
- Wykreślić przebiegi widma częstotliwościowego sygnału w trakcie modulacji częstotliwościowej.
- Dla nastawionych parametrów układu obliczyć zajmowane pasmo częstotliwości i porównać je z wynikiem otrzymanym na analizatorze widma.
- Przeprowadzić taki sam proces modulacji i demodulacji, ale z użyciem dowolnego dwutonowego sygnału informacyjnego. Przedstawić na wykresie widma jak zmieniło się pasmo zajmowane przez sygnał zmodulowany.

3. DETEKCJA Z UŻYCIEM FILTRÓW PASMOWYCH W UKŁADZIE LINIOWYM

Skonstruować układ do detekcji sygnału zmodulowanego częstotliwościowo jak pokazano na rysunku 11.

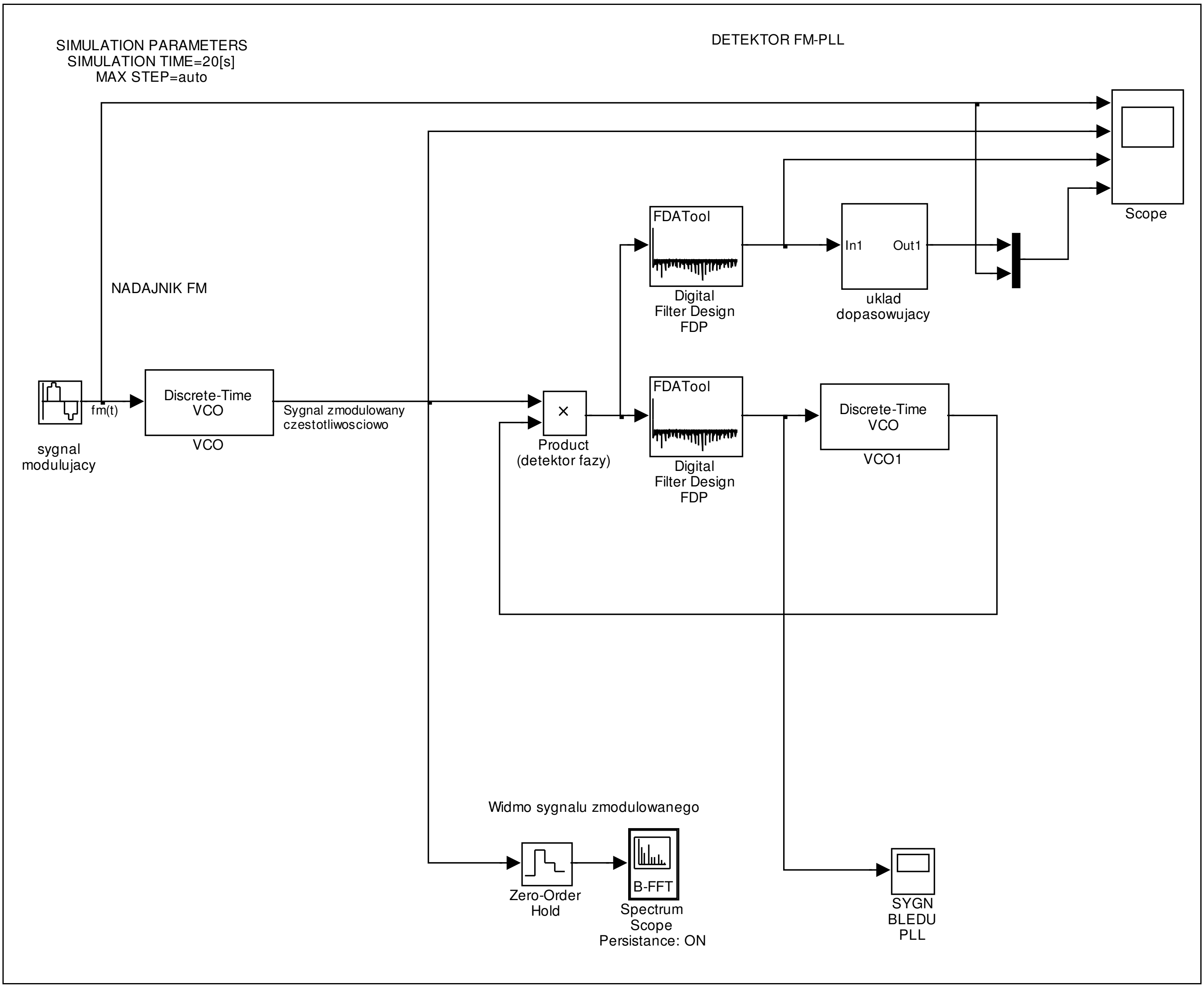


Rysunek 11. Układ do detekcji obwiedniowej z filtrami pasmowymi

- Dobrać nastawienia układu w taki sposób, aby poprawnie przeprowadzić proces demodulacji sygnału
- Wykreślić przebiegi czasowe układu na poszczególnych etapach demodulacji.
- Korzystając z układu dopasowującego (wzmocnienie, wyśrodkowanie przebiegu względem osi x i ewentualna filtracja sygnału) wykreślić i porównać przebieg czasowy sygnału informacyjnego przed i po demodulacji.
- Wypisać parametry zbudowanego układu i krótko opisać dlaczego zostały dobrane w taki właśnie sposób.
- Własne uwagi i/lub modernizacje układu do symulacji detektora z użyciem filtrów.

4. DETEKCJA Z UŻYCIEM ZAMKNIĘTEJ PĘTLI FAZOWEJ PLL

Skonstruować układ do detekcji sygnału zmodulowanego częstotliwościowo z zastosowaniem zamkniętej pętli fazowej PLL:



Rysunek 12. Układ do detekcji obwiedniowej z użyciem pętli PLL

- Dla dowolnego wybranego jednotonowego sygnału modulującego dobrać parametry układu tak, aby poprawnie przeprowadzić proces demodulacji.
- Wykreślić przebiegi na poszczególnych etapach procesu modulacji i demodulacji.
- Korzystając z układu dopasowującego (wzmocnienie i wyśrodkowanie przebiegu względem osi x) wykreślić i porównać przebieg czasowy sygnału informacyjnego przed i po demodulacji.
- Dla działającego układu wykreślić widmo częstotliwościowe zajmowane przez sygnał zmodulowany.

IV. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonych badań wyciągnąć wnioski ustosunkowujące się do następujących tematów:

- Podstawowe różnice w sposobie kształtowania sygnału zmodulowanego amplitudowo i częstotliwościowo.
- Zalety modulacji częstotliwościowej w porównaniu do modulacji amplitudowej.
- Jakie szerokości pasma zajmuje taki sam sygnał zmodulowany amplitudowo i zmodulowany częstotliwościowo przy jednakowej częstotliwości nośnej sygnału? Od czego to zależy?
- Jakie jest pasmo ogólnodostępnej częstotliwości obywatelskiej i jakie jest pasmo częstotliwości zajmowanej przez nadajniki RTV? Podać materiały źródłowe.
- Jakie są podstawowe częstotliwości nośne używane w polskich (i ew. zagranicznych) stacjach radiowych AM oraz FM i co jaki odstęp są one od siebie oddalone?
- Jaki jest zakres częstotliwości zajmowany przez polską analogową TV naziemną?
- Własne uwagi i spostrzeżenia na temat przeprowadzanych symulacji i zagadnień poruszanych na ćwiczeniu.

Dodatkowo (na ocenę celującą po spełnieniu wszystkich podstawowych warunków)

- Zamodelować w SIMULINKU działający układ do modulacji i demodulacji wąskopasmowej i szerokopasmowej wg schematów z rysunku 4 i 5 opisywanych w punkcie II.3 instrukcji.
- Wykreślić przebiegi czasowe sygnału modulującego w odbiorniku i porównać z sygnałem użytym w nadajniku. Wykreślić widmo częstotliwościowe sygnału zmodulowanego.
- Wypisać nastawy poszczególnych bloków oraz parametry symulacji.
- Znaleźć i ogólnie opisać dowolny rzeczywisty układ do modulacji i demodulacji częstotliwościowej.
- Zamieścić spis materiałów źródłowych (literatura, czasopisma, artykuły, adresy stron www)

Uwaga: W przypadku osób piszących sprawozdanie rozszerzone (na ocenę celującą) zakres materiału dodatkowego może być dołączony do sprawozdania w terminie późniejszym, ale nie dłuższym niż 1 tydzień od ostatecznego terminu oddania podstawowej części sprawozdania.

V. SPRAWOZDANIE:

W sprawozdaniu należy zamieścić wszystkie zrealizowane w punkcie III zadania. Każde zadanie powinno być zatytułowane i ponumerowane, powinno zawierać rysunek z wykonanym w SIMULINKU schematem blokowym układu (z odpowiednimi oznaczeniami i komentarzami tekstowymi), wypisane jego parametry (w osobnej tabeli lub bezpośrednio na układzie w SIMULINKU) oraz przebiegi otrzymane z poszczególnych układów lub na poszczególnych etapach przeprowadzania procesu obliczeniowego. Wszystkie układy umieszczone w sprawozdaniu nie powinny być zamaskowane. W sprawozdaniu z ćwiczenia piątego należy umieścić wnioski końcowe dające odpowiedź na pytania zawarte w punkcie III.5 instrukcji i podsumowujące przeprowadzone badania.

Ogólne uwagi dotyczące sprawozdania:

- Strona tytułowa, powinna zawierać: Imiona i nazwiska osób, numer grupy, nazwę przedmiotu, tytuł ćwiczenia, numer ćwiczenia i datę wykonania ćwiczenia,
- Układ strony powinien być następujący: marginesy 0,5 cm z każdej strony, czcionka 10,
- Wykresy możliwie małe, ale czytelne, opisane i umieszczone bezpośrednio pod lub obok układu tak, żeby było wiadomo który przebieg należy do którego układu,
- Sprawozdanie nie powinno być długie, ale powinno zawierać wszystkie niezbędne informacje.

Uwaga: Sprawozdanie należy przesyłać na pocztę lub wskazany przez prowadzącego serwer FTP w formacie PDF zatytułowane w następujący sposób:

NrĆw_Specjalność_NazwiskoImię1_NazwiskoImię2.pdf

na przykład:

5_AM_KowalskiJ_NowakS.pdf
5_MK_WawelskiS_IksińskiZ.pdf
5_RM_ZielonyR_StudentP.pdf

Sprawozdania oddane w innej formie lub z nieprawidłowym opisem nie będą przyjmowane!

Uwaga: Jeśli materiał na ocenę celującą nie jest dołączony do sprawozdania w momencie jego wysłania tylko jest dostarczany w terminie późniejszym należy go zatytułować w następujący sposób:

NrĆw_Specjalność_NazwiskoImię1_NazwiskoImię2-dodateknaCEL.pdf

na przykład:

5_AM_KowalskiJ_NowakS-dodateknaCEL.pdf
5_MK_WawelskiS_IksińskiZ-dodateknaCEL.pdf
5_RM_ZielonyR_StudentP-dodateknaCEL.pdf

Dodatki do sprawozdania oddane w innej formie niż pdf lub z nieprawidłowym opisem nie będą przyjmowane!