ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII

Wykłady: prof. dr hab. inż. Andrzej Milenin
Projekt: Mgr. Inż. Piotr Kustra
Pok. B5 710
E-mail: milenin@agh.edu.pl
Egzamin

Literatura

- O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor The Finite Element Method // Butterworth Heinemann, 3 vol, 5-th Edition, London, 2000
- Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa, 1972.
- Kleiber M. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych, PWN, Warszawa 1995
- M. Pietrzyk Metody numeryczne w przeróbce plastycznej metali // AGH, Kraków, 1992
- http://www.home.agh.edu.pl/~milenin/
- A.Milenin Podstawy MES. Zadania termomechaniczne// Wydawnictwo AGH, 2010

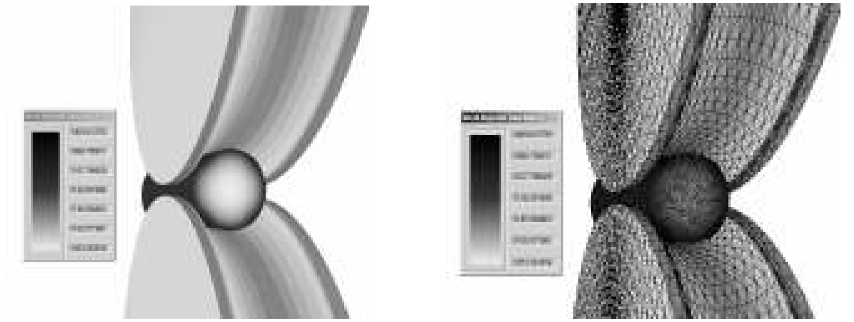
SPIS TREŚCI

- Zaawansowane zagadnienia z zakresu metody elementów skończonych
  - Rozwiązanie stacjonarnych i niestacjonarnych zadań, w których niewiadomą jest funkcja skalarna
  - Rozwiązanie zadań, w których niewiadomą jest funkcja wektorowa
  - Problemy z ograniczeniami, nieściśliwość, metoda mnożnika Lagrange'a, funkcji kary i metoda mieszana
  - Metody adaptacyjne – metody h, p i hp
- Podstawy rachunku wariacyjnego, metoda Galerkina
- Metoda elementów brzegowych (BEM)
- Metoda automatów komurkowych
- Opracowanie programu do symulacji procesów odksztalcenia materialów za pomocą MES

Główna koncepcja metody elementów skończonych

Główna idea MES polega na tym, że dowolną ciągłą wartość (np. temperaturę) można zamienić na model dyskretny.

Model ten jest oparty na ograniczonej ilości węzłów, które tworzą ograniczoną ilość elementów skończonych



Algorytm MES

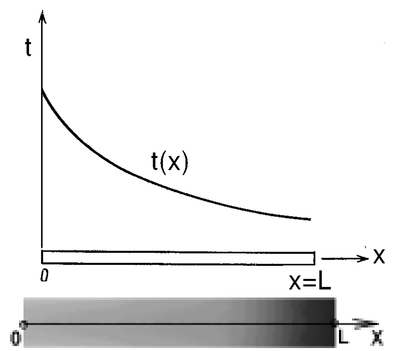
1. W rozpatrywanym ośrodku bierzemy pod uwagę ograniczoną ilość punktów (węzłów).
2. Wartości temperatury (lub innej funkcji) w każdym węźle definiujemy jako parametr, który musimy wyznaczyć.
3. Strefa wyznaczenia temperatury dzieli się na ograniczoną ilość pod-stref, które nazywamy elementami skończonymi.
4. Temperaturę aproksymuje się na każdym elemencie za pomocą wielomianu, który wyznaczony jest za pomocą węzłowych wartości temperatury. Wyznacza się go w taki sposób, aby zachować warunek ciągłości temperatury na granicach elementów.
5. Węzłowe wartości temperatury muszą być dobrane w taki sposób, aby zapewnić najlepsze do rzeczywistego przybliżenie pola temperatury. Taki dobór wykonywany jest za pomocą minimalizacji funkcjonału, który odpowiada różniczkowemu równaniu przewodzenia ciepła.

Ważniejsze zalety MES w porównaniu do innych metod

1. Własności materiału elementów niekoniecznie muszą być jednakowe. To daje możliwość wykorzystania MES do materiałów wielofazowych, jak również do materiałów, których własności są funkcją temperatury.
2. Ośrodek o skomplikowanym kształcie może być zaproksymowana z dużą dokładnością za pomocą elementów krzywoliniowych.
3. Wymiary elementów mogą być objętościowo różne. To daje możliwość powiększania lub zmniejszania wymiarów elementów w pewnych strefach rozpatrywanej objętości.
4. Za pomocą MES można uwzględniać nieliniowe warunki brzegowe.

Dyskretyzacja ośrodka

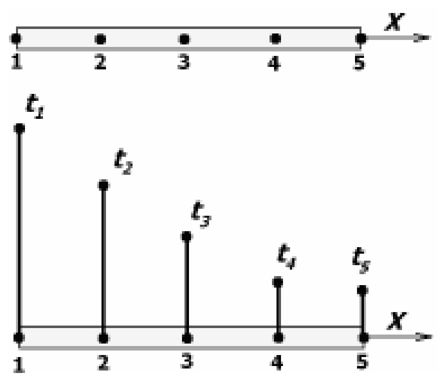
Główna koncepcja MES może być pokazana na jednowymiarowym przykładzie aproksymacji ciągłego pola temperatury w pręcie



Rozkład temperatury w jednowymiarowym pręcie

Dyskretyzacja ośrodka jednowymiarowego

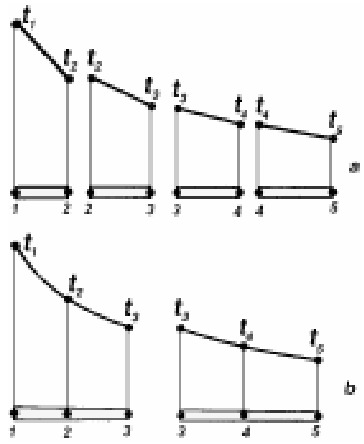
Rozpatrzmy ciągły rozkład temperatury t(x) na odcinku *0L* wzdłuż osi X analizując pięć węzłowych punktów na odcinku *0L*



Punkty węzłowe (a) i ewentualni wartości t(x) (b).

Rozdzielenie ośrodka na elementy

- Rozdzielenie ośrodka 0L na elementy można wykonać na różne sposoby.
- Na przykład można wykorzystać dwa sąsiednie węzły.
- Wtedy otrzymamy cztery elementy, lub rozdzielić strefę na dwa elementy, z których każdy zawiera trzy węzły.

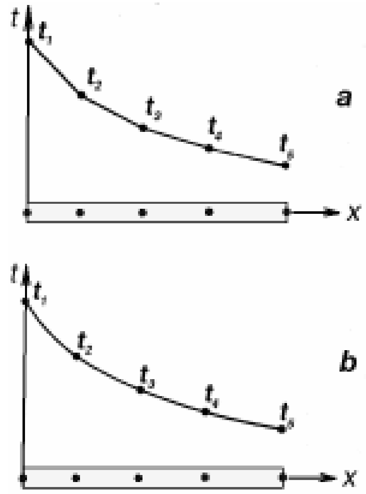


Podział ośrodka na elementy pierwszego (a) i drugiego (b) stopnia.

Aproksymacja pola temperatury

Wielomian aproksymujący wyznaczamy na podstawie wartości temperatury w węzłach elementu.
W przypadku rozdzielenia rozpatrywanej strefy na cztery elementy, każdy element zawiera dwa węzły i funkcja aproksymująca będzie liniową względem osi X.

Inny sposób rozdzielenia strefy na dwa elementy z 3 węzłami powoduje wykorzystanie wielomianu aproksymującego drugiego stopnia.
W tym przypadku ostatecznym wariantem aproksymacji będzie siatka z dwóch elementów skończonych drugiego stopniu.

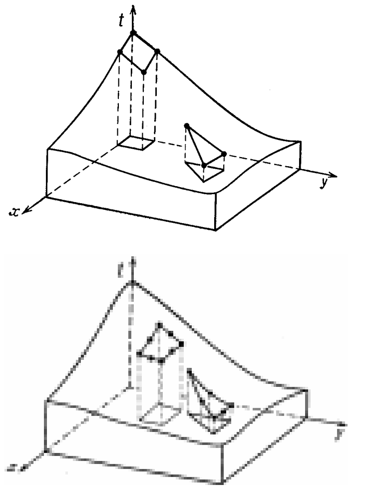


Aproksymacja pola temperatury przez funkcję liniową i kwadratową

Dyskretyzacja ośrodka dwuwymiarowego

Przy opracowaniu dwu- lub trzywymiarowego modelu dyskretnego temperatury główną koncepcję MES wykorzystuje się w sposób analogiczny.

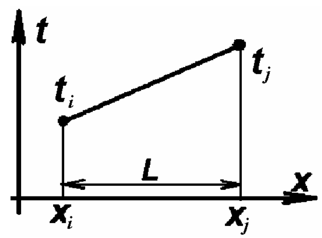
Funkcje elementów dla zadania dwuwymiarowego pokazane są na rysunku.



Element jednowymiarowy

Jednowymiarowy simpleks-element jest to prosty odcinek o długości L. Oznaczmy węzły literami i, j, węzłowe wartości temperatur – przez t_i i t_j odpowiednie. Funkcja aproksymująca dla tego elementu ma postać:

$$t = a_1 + a_2 X$$



Współczynniki a_1 i a_2 można wyznaczyć za pomocą warunków w punktach węzłowych:

$$t = t_i \quad przy \quad X = X_i$$
$$t = t_j \quad przy \quad X = X_j$$

Te warunki powodują następujący układ równań:

$$\left.\begin{aligned} t_i &= a_1 + a_2 X_i \\ t_j &= a_1 + a_2 X_j \end{aligned}\right\}$$

rozwiązanie których daje:

$$\boxed{a_1 = \frac{t_i X_j - t_j X_i}{L} \qquad a_2 = \frac{t_j - t_i}{L}}$$

Funkcji kształtu elementu jednowymiarowego

$$t=\left(\frac{t_iX_j-t_jX_i}{L}\right)+\left(\frac{t_j-t_i}{L}\right)X$$

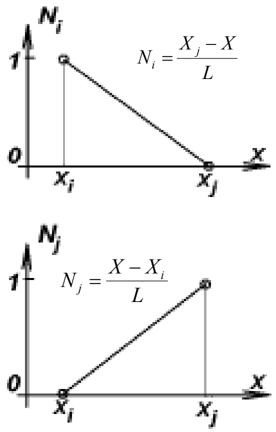
$$t=\left(\frac{X_j-X}{L}\right)t_i+\left(\frac{X-X_i}{L}\right)t_j$$

Funkcje liniowe od X nazywa się funkcjami kształtu.
Oznaczymy ty funkcji przez N.
Każda funkcja kształtu powinna miecz dolny indeks dla identyfikacji węzła, do którego ona należę.

$$N_i=\frac{X_j-X}{L}\qquad N_j=\frac{X-X_i}{L}$$

$$t=N_it_i+N_jt_j=\lfloor N\rfloor\{t\}$$

$$\{t\}=\begin{Bmatrix}t_i\\ t_j\end{Bmatrix}\qquad \lfloor N\rfloor=\lfloor N_i N_j\rfloor$$



Wykresy funkcji kształtu N_i i N_j

$$\boxed{\sum_{\beta=1}^{n}N_\beta=1}$$

Ogólne właściwości funkcji kształtu

Zarówno funkcje kształtu, otrzymane powyżej dla dwóch typów elementów, jak i funkcje kształtu dowolnego elementu skończonego mają następujące wspólne własności:

1. Suma funkcji kształtu elementu w jego dowolnym punkcie równa jest jeden.
Dla elementu jednowymiarowego tą właściwość można przedstawić w postaci ogólnej:

$$N_i+N_j=\frac{X_j-X}{L}+\frac{X-X_i}{L}=\frac{X_j-X_i}{L}=\frac{L}{L}=1$$

Otrzymany wynik nie zależy od X, dlatego ten warunek spełniony jest dla wszystkich punktów elementu.

2. Dowolna funkcja kształtu równa jeden w odpowiednim jej węźle i równa zeru w pozostałych węzłach tego elementu. Dla elementu jednowymiarowego ta własność jest oczywista. Na przykład, dla węzła i mamy

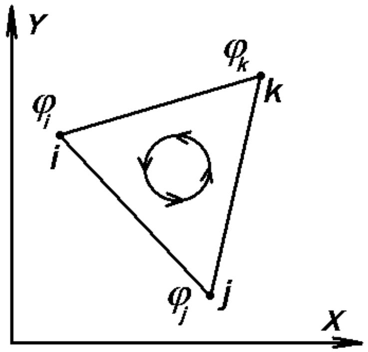
$$N_i=\frac{X_j-X}{L}=\frac{X_j-X_i}{L}=\frac{L}{L}=1$$

3. Na granicach pomiędzy elementami funkcji kształtu są ciągłe.

Element dwuwymiarowy

Simpleks-element dwuwymiarowy – jest to trójkąt z trzema węzłami dla aproksymacji pola temperatury (lub innej funkcji)

Rozpatrzmy numerację węzłów w kierunku przeciwnym do strzałki zegara i oznaczymy je jako i, j, k.



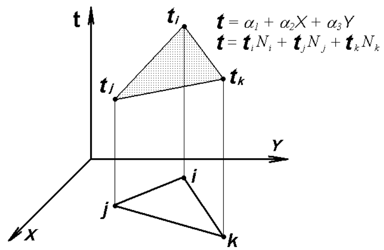
Kolejność numeracji węzłów w simpleks- elemencie dwuwymiarowym

Funkcji kształtu elementu dwuwymiarowego

Wartości współczynników α_1 α_2 α_3 otrzymamy wychodząc z warunków w węzłach elementu:

$$\left.\begin{aligned}&przy\ X=X_i,Y=Y_i\ \ t=t_i,\Rightarrow t_i=a_1+a_2X_i+a_3Y_i\\&przy\ X=X_j,Y=Y_j\ \ t=t_j,\Rightarrow t_j=a_1+a_2X_j+a_3Y_j\\&przy\ X=X_k,Y=Y_k\ \ t=t_k,\Rightarrow t_k=a_1+a_2X_k+a_3Y_k\end{aligned}\right\}$$

Następnie po rozwiązaniu układu równań otrzymamy wzory dla $\alpha_{1,}$ α_2 i α_3 :



Schemat do wyznaczenia funkcji kształtu w simpleks- elemencie dwuwymiarowym

$$\alpha_1=\frac{1}{2A}\left[\left(X_jY_k-X_kY_j\right)t_i+\left(X_kY_i-X_iY_k\right)t_j+\left(X_iY_j-X_jY_i\right)t_k\right]$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2A}\left[\left(Y_j-Y_k\right)t_i+\left(Y_k-Y_i\right)t_j+\left(Y_i-Y_j\right)t_k\right]$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2A}\left[\left(X_k-X_j\right)t_i+\left(X_i-X_k\right)t_j+\left(X_j-X_i\right)t_k\right]$$

$$2A=\begin{vmatrix}1 & X_i & Y_i\\ 1 & X_j & Y_j\\ 1 & X_k & Y_k\end{vmatrix}=X_jY_k+X_iY_j+X_kY_i-X_jY_i-X_kY_j-X_iY_k$$

gdzie: A – pole elementu skończonego

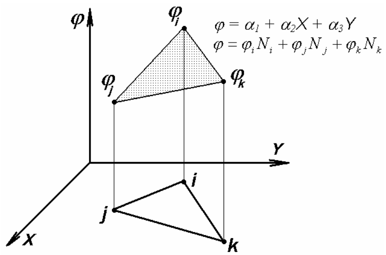
Funkcji kształtu elementu dwuwymiarowego

$$\varphi = \varphi_i N_i + \varphi_j N_j + \varphi_k N_k = \{N\}^T \cdot \{\varphi\} \qquad t = t_i N_i + t_j N_j + t_k N_k = \{N\}^T \cdot \{t\}$$

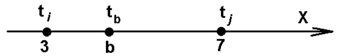
$$\boxed{N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i X + c_i Y\right)} \qquad a_i = X_j Y_k - X_k Y_j,\quad b_i = Y_j - Y_k,\quad c_i = X_k - X_j$$

$$\boxed{N_j = \frac{1}{2A}\left(a_j + b_j X + c_j Y\right)} \qquad a_j = X_k Y_i - X_i Y_k,\quad b_j = Y_k - Y_i,\quad c_j = X_i - X_k$$

$$\boxed{N_k = \frac{1}{2A}\left(a_k + b_k X + c_k Y\right)} \qquad a_k = X_i Y_j - X_j Y_i,\quad b_k = Y_i - Y_j,\quad c_k = X_j - X_i$$



Zadanie. Określić wartość temperatury w zadanym punkcie b



Schemat do zadania 1.

$t_i = 110\ {}^0C$, $t_j = 230\ {}^0C$, $X_b = 4$ mm

Rozwiązanie:

Obliczenie funkcji kształtu w punkcie b:

$$N_i^{(b)} = \frac{X_j - X_b}{X_j - X_i} = \frac{7-4}{7-3} = 0.75;$$

$$N_j^{(b)} = \frac{X_b - X_i}{X_j - X_i} = \frac{4-3}{7-3} = 0.25.$$

Kontrola wartości funkcji kształtu:

$$N_i + N_j = 0.75 + 0.25 = 1$$

Wartość temperatury w punkcie b: $t_b = t_i N_i + t_j N_j = 110 \cdot 0.75 + 230 \cdot 0.25 = 82.5 + 57.5 = 140\ {}^0C$

Zadanie Określić wartość naprężenia w zadanym punkcie B

σ_i = 40 MPa
X_i = 0 mm
Y_i = 0 mm

σ_j = 34 MPa
X_j = 4 mm
Y_j = 0.5 mm

σ_k = 46 MPa
X_k = 2 mm
Y_k = 5 mm

X_B=2 mm
Y_B=1.5 mm

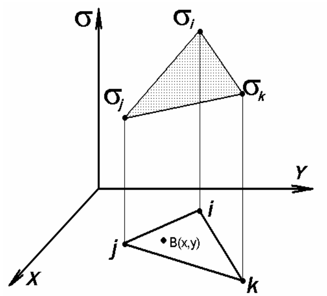
σ_B = ?

$$\sigma = \sigma_i N_i + \sigma_j N_j + \sigma_k N_k$$

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0.5 = 19$$
$$b_i = Y_j - Y_k = 0.5 - 5 = -4.5$$
$$c_i = X_k - X_j = 2 - 4 = -2$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k = 2 \cdot 0 - 0 \cdot 5 = 0$$
$$b_j = Y_k - Y_i = 5 - 0 = 5$$
$$c_j = X_i - X_k = 0 - 2 = -2$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i = 0 \cdot 0.5 - 4 \cdot 0 = 0$$
$$b_k = Y_i - Y_j = 0 - 0.5 = -0.5$$
$$c_k = X_j - X_i = 4 - 0 = 4$$



Określić wartość naprężenia w zadanym punkcie B

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = X_j Y_k + X_i Y_j + X_k Y_i - X_j Y_i - X_k Y_j - X_i Y_k = 19$$

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i X + c_i Y\right) = \frac{7}{19}$$

$$N_j = \frac{1}{2A}\left(a_j + b_j X + c_j Y\right) = \frac{7}{19}$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left(a_k + b_k X + c_k Y\right) = \frac{5}{19}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_B = \sigma_i N_i^{(B)} + \sigma_j N_j^{(B)} + \sigma_k N_k^{(B)} = \frac{7}{19}40 + \frac{7}{19}34 + \frac{5}{19}46 = 39.4}$$

$$N_i + N_j + N_k = \frac{7}{19} + \frac{7}{19} + \frac{5}{19} = 1$$

Rozwiązanie zadań, w których niewiadomą jest funkcja skalarna

1. Przypływ ciepła w stanie ustalonym
2. Niestacjonarny przepływ ciepła
3. Dyfuzji składnika w ciałach stałych
4. Dyfuzja w czasie krzepnięcia materiałów dwufazowych
5. Przypływ ciepła w czasie krzepnięcia materiałów

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(Q-A\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)=0$$

u – stężenie (dyfuzja), wilgotność (zw. w atmosferze), temperatura ..

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+\left(Q-c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)=0$$

Symulacja ustalonych procesów cieplnych za pomocą MES

Zjawiska cieplne zachodzące w stanie ustalonym opisuje równanie Furiera w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+\left(Q-c_{eff}\,\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)=0$$

k - anizotropowe współczynniki przewodzenia ciepła (W/mK) w zależności od temperatury t (K),
Q – prędkość generowania ciepła (W/m^3)

Zadanie rozwiązania równania Furiera sprowadza się do poszukiwania minimum takiego funkcjonału, dla którego równanie Furiera jest równaniem Eulera. Według rachunku wariacyjnego funkcjonał taki będzie miał postać:

$$J=\int_V\left[\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right]dV$$

Warunki brzegowe

Funkcja t(x,y,z) musi spełniać określone warunki brzegowe na powierzchni metalu:

- na powierzchni metalu zadana jest temperatura t;

- na powierzchni metalu zadany jest strumień cieplny q według prawa konwekcji:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\alpha_{konw}\left(t-t_\infty\right)$$

α_{konw} - współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła (W/m^2 K);

- na powierzchni metalu zadany jest strumień cieplny q według prawa wymiany radiacyjnej:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\sigma_{rad}\left(t^4-t_\infty^4\right)$$

σ_{rad} - współczynnik wymiany ciepła przez radiacje (W/m^{2}K^4).

Warunki brzegowe w funkcjonale

Bezpośrednie wprowadzenie warunków brzegowych do funkcjonału nie jest możliwe. W praktyce narzuca się ten warunek poprzez dodanie do funkcjonału całki w postaci:

$$\int_S\frac{\alpha}{2}\left(t-t_\infty\right)^2dS+\int_S qtdS$$

gdzie: S – powierzchnia na której zadane są warunki brzegowe.

W rezultacie otrzymujemy:

$$J=\int_V\left[\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right]dV+\int_S\frac{\alpha}{2}\left(t-t_\infty\right)^2dS+\int_S qtdS$$

Symulacja ustalonych procesów cieplnych za pomocą MES. Ogólne zasady.

Zjawiska cieplne zachodzące w stanie ustalonym opisuje równanie Furiera w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+Q=0$$

Zadanie rozwiązania równania Furiera sprowadza się do poszukiwania minimum funkcjonału:

$$J=\int_V\left[\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right]dV$$

Wprowadzenie warunków brzegowych:

$$\boxed{J=\int_V\left[\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right]dV+\int_S\frac{\alpha}{2}(t-t_\infty)^2dS+\int_S qtdS}$$

Dyskretyzacja przedstawionego problemu

Dyskretyzacja przedstawionego problemu polega na podzieleniu rozpatrywanej strefy na elementy i przedstawieniu temperatury wewnątrz elementu jako funkcji wartości węzłowych zgodnie z zależnością:

$$t=\sum_{i=1}^{n}N_it_i=\{N\}^T\{t\}=[N]\{t\} \qquad \frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\{N\}^T\{t\}\right)=\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T\{t\}$$

Wprowadzając zależności t i *dt/dx* do funkcjonału otrzymamy:

$$J=\int_V\left[\frac{k(t)}{2}\left(\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T\{t\}\right)^2+\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\{t\}\right)^2+\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\{t\}\right)^2\right)-Q\{N\}^T\{t\}\right]dV+$$

$$+\int_S\frac{\alpha}{2}\left(\{N\}^T\{t\}-t_\infty\right)^2dS+\int_S q\{N\}^T\{t\}dS.$$

Minimalizacja funkcjonału

Minimalizacja funkcjonału sprowadza się do obliczenia pochodnych cząstkowych tego funkcjonału względem wartości węzłowych temperatury, że w rezultacie prowadzi do następującego układu równań:

$$\frac{\partial J}{\partial\{t\}}=\int_V\left[k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\right)\{t\}-Q\{N\}\right]dV+\int_S\alpha\left(\{N\}^T\{t\}-t_\infty\right)\{N\}dS+\int_S q\{N\}dS=0$$

Ten układ równań zapisany w postaci macierzowej ma postać:

$$[H]\{t\}+\{P\}=0$$

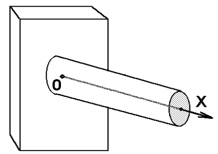
$$[H]=\int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\right)dV+\int_S\alpha\{N\}\{N\}^TdS,$$

$$\{P\}=-\int_S\alpha\{N\}t_\infty dS-\int_V Q\{N\}dV+\int_S q\{N\}dS$$

Minimalizacja funkcjonału może być również wykonana przez bezpośredni dobór węzłowych wartości temperatury.

Rozwiązanie zadania wyznaczenia temperatury w pręcie w oparciu o otrzymane rozwiązanie ogólne

$$\boxed{\begin{aligned}[H]&=\int_V k\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^TdV+\int_S\alpha\{N\}\{N\}^TdS\\ \{P\}&=-\int_S\alpha\{N\}t_\infty dS+\int_S q\{N\}dS\end{aligned}}$$



$$\{N\}=\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{x_j-x}{L}\\\frac{x-x_i}{L}\end{Bmatrix}$$

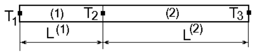
$$\{N\}^T=\{N_i\quad N_j\}=\left\{\frac{x_j-x}{L};\quad\frac{x-x_i}{L}\right\}$$

$$\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}=\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L}\\\frac{1}{L}\end{Bmatrix}$$

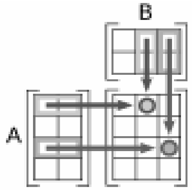
$$\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T=\left\{-\frac{1}{L}\quad\frac{1}{L}\right\}$$

$$[H]=k\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L}\\\frac{1}{L}\end{Bmatrix}\left\{-\frac{1}{L}\quad\frac{1}{L}\right\}SL+\alpha\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\end{Bmatrix}\{N_i\quad N_j\}S$$

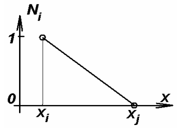
$$\boxed{[H]=\int_V k\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L}\\\frac{1}{L}\end{Bmatrix}\left\{-\frac{1}{L}\quad\frac{1}{L}\right\}dV+\int_S\alpha\begin{Bmatrix}\frac{x_j-x}{L}\\\frac{x-x_i}{L}\end{Bmatrix}\left\{\frac{x_j-x}{L};\quad\frac{x-x_i}{L}\right\}dS}$$



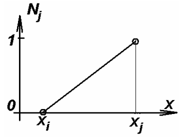
$$[H]=k\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L}\\ \frac{1}{L}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{Bmatrix}SL+\alpha\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}N_i & N_j\end{Bmatrix}S$$



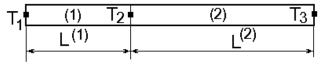
$$[H]^{(1)}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{L^{(1)2}} & -\frac{1}{L^{(1)2}}\\ -\frac{1}{L^{(1)2}} & \frac{1}{L^{(1)2}}\end{bmatrix}SL^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}}\\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & \frac{Sk}{L^{(1)}}\end{bmatrix}$$



$$[H]^{(2)}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{L^{(2)2}} & -\frac{1}{L^{(2)2}}\\ -\frac{1}{L^{(2)2}} & \frac{1}{L^{(2)2}}\end{bmatrix}SL^{(2)}+\alpha\begin{Bmatrix}N_iN_i & N_iN_j\\ N_iN_j & N_jN_j\end{Bmatrix}S$$



$$[H]^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}}\\ -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}}\end{bmatrix}+\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & \alpha S\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}}\\ -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}}+\alpha S\end{bmatrix}$$



$$\{P\}=-\int_S\alpha\{N\}t_\infty dS+\int_S q\{N\}dS$$

$$\boxed{\{P\}=-\int_S\alpha\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}t_\infty dS+\int_S q\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}dS}$$

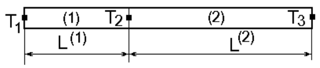
$$\{N\}=\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{x_j-x}{L}\\ \frac{x-x_i}{L}\end{Bmatrix}\qquad \{N\}^T=\{N_i\quad N_j\}=\left\{\frac{x_j-x}{L};\quad\frac{x-x_i}{L}\right\}$$

$$\{P\}^{(1)}=q\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}S=q\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}S=\begin{Bmatrix}qS\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\{P\}^{(2)}=-\alpha t_\infty S\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}=-\alpha t_\infty S\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -\alpha t_\infty S\end{Bmatrix}$$

Rozbudowa globalnej macierzy

$$[H]=\sum_{e=1}^{n_e}[H]^{(e)}$$



Przystępując do budowy macierzy sztywności dla całego ośrodka należy w pierwszej kolejności zmienić indeksy elementów matryc zgodnie z danymi o numerach stopni swobody całego ośrodka. Na przykład, dla elementu numer 2 informacja taka zakodowana jest w macierzy:

	1	2
1	2, 2	2, 3
2	3, 2	4, 4

$$[H]=[H]^{(1)}+[H]^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} & 0\\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & \frac{Sk}{L^{(1)}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}}\\ 0 & -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}}+\alpha S\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} & 0\\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & Sk\left(\frac{1}{L^{(1)}}+\frac{1}{L^{(2)}}\right) & -\frac{Sk}{L^{(2)}}\\ 0 & -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}}+\alpha S\end{bmatrix}$$

$$\{P\}=\{P\}^{(1)}+\{P\}^{(2)}=\begin{Bmatrix}qS\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -\alpha t_\infty S\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}qS\\ 0\\ -\alpha t_\infty S\end{Bmatrix}$$

Symulacja niestacjonarnych procesów cieplnych za pomocą MES. Ogólne zasady.

Równanie Furiera dla procesu niestacjonarnego ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+\boxed{\left(Q-c_{eff}\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)}=0$$

Q'

W określonej chwili czasu pochodne temperatury mogą być traktowane jako funkcje tylko współrzędnych *x,y,z*. Wtedy rozwiązanie równania Furiera jest prowadzone analogicznie jak dla procesu stacjonarnego przyjmując całe wyrażenie w nawiasie jako parametr *Q'*.

$$t=\{N\}^T\{t\}$$

$$Q'=Q-c_{eff}\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}=Q-c_{eff}\rho\frac{\partial}{\partial \tau}\{t\}\{N\}^T$$

Matryca układu równani MES:

$$[H]=\int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\right)dV+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS,$$

$$\{P\}=-\int_S \alpha\{N\}t_\infty dS-\int_V Q\{N\}dV+\int_S q\{N\}dS$$

$$\boxed{Q'=Q-c_{eff}\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}=Q-c_{eff}\rho\frac{\partial}{\partial \tau}\{t\}\{N\}^T}$$

$$[H]\{t\}+\{P\}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{gathered}[H]\{t\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{t\}+\{P\}=0\\ [C]=\int_V\{N\}\rho c_{eff}\{N\}^T dV\end{gathered}}$$

Uwzględnienie czasu

W ogólnym przypadku wartości temperatury w węzłach {t} zależą od czasu. Przyjmując, że wektor $\{t_0\}$ reprezentuje temperatury węzłowe w chwili τ=0, to w przedziale czasu $\Delta\tau$ wektor ten będzie wyznaczony równaniem:

$$\{t\}=\{N_0,N_1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}$$

W tym równaniu $\{N_0\}$ i $\{N_1\}$ są funkcjami kształtu zależnymi od czasu. Przyjmując, że dla małych przedziałów $\Delta\tau$ zależność temperatur węzłowych od czasu jest liniowa, funkcje kształtu przyjmą postać:

$$N_0=\frac{\Delta\tau-\tau}{\Delta\tau} \qquad N_1=\frac{\tau}{\Delta\tau}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}=\left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau},\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta\tau}\{-1,1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[H]\{t\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{t\}+\{P\}=0 \qquad (1)}$$

$$\boxed{\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}=\left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau},\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta\tau}\{-1,1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}. \qquad (2)}$$

Możliwe kilku wariantów rozwiązania układu równani (1) przy interpolacji (2) w zależności od tego, w jakiej moment czasu będziemy rozpatrywać wektor {t} we wzorze (1) przy matryce [H].

1. Jeżeli przyjmujemy, że $\{t\}=\{t_0\}$, to wzór (1) może być zapisany następująco:

$$[H]\{t_0\}+[C]\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}+\{P\}=0$$

$$\boxed{\{t_1\}=\{t_0\}-\frac{\Delta\tau}{[C]}\left([H]\{t_0\}+\{P\}\right)}$$

$$\left[H\right]\{t\}+\left[C\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\{t\}+\{P\}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}=\left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau},\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta\tau}\{-1,1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}. \qquad (2)$$

2. Jeżeli przyjmujemy, że $\{t\}=\{t_1\}$, wzór (1) może być zapisany następująco:

$$\left[H\right]\{t_1\}+\left[C\right]\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}+\{P\}=0$$

Wtedy mamy nie jawny schemat wyznaczenia temperatury $\{t_1\}$:

$$\boxed{\left(\left[H\right]+\frac{\left[C\right]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}-\left(\frac{\left[C\right]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}=0}$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

$$\left[H\right]\{t\}+\left[C\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\{t\}+\{P\}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}=\left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau},\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta\tau}\{-1,1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}. \qquad (2)$$

3. Kolejny możliwy schemat traktuje temperaturą $\{t\}$, jaka wchodzi do (5.2), jako średnie między temperaturą w moment $\tau=0$ i i w moment $\tau=\Delta\tau$:

$$\{t\}=\frac{1}{2}\left(\{t_1\}+\{t_0\}\right)$$

$$\{P\}^*=\frac{1}{2}\left(\{P_1\}+\{P_0\}\right)$$

$$\left[H\right]\frac{1}{2}\left(\{t_1\}+\{t_0\}\right)+\left[C\right]\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}+\{P\}^*=0$$

$$\left(\frac{\left[H\right]}{2}+\frac{\left[C\right]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}+\left(\frac{\left[H\right]}{2}-\frac{\left[C\right]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}^*=0$$

$$\boxed{\left(\left[H\right]+\frac{2\left[C\right]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}+\left(\left[H\right]-\frac{2\left[C\right]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+2\{P\}^*=0}$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

$$\left[H\right]\{t\}+\left[C\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\{t\}+\{P\}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}=\left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau},\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta\tau}\{-1,1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}=\frac{\{t_1\}-\{t_0\}}{\Delta\tau}. \qquad (2)$$

4. Uwzględnienie czasu również możliwe jest za pomocą metody ważonych residuum. Ponieważ wektor temperatur $\{t_0\}$ węzłowych jest znany, dla przeprowadzenia całkowania równania (2) względem czasu należy wprowadzić tylko jedną ważoną rezydualną (N_1) zgodnie z zależnością:

$$\int_0^{\Delta\tau} N_1\left[\left[H\right]\{N_0,N_1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}+C\left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau},\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}+\{P\}\right]d\tau=0$$

$$N_0=\frac{\Delta\tau-\tau}{\Delta\tau}$$

$$\int_0^{\Delta\tau} \frac{\tau}{\Delta\tau}\left[\left[H\right]\{N_0,N_1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}+C\left\{\frac{\partial N_0}{\partial\tau},\frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\ \{t_1\}\end{Bmatrix}+\{P\}\right]d\tau=0$$

$$N_1=\frac{\tau}{\Delta\tau}$$

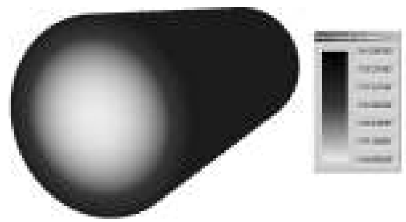
$$\int_0^{\Delta\tau} \frac{\tau}{\Delta\tau}\left[\left[H\right]\left(\frac{\Delta\tau-\tau}{\Delta\tau}\{t_0\}+\frac{\tau}{\Delta\tau}\{t_1\}\right)+\frac{C}{\Delta\tau}\left(-\{t_0\}+\{t_1\}\right)+\{P\}\right]d\tau=0$$

$$\boxed{\left(2\left[H\right]+\frac{3}{\Delta\tau}\left[C\right]\right)\{t_1\}+\left(\left[H\right]-\frac{3}{\Delta\tau}\left[C\right]\right)\{t_0\}+3\{P\}=0}$$

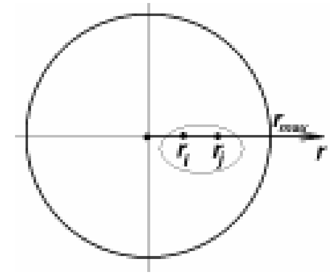
Otrzymane wyrażenie jest układem liniowych równań algebraicznych pozwalających obliczyć wartości temperatur węzłowych $\{t_1\}$ po czasie Δt przy zadanych temperaturach $\{t_0\}$ w chwili $\tau=0$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Zagadnienie wyznaczenia nieustalonego pola temperatury we wsadzie o przekroju okrągłym



Pole temperaturowe we wsadzie o przekroju okrągłym.



Schemat obliczeniowy do wyznaczenia nieustalonego pola temperatury we wsadzie o przekroju okrągłym.

Proces minimalizacji funkcjonału dla jednego elementu

$$J=\int_V \frac{k}{2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 dV-\int_V QtdV+\int_S \tfrac{1}{2}\alpha(t-t_\infty)^2 dS$$

Temperatura wewnątrz elementów zdefiniowana jest następnym wzorem:

$$t=\{t\}\{N\}^T=N_i t_i+N_j t_j=\frac{r_j-r}{\Delta r}t_i+\frac{r-r_i}{\Delta r}t_j$$

{N} – funkcji kształtu węzłów, t_i i t_j – temperatury w węzłach rozpatrywanego elementu.

Wyznaczymy pochodną temperatury względem *r*: $\dfrac{\partial t}{\partial r}=\dfrac{\partial N_i}{\partial r}t_i+\dfrac{\partial N_j}{\partial r}t_j$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Rozpatrzmy rozwiązanie tego problemu w oparciu o otrzymane ogólne rozwiązanie

$$\boxed{\left([H]+\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}-\left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}=0}$$

$$\boxed{[H]=\int_V k\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T dV+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS}$$

$$\boxed{\{P\}=-\int_S \alpha\{N\}t_\infty dS}$$

$$\boxed{[C]=\int_V \{N\}\rho c_{eff}\{N\}^T dV}$$

$$dV=2\pi rLdr$$

$$\int_S dS=2\pi r_{\max}L$$

$$\int_{r_i}^{r_j} rdr=\sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p \det J=\frac{\Delta r}{2}\sum_{p=1}^{n_p}\left(r_p w_p\right)$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

$$\{N\}=\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{r_j-r}{\Delta r}\\\dfrac{r-r_i}{\Delta r}\end{Bmatrix}\qquad \{N\}^T=\{N_i\quad N_j\}=\left\{\frac{r_j-r}{\Delta r}\quad\frac{r-r_i}{\Delta r}\right\}$$

$$\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial r}\right\}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{\Delta r}\\\dfrac{1}{\Delta r}\end{Bmatrix}\qquad \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial r}\right\}^T=\left\{-\frac{1}{\Delta r}\quad\frac{1}{\Delta r}\right\}$$

$$[C]=\int_V \rho c\{N\}\{N\}^T dV=\int_V 2\pi L\rho c\{N\}\{N\}^T rdr=2\pi L\rho c\int_V \begin{Bmatrix}N_i\\N_j\end{Bmatrix}\{N_i\quad N_j\}rdr=$$

$$=2\pi L\rho c\int_V \begin{Bmatrix}N_iN_i & N_iN_j\\N_iN_j & N_jN_j\end{Bmatrix}rdr=\pi L\rho c\Delta r\sum_{p=1}^{n_p}\left(r_p w_p\begin{Bmatrix}N_iN_i & N_iN_j\\N_iN_j & N_jN_j\end{Bmatrix}\right)$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

$$[H]=\int_V k\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T dV+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS=$$

$$=\int_V 2\pi Lk\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{\Delta r}\\\dfrac{1}{\Delta r}\end{Bmatrix}\left\{-\frac{1}{\Delta r}\quad\frac{1}{\Delta r}\right\}rdr+2\pi L\alpha\begin{Bmatrix}N_iN_i & N_iN_j\\N_iN_j & N_jN_j\end{Bmatrix}r_{\max}=$$

$$=2\pi Lk\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\Delta r^2} & -\dfrac{1}{\Delta r^2}\\-\dfrac{1}{\Delta r^2} & \dfrac{1}{\Delta r^2}\end{bmatrix}\int_{r_i}^{r_j} rdr+2\pi L\alpha\begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{Bmatrix}r_{\max}=$$

$$=2\pi Lk\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\Delta r^2} & -\dfrac{1}{\Delta r^2}\\-\dfrac{1}{\Delta r^2} & \dfrac{1}{\Delta r^2}\end{bmatrix}\frac{\Delta r}{2}\sum_{p=1}^{n_p}\left(r_p w_p\right)+2\pi L\alpha\begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{Bmatrix}r_{\max}=$$

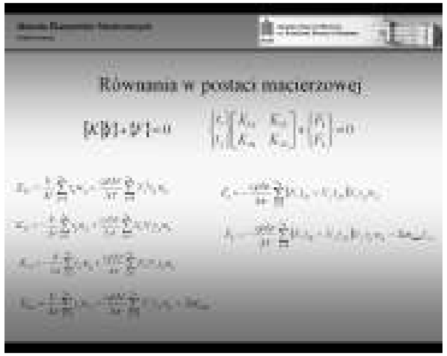
$$=\pi Lk\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\Delta r} & -\dfrac{1}{\Delta r}\\-\dfrac{1}{\Delta r} & \dfrac{1}{\Delta r}\end{bmatrix}\sum_{p=1}^{n_p}\left(r_p w_p\right)+2\pi L\alpha\begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{Bmatrix}r_{\max}$$

$$\{P\} = -\int_S \alpha \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} t_\infty dS = -2\pi L r_{\max} t_\infty \alpha \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = -2\pi L r_{\max} t_\infty \alpha \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\left([H] + \frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\} - \left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\} + \{P\} = 0}$$

$$\left(\frac{k}{\Delta r}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\sum_{p=1}^{n_p}\left(r_p w_p\right) + 2\alpha\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} r_{\max} + \frac{\rho c \Delta r}{\Delta\tau}\sum_{p=1}^{n_p}\left(r_p w_p \begin{Bmatrix} N_i N_i & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j N_j \end{Bmatrix}\right)\right)\{t_1\}$$
$$-\left(\frac{\rho c \Delta r}{\Delta\tau}\rho c \Delta r \sum_{p=1}^{n_p}\left(r_p w_p \begin{Bmatrix} N_i N_i & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j N_j \end{Bmatrix}\right)\right)\{t_0\} - 2 r_{\max} t_\infty \alpha \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = 0$$



$$K_{11} = \frac{k}{\Delta r}\sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta\tau}\sum_{p=1}^{n_p} N_i^2 r_p w_p$$
$$K_{12} = -\frac{k}{\Delta r}\sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta\tau}\sum_{p=1}^{n_p} N_i N_j r_p w_p$$
$$K_{21} = -\frac{k}{\Delta r}\sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta\tau}\sum_{p=1}^{n_p} N_i N_j r_p w_p$$
$$K_{22} = \frac{k}{\Delta r}\sum_{p=1}^{n_p} r_p w_p + \frac{c\rho\Delta r}{\Delta\tau}\sum_{p=1}^{n_p} N_j^2 r_p w_p + 2\alpha r_{\max}$$

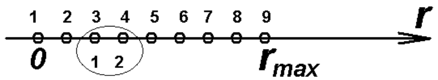
$$F_1 = -\frac{c\rho\Delta r}{\Delta\tau}\sum_{p=1}^{n_p}\left(N_i t_{i0} + N_j t_{j0}\right) N_i r_p w_p$$
$$F_2 = -\frac{c\rho\Delta r}{\Delta\tau}\sum_{p=1}^{n_p}\left(N_i t_{i0} + N_j t_{j0}\right) N_j r_p w_p + 2\alpha r_{\max} t_\infty.$$

Układ równań dla całego ośrodka

W celu otrzymania układu równań dla całego ośrodka należy dodawać do elementów globalnej macierzy odpowiednie elementy lokalnej macierzy wszystkich elementów:

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e}[K]^{(e)} \qquad \{F\} = \sum_{e=1}^{n_e}\{F\}^{(e)}$$

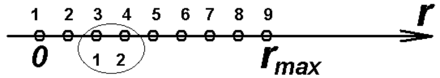
Przystępując do budowy macierzy sztywności dla całego ośrodka należy w pierwszej kolejności zmienić indeksy zgodnie z numeracją o numerach stopni swobody całego ośrodka. W tym celu konieczna jest informacja o numerach punktów węzłowych, przylegających do każdego z elementów. Dla elementu numer trzy informacja taka zakodowana jest w macierzy:



	1	2
1	3, 3	3, 4
2	4, 3	4, 4

Schemat podziału na elementy ilustrujący globalną i lokalną numerację węzłów

Miejsce komponentów macierzy elementu

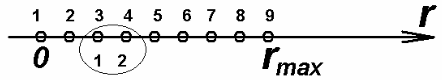


Dla ośrodka przedstawianego na rys miejsce komponentów macierzy elementu trzeciego pokazano w tabele

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Zadania praktyczne

Obliczyć globalną macierz układu równań dla siatki elementów, pokazanej na rys. za pomocą programu TEMP1d.



Założymy:

$r_{max} = 0.08$ m;

$\Delta r = 0.01$ m;

$\Delta \tau = 50$ s;

c = 700 J/(kg*K);

$\rho = 7800$ kg/m^3;

k = 25 W/mK;

$\alpha = 300$ W/m^2 K;

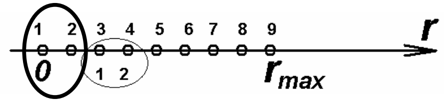
$t_0 = 100\ ^0$C;

$t_\infty = 200\ ^0$C.

Dla pierwszego elementu macierz H równa jest:

	1	2
1	28.64	-21.36
2	-21.36	35.92

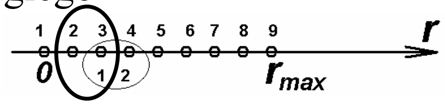
Miejsce komponentów macierzy elementu pierwszego



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	28.64	-21.36							
2	-21.36	35.92							
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

	1	2
1	28.64	-21.36
2	-21.36	35.92

Miejsce komponentów macierzy elementu drugiego



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	28.64	-21.36							
2	-21.36	35.92+ 93.20	-64.08						
3		-64.08	35.91						
4									
5									
6									
7									
8									
9									

	1	2
1	93.20	-64.08
2	-64.08	35.91

Macierz globalna

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	28.64	-21.36							
2	-21.36	129.12	-64.08						
3		-64.08	193.68	-106.80					
4			-106.80	387.36	-149.52				
5				-149.52	516.48	-192.24			
6					-192.24	645.60	-234.96		
7						-234.96	774.72	-277.68	
8							-277.68	903.84	-320.40
9								-320.40	583.84

Przykład opracowania oprogramowania i obliczeń

Rozpatrywane w poprzednim rozdziale zadanie przedstawione jest poniżej w postaci oprogramowania TEMP1d, napisanej w języku FORTRAN 90. Program główny służy jedynie do wczytywania danych do obliczeń z pliku DataInpTemp1d.txt. Wczytywane są następujące dane:

Rmin - promień minimalny wsadu, m

Rmax - promień maksymalny wsadu, m

AlfaAir - współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła (W/m2 C)

TempBegin - temperatura początkowa, C

TempAir - temperatura środowiska, C

TauMax - czas procesu, s

C - efektywne ciepło właściwe, J/(kgC)

K - współczynnik przewodzenia ciepła, W/(mC)

Ro - gęstość metalu, kg/(m^3).

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Dane do obliczeń testowych

Dane do obliczeń testowych z pliku DataInpTemp1d.txt przedstawiony są poniżej:

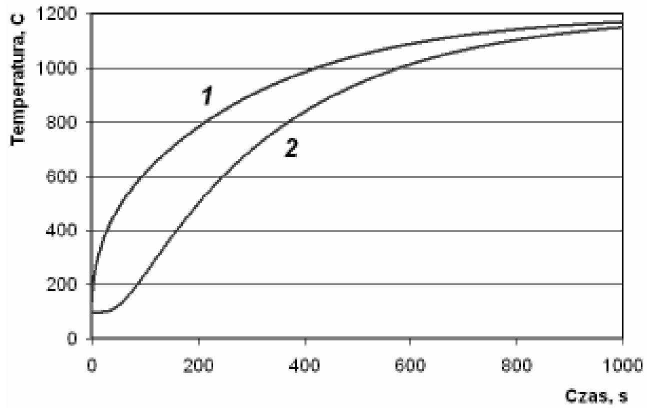
```
*****************************************************************************
0.0      Rmin, m
0.05     Rmax , m
300      AlfaAir, W/m2 K;
100      TempBegin C;
1200     TempAir  C;
700      C J/(kg*Ę);
7800     Ro kg/(m3);
25       K  W/(mĘ)
1800     TauMax s;
*****************************************************************************
```

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

```
do ie = 1, ne
        r(1) = vrtxCoordX(ie);
        r(2) = vrtxCoordX(ie+1);
        TempTau(1) = vrtxTemp(ie);
        TempTau(2) = vrtxTemp(ie+1);
        dR = r(2)-r(1);

        Alfa=0;
        if (ie==ne) Alfa = AlfaAir;

        H = 0;
        P = 0;
        do ip=1, Np
                Rp = N1(ip)*r(1) + N2(ip)*r(2);
                TpTau = N1(ip)*TempTau(1) + N2(ip)*TempTau(2);
! Obliczenie macierzy lokalnej
H(1,1) = H(1,1) + K*Rp*W(ip)/dR + 2*C*Ro*dR*Rp*W(ip)*N1(ip)**2    /dTau;
H(1,2) = H(1,2) - K*Rp*W(ip)/dR + 2*C*Ro*dR*Rp*W(ip)*N1(ip)*N2(ip)/dTau;
H(2,1) = H(1,2);
H(2,2) = H(2,2) + K*Rp*W(ip)/dR + 2*C*Ro*dR*Rp*W(ip)*N2(ip)**2 /dTau + 2*Alfa*Rmax;
P(1)   = P(1)   + 2*C*Ro*dR*TpTau*Rp*W(ip)*N1(ip)/dTau;
P(2)   = P(2)   + 2*C*Ro*dR*TpTau*Rp*W(ip)*N2(ip)/dTau + 2*Alfa*Rmax*TempAir;
        end do;

        aD(ie)   = aD(ie)   + H(1,1);
        aD(ie+1) = aD(ie+1) + H(2,2);
        aE(ie)   = aE(ie)   + H(1,2);
        aC(ie+1) = aC(ie+1) + H(2,1);
        aB(ie)   = aB(ie)   + P(1);
        aB(ie+1) = aB(ie+1) + P(2);
end do;
CALL DLSLTR (nh, aC, aD, aE, aB)
```

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Wyniki obliczenia procesu nagrzewania wsadu



Wyniki obliczenia procesu nagrzewania wsadu o przekroju okrągłym, 1 – warstwa powierzchniowa, 2 – punkcie centralnym przekroju wsadu.

Sformułowanie MES w postaci macierzowej

$$J=\int_V\left[\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right]dV+\int_S\frac{\alpha}{2}(t-t_\infty)^2dS+\int_S qtdS$$

$$J=\int_V\left[\frac{1}{2}\left(K_{xx}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+K_{yy}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+K_{zz}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right]dV+\int_S\frac{\alpha}{2}(t-t_\infty)^2dS+\int_S qtdS$$

$$\{g\}^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z}\end{bmatrix}\qquad Q=Q_{def}-c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\boxed{D=\begin{bmatrix}K_{xx} & 0 & 0\\ 0 & K_{yy} & 0\\ 0 & 0 & K_{zz}\end{bmatrix}}$$

$$J=\int_V\frac{1}{2}\left[\{g\}^T[D]\{g\}-2tQ\right]dV+\int_S\frac{\alpha}{2}(t-t_\infty)^2dS+\int_S qtdS$$

$$\boxed{J_e=\int_{V_e}\frac{1}{2}\left[\{g_e\}^T[D_e]\{g_e\}-2t_eQ_e\right]dV+\int_{S_e}\frac{\alpha}{2}(t_e-t_\infty)^2dS+\int_{S_e}qt_edS}\qquad J=\sum_{e=1}^{n_e}J_e$$

$$\boxed{J_e=\int_{V_e}\frac{1}{2}\left[\{g_e\}^T[D_e]\{g_e\}-2t_eQ_e\right]dV+\int_{S_e}\left[\frac{\alpha}{2}t_e^2-\alpha t_et_\infty+\frac{\alpha}{2}t_\infty^2\right]dS+\int_{S_e}qt_edS}$$

$$t_e=[N]\{t\}$$

$$\{g_e\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial t_e}{\partial x}\\ \frac{\partial t_e}{\partial y}\\ \frac{\partial t_e}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial z}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1\\ t_2\\ .\\ .\\ t_p\end{Bmatrix}\qquad \boxed{[B_e]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial [N]}{\partial x}\\ \frac{\partial [N]}{\partial y}\\ \frac{\partial [N]}{\partial z}\end{bmatrix}}\qquad \{t\}=\begin{Bmatrix}t_1\\ t_2\\ .\\ .\\ t_p\end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{g_e\}=[B_e]\{t\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}J_e&=\int_{V_e}\frac{1}{2}\{t\}^T[B_e]^T[D_e][B_e]\{t\}dV-\int_{V_e}Q[N]\{t\}dV+\\&+\int_{S_e}q[N]\{t\}dS+\int_{S_e}\frac{\alpha}{2}[N]^T\{t\}^T[N]\{t\}dS-\int_{S_e}\alpha\varphi_\infty[N]\{t\}dS+\int_{S_e}\frac{\alpha}{2}t_\infty^2dS\end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\{t\}}\left(\int_{V_e}\frac{1}{2}\{t\}^T[B_e]^T[D_e][B_e]\{t\}dV\right)=\int_{V_e}[B_e]^T[D_e][B_e]\{t\}dV}$$

$$\frac{\partial}{\partial\{t\}}\left(\int_{V_e}Q[N]\{t\}dV\right)=\int_{V_e}Q[N]^TdV$$

$$\frac{\partial}{\partial\{t\}}\left(\int_{S_e}q[N]\{t\}dS\right)=\int_{S_e}q[N]^TdS$$

$$\frac{\partial}{\partial\{t\}}\left(\int_{S_e}\frac{\alpha}{2}\{t\}^T[N]^T[N]\{t\}dS\right)=\int_{S_e}\alpha[N]^T[N]\{t\}dS$$

$$\frac{\partial}{\partial\{t\}}\left(\int_{S_e}\alpha t_\infty[N]\{t\}dS\right)=\int_{S_e}\alpha t_\infty[N]^TdS$$

$$\frac{\partial}{\partial\{t\}}\left(\int_{S_e}\frac{\alpha}{2}t_\infty^2dS\right)=0$$

$$\boxed{\frac{\partial J_e}{\partial\{t\}} = \{t\}\left(\int_{V_e}[B_e]^T[D_e][B_e]\,dV + \int_{S_e}\alpha[N]^T[N]dS\right) - \int_{V_e}Q[N]^T dV + \int_{S_e}q[N]^T dS - \int_{S_e}\alpha\varphi_\infty[N]^T dS = 0}$$

$$\frac{\partial J_e}{\partial\{t\}} = [H_e]\{t\} + \{F_e\} = 0$$

$$[D_e] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[H_e] = \int_{V_e}[B_e]^T[D_e][B_e]\,dV + \int_{S_e}\alpha[N]^T[N]dS$$

$$\{F_e\} = -\int_{V_e}Q[N]^T dV + \int_{S_e}q[N]^T dS - \int_{S_e}\alpha t_\infty[N]^T dS$$

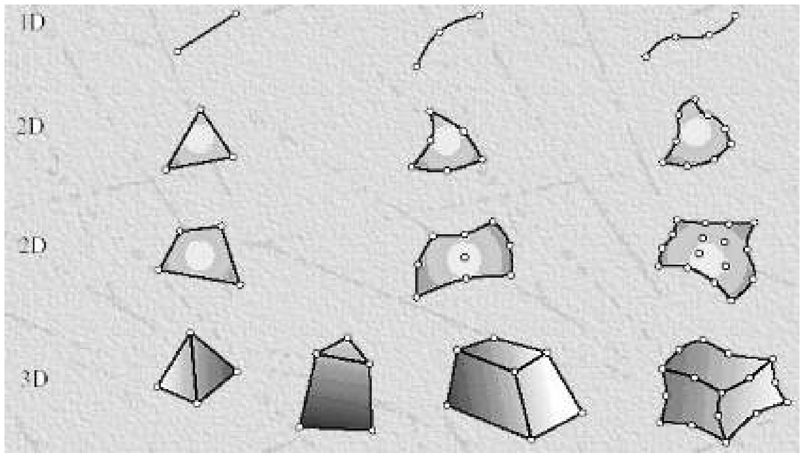
$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} \\ \frac{\partial[N]}{\partial y} \\ \frac{\partial[N]}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial J}{\partial\{t\}} = \sum_{e=1}^{n_e}\left([H_e]\{t\} + \{F_e\}\right) = 0$$

$$\boxed{[H]\{t\} + \{F\} = 0}$$

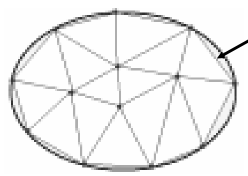
Elementy wyższego stopnia

Typy elementów skończonych



Motywacja

1. Błąd aproksymacji

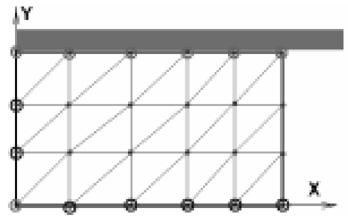


$\Delta S_j \quad \Delta S = \sum_{N_j} \Delta S_j$

2. Błąd różniczkowana

$$\sigma_x = \sigma + \frac{2\sigma_i}{3\dot{\varepsilon}_i}\dot{\varepsilon}_x; \quad \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

3. Locking

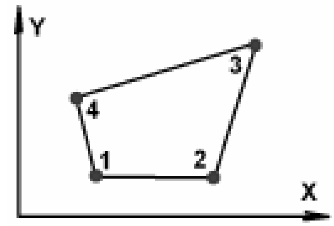


DOF = 2*10+7=27

Ncond = ne = 30

DOF<Ncond

Element czworokąty



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq const$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq const$$

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1$$
$$\varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 x_2 y_2$$
$$\varphi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 x_3 y_3$$
$$\varphi_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 x_4 y_4$$

Funkcje kształtu ?

$$\varphi = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2 + N_3\varphi_3 + N_4\varphi_4$$

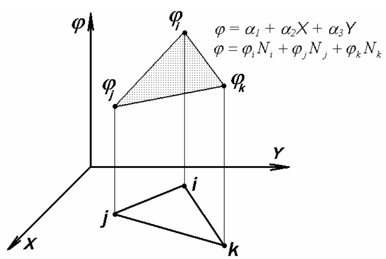
Funkcje kształtu:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y$$

Przy $X=X_i$, $Y=Y_i$ $\varphi = \varphi_i$, $\Rightarrow$ $\varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i$;

przy $X=X_j$, $Y=Y_j$ $\varphi = \varphi_j$, $\Rightarrow$ $\varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j$,

przy $X=X_k$, $Y=Y_k$ $\varphi = \varphi_k$, $\Rightarrow$ $\varphi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k$



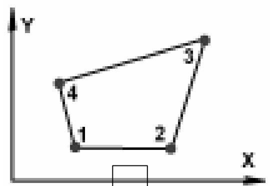
$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}\left[(X_jY_k - X_kY_j)\varphi_i + (X_kY_i - X_iY_k)\varphi_j + (X_iY_j - X_jY_i)\varphi_k\right]$$

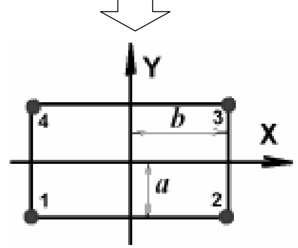
$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}\left[(Y_j - Y_k)\varphi_i + (Y_k - Y_i)\varphi_j + (Y_i - Y_j)\varphi_k\right]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}\left[(X_k - X_j)\varphi_i + (X_i - X_k)\varphi_j + (X_j - X_i)\varphi_k\right]$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} =$$
$$= X_jY_k + X_iY_j + X_kY_i - X_jY_i - X_kY_j - X_iY_k$$

Element prostokątny





$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$\alpha_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}$$

$$\alpha_2 = \frac{-\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4}{4b}$$

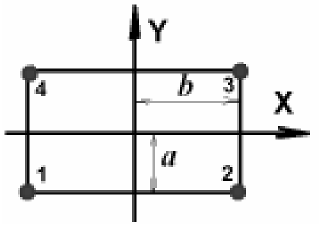
$$\alpha_3 = \frac{-\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4a}$$

$$\alpha_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4}{4ab}$$

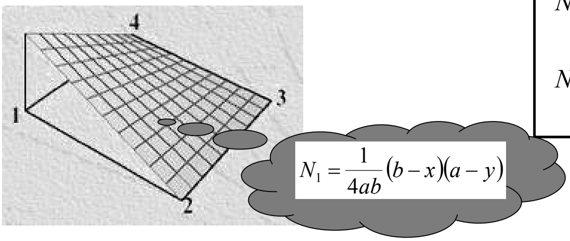
Funkcje kształtu

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$\varphi = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2 + N_3\varphi_3 + N_4\varphi_4$$

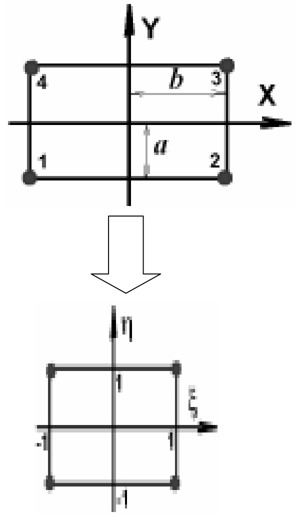


$$N_1 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y)$$
$$N_2 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y)$$
$$N_3 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y)$$
$$N_4 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y)$$



Funkcje kształtu

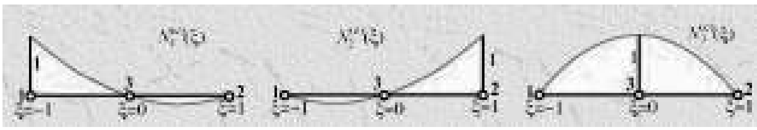
$$N_1 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{b}\right)\left(1+\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1+\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$



$$\xi = \frac{x}{b} \quad \eta = \frac{y}{a}$$

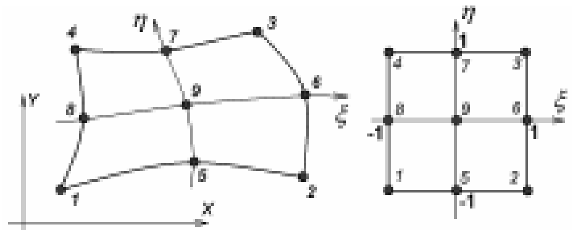
$$x = b\xi \quad y = a\eta$$

Typy elementów skończonych (2-go stopnia)



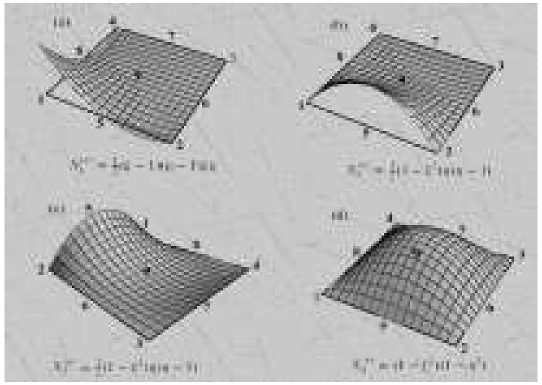
$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad N_3(\xi) = 1-\xi^2$$

Typy elementów skończonych (2-go stopnia)

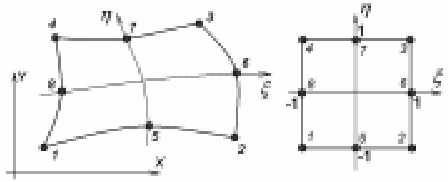


$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$$
$$N_2 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta$$
$$N_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta$$
$$N_5 = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$
$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$
$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta$$
$$N_8 = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$
$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

Typy elementów skończonych (2-go stopnia)



Typy elementów skończonych (2-go stopnia)



$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

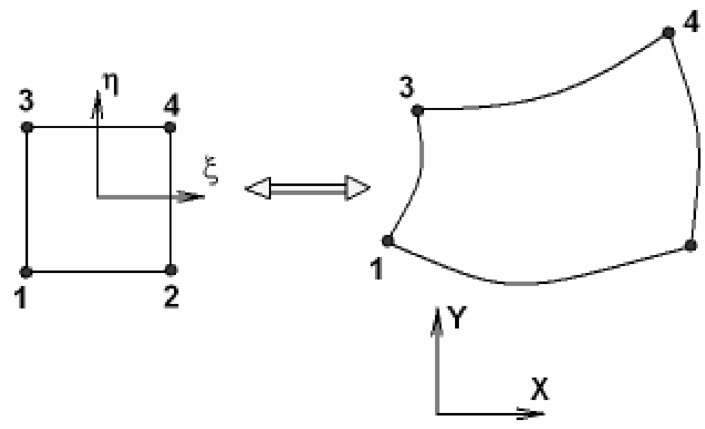
$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi).$$

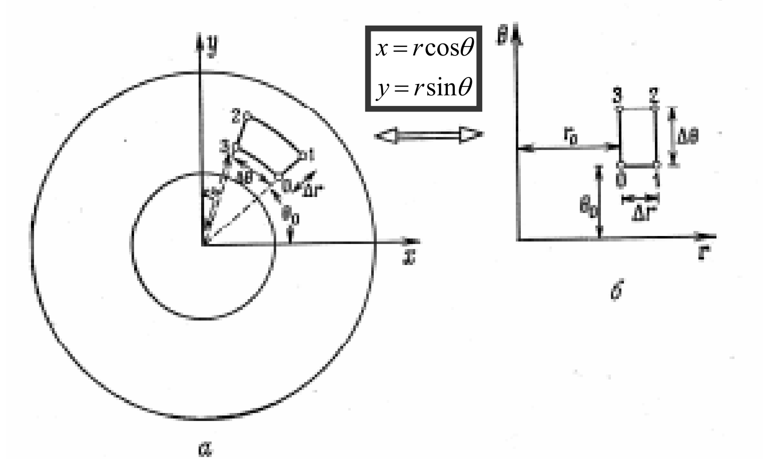
Przekształcenie izoparametryczne

Odbicie (przekształcenie)

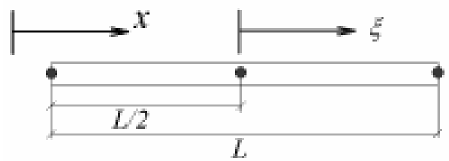


Formuły przekształcenia :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



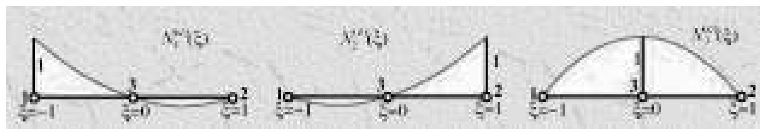
Matryca Jakobiego



$$-1 \le \xi \le 1$$

$$X = X(\xi) \qquad \xi = \xi(x)$$

$$J = \left|\frac{dX(\xi)}{d\xi}\right| \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial Y(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial Y(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{vmatrix} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial Y(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial Z(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial Y(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial Z(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$



$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \qquad N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \qquad N_3(\xi) = 1-\xi^2$$

$$x = x(\xi) = N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 \qquad \frac{\partial N_i}{\partial x} = ?$$

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx}\frac{dx(\xi)}{d\xi} \qquad \frac{dN_i}{dx} = \frac{1}{\frac{dx(\xi)}{d\xi}}\frac{dN_i(\xi)}{d\xi}$$

$$[J] = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi}X_1 + \frac{dN_2}{d\xi}X_2 + \frac{dN_3}{d\xi}X_3$$

$$\frac{dN_i}{dx} = [J]^{-1}\frac{dN_i}{d\xi}$$

Obliczenie pochodnych

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\int_S \mathrm{dxdy} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det J d\xi d\eta}$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V = \int_V dXdYdZ = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det[J] d\xi d\eta d\zeta}$$

Obliczenie całek

$$\int_S \mathrm{dxdy} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det J d\xi d\eta$$

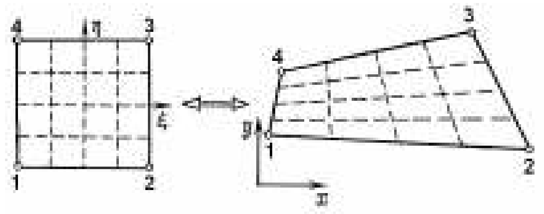
$$V = \int_V dXdYdZ = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det[J] d\xi d\eta d\zeta$$

Całkowanie funkcji f(X,Y) można wykonać za pomocą następującej zasady:

$$\int_S f(X,Y) dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\big(X(\xi,\eta), Y(\xi,\eta)\big) \det[J] d\xi d\eta$$

$$\int_S \frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial N_j}{\partial X} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \det[J] d\xi d\eta$$

Przekształcenie izoparametryczne



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$x = \sum_{i=1}^{N_{nodes}} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

$$y = \sum_{i=1}^{N_{nodes}} N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4$$

Zadanie

X_1 = 1 mm
Y_1 = 1 mm

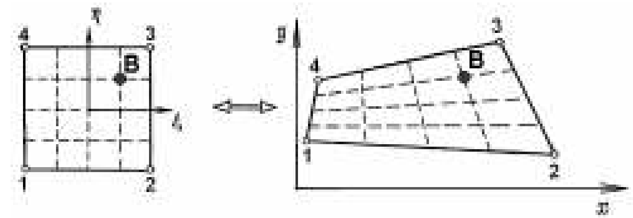
X_2 = 3 mm
Y_2 = 1 mm

X_3 = 4 mm
Y_3 = 4 mm

X_4 = 0.5 mm
Y_4 = 4 mm

ξ_B=0.5
η_B=0.5

X_B, Y_B = ?



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) = \frac{1}{16}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) = \frac{1}{4}(1+0.5)(1-0.5) = \frac{3}{16}$$

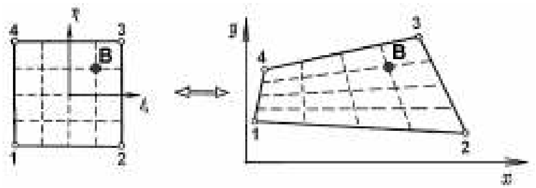
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) = \frac{1}{4}(1+0.5)(1+0.5) = \frac{9}{16}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) = \frac{1}{4}(1-0.5)(1+0.5) = \frac{3}{16}$$

$$N_1+N_2+N_3+N_4=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{9}{16}+\frac{3}{16}=1$$

$$x_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_i x_i=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4=\frac{1}{16}1+\frac{3}{16}3+\frac{9}{16}4+\frac{3}{16}0.5=2.59375$$

$$y_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_i y_i=N_1y_1+N_2y_2+N_3y_3+N_4y_4=\frac{1}{16}1+\frac{3}{16}1+\frac{9}{16}4+\frac{3}{16}4=3.25$$



Określić wartość naprężenia w zadanym punkcie B

Zadanie

σ₁ = 40 MPa
X_1 = 1 mm
Y_1 = 1 mm

σ_2 = 34 MPa
X_2 = 3 mm
Y_2 = 1 mm

σ_3 = 46 MPa
X_3 = 4 mm
Y_3 = 4 mm

σ_4 = 32 MPa
X_4 = 0.5 mm
Y_4 = 4 mm

ξ_B=0.5
η_B=0.5

σ_B, X_B, Y_B = ?

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)=\frac{1}{16}$$

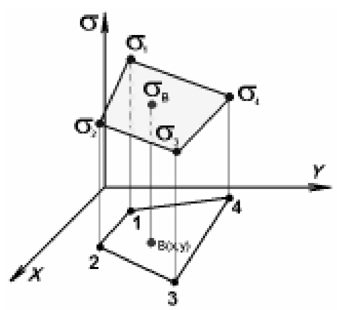
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)=\frac{1}{4}(1+0.5)(1-0.5)=\frac{3}{16}$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)=\frac{1}{4}(1+0.5)(1+0.5)=\frac{9}{16}$$

$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)=\frac{1}{4}(1-0.5)(1+0.5)=\frac{3}{16}$$

$$\sigma_B=\sigma_1N_1+\sigma_2N_2+\sigma_3N_3+\sigma_4N_4=$$

$$40\frac{1}{16}+34\frac{3}{16}+46\frac{9}{16}+32\frac{3}{16}=40.75$$



$$x_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_ix_i=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4=\frac{1}{16}1+\frac{3}{16}3+\frac{9}{16}4+\frac{3}{16}0.5=2.59375$$

$$y_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_iy_i=N_1y_1+N_2y_2+N_3y_3+N_4y_4=\frac{1}{16}1+\frac{3}{16}1+\frac{9}{16}4+\frac{3}{16}4=3.25$$

Określić wartość naprężenia w zadanym punkcie B

Zadanie

σ_1 = 40 MPa
X_1 = 1 mm
Y_1 = 1 mm

σ_2 = 34 MPa
X_2 = 3 mm
Y_2 = 1 mm

σ_3 = 46 MPa
X_3 = 4 mm
Y_3 = 4 mm

σ_4 = 32 MPa
X_4 = 0.5 mm
Y_4 = 4 mm

X_B=2.5
Y_B=3.25

σ_B, ξ_B, η_B = ?

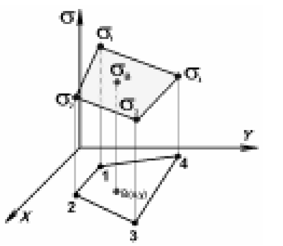
$$\sigma_B=\sigma_1N_1+\sigma_2N_2+\sigma_3N_3+\sigma_4N_4$$

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$



$$x_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_ix_i=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4=2.5$$

$$y_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_iy_i=N_1y_1+N_2y_2+N_3y_3+N_4y_4=3.25$$

$$x_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_ix_i=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4=\frac{1}{4}(1-\xi_B)(1-\eta_B)x_1+\frac{1}{4}(1+\xi_B)(1-\eta_B)x_2+\frac{1}{4}(1+\xi_B)(1+\eta_B)x_3+\frac{1}{4}(1-\xi_B)(1+\eta_B)x_4=$$

$$=\frac{1}{4}\left[x_1+x_2+x_3+x_4+\eta_B(-x_1-x_2+x_3+x_4)+\xi_B(-x_1+x_2+x_3-x_4)+\xi_B\eta_B(x_1-x_2+x_3-x_4)\right]$$

$$y_B=\sum_{i=1}^{N_{nodes}}N_iy_i=N_1y_1+N_2y_2+N_3y_3+N_4y_4=\frac{1}{4}(1-\xi_B)(1-\eta_B)y_1+\frac{1}{4}(1+\xi_B)(1-\eta_B)y_2+\frac{1}{4}(1+\xi_B)(1+\eta_B)y_3+\frac{1}{4}(1-\xi_B)(1+\eta_B)y_4=$$

$$=\frac{1}{4}\left[y_1+y_2+y_3+y_4+\eta_B(-y_1-y_2+y_3+y_4)+\xi_B(-y_1+y_2+y_3-y_4)+\xi_B\eta_B(y_1-y_2+y_3-y_4)\right]$$

$$2.5=\frac{1}{4}\left[1+3+4+0.5+\eta_B(-1-3+4+0.5)+\xi_B(-1+3+4-0.5)+\xi_B\eta_B(1-3+4-0.5)\right]=\frac{1}{4}\left[8.5+\eta_B(0.5)+\xi_B(5.5)+\xi_B\eta_B(1.5)\right]$$

$$3.25=\frac{1}{4}\left[1+1+4+4+\eta_B(-1-1+4+4)+\xi_B(-1+1+4-4)+\xi_B\eta_B(1-1+4-4)\right]=\frac{1}{4}\left[10+6\eta_B+0\xi_B+0\xi_B\eta_B\right]$$

$$3.25=\frac{1}{4}\left[1+1+4+4+\eta_B(-1-1+4+4)+\xi_B(-1+1+4-4)+\xi_B\eta_B(1-1+4-4)\right]=\frac{1}{4}\left[10+6\eta_B+0\xi_B+0\xi_B\eta_B\right]$$

$$\eta_B=\frac{4\cdot 3.25-10}{6}=0.5$$

$$2.5=\frac{1}{4}\left[1+3+4+0.5+\eta_B(-1-3+4+0.5)+\xi_B(-1+3+4-0.5)+\xi_B\eta_B(1-3+4-0.5)\right]=\frac{1}{4}\left[8.5+\eta_B(0.5)+\xi_B(5.5)+\xi_B\eta_B(1.5)\right]$$

$$2.5=\frac{1}{4}\left[8.5+0.25+\xi_B 2.75+\xi_B 0.75\right]$$

$$\xi_B=\frac{4\cdot 2.5-8.75}{3.5}=0.357$$

$$\sigma_B=\sigma_1 N_1+\sigma_2 N_2+\sigma_3 N_3+\sigma_4 N_4$$

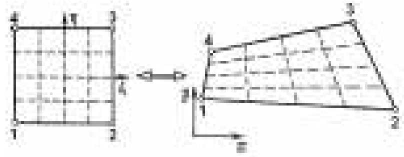
Określić pole elementu

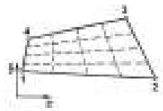
X_1 = 1 mm
Y_1 = 1 mm

X_2 = 3 mm
Y_2 = 1 mm

X_3 = 4 mm
Y_3 = 4 mm

X_4 = 0.5 mm
Y_4 = 4 mm





$$S=\int_S \mathrm{dxdy}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det J d\xi d\eta$$

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$x=\sum_{i=1}^{N_{nodes}} N_i x_i \qquad y=\sum_{i=1}^{N_{nodes}} N_i y_i$$

$$\det J=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}$$

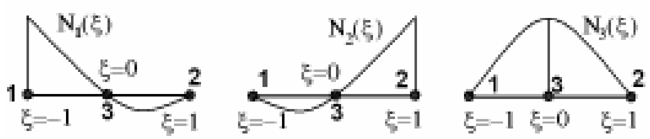
Określić pole elementu

$$\det J=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \qquad x=\sum_{i=1}^{N_{nodes}} N_i x_i=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{x_1}{\partial \xi}\left(\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\right)+\frac{x_2}{\partial \xi}\left(\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\right)+$$
$$+\frac{x_3}{\partial \xi}\left(\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\right)+\frac{x_4}{\partial \xi}\left(\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\right)=$$
$$\boxed{=x_1\left(-\frac{1}{4}(1-\eta)\right)+x_2\left(\frac{1}{4}(1-\eta)\right)+x_3\left(\frac{1}{4}(1+\eta)\right)+ +x_4\left(-\frac{1}{4}(1+\eta)\right)}$$

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Elementy subparametryczne, izoparametryczne, superparametryczne



$$\varphi=N_1\varphi_1+N_2\varphi_2+N_3\varphi_3$$
$$x=f(\xi)=N_1X_1+N_2X_2$$
subparametryczne

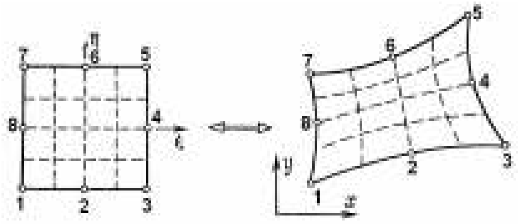
$$\varphi=N_1\varphi_1+N_2\varphi_2+N_3\varphi_3$$
$$x=f(\xi)=N_1X_1+N_2X_2+N_3X_3$$
izoparametryczne

$$\varphi=N_1\varphi_1+N_2\varphi_2$$
$$x=f(\xi)=N_1X_1+N_2X_2+N_3X_3$$
superparametryczne

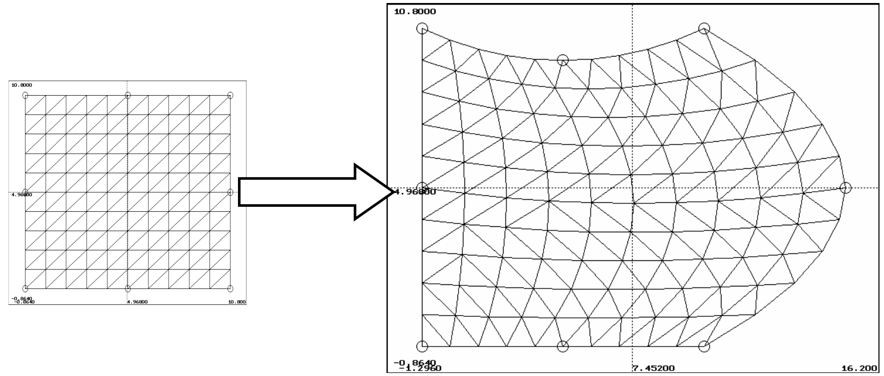
Przekształcenie izoparametriczne (2-go stopnia)

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)$$
$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$
$$N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$
$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$
$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$
$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1)$$
$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

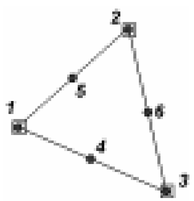
$$x = \sum_{i=1}^{N_{nodes}} N_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{N_{nodes}} N_i y_i$$

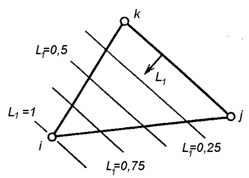


Dyskretyzacja ośrodka za dopomogę przekształcenia 2-go stopnia:



Elementy trójkątny





$$N_1 = L_1(2L_1-1)$$
$$N_2 = L_2(2L_2-1)$$
$$N_3 = L_3(2L_3-1)$$
$$N_4 = 4L_1L_3$$
$$N_5 = 4L_1L_2$$
$$N_6 = 4L_2L_3$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$
$$L_3 = 1 - L_1 - L_2$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_1} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_1}$$
$$\frac{\partial N_i}{\partial L_2} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_2}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix}$$

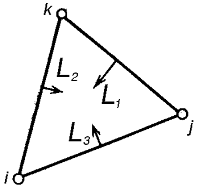
$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \qquad J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial L_2} & -\frac{\partial y}{\partial L_1} \\ -\frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial x}{\partial L_1} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = L_1(2L_1-1)$$
$$N_2 = L_2(2L_2-1)$$
$$N_3 = L_3(2L_3-1)$$
$$N_4 = 4L_1L_3$$
$$N_5 = 4L_1L_2$$
$$N_6 = 4L_2L_3$$

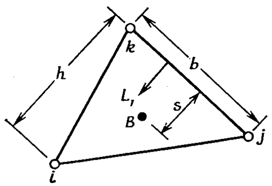
$$L_3 = 1 - L_1 - L_2$$

L – współrzędne

Dla elementów trójkątnych często jest używany tzw. naturalny układ współrzędnych (lub inaczej ***L*** – współrzędne), który wyznaczony jest przez trzy względne współrzędne

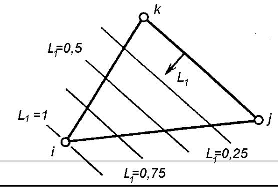


Każda współrzędna naturalna stanowi stosunek odległości wybranego punktu elementu do jednej z jego stron ***s*** do wysokości ***h***



ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

L – współrzędne

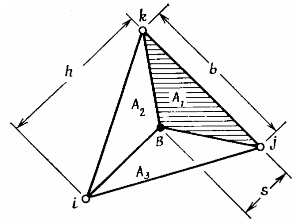


$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A_1 = \frac{bs}{2}$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{s}{h} = L_1 \qquad L_1 = \frac{A_1}{A}$$

Wartości współrzędnej naturalnej L



Interpretacja geometryczna

$$A_1 + A_2 + A_3 = A$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$N_i = L_1 \quad L_1 = 1$$

$$N_j = L_2 \quad L_1 = 0$$

$$N_k = L_3 \quad L_1 = 0$$

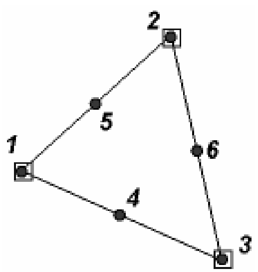
$$x = L_1 X_i + L_2 X_j + L_3 X_k$$

$$y = L_1 Y_i + L_2 Y_j + L_3 Y_k$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Element 6-węzlowy



$$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$$

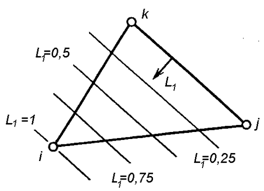
$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_3$$

$$N_5 = 4L_1L_2$$

$$N_6 = 4L_2L_3$$



ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

3d Element 4-węzlowy

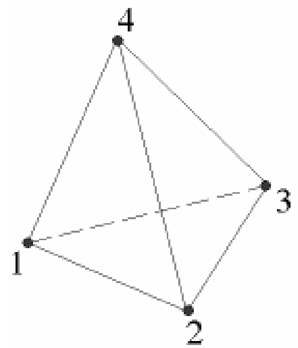
$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$N_3 = L_3$$

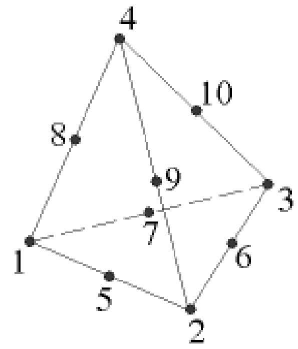
$$N_4 = L_4$$



3d Element 10-węzlowy

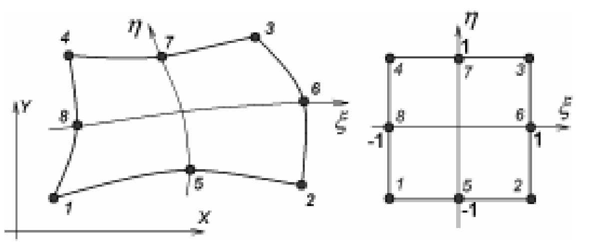
$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$$
$$N_2 = (2L_2 - 1)L_2$$
$$N_3 = (2L_3 - 1)L_3$$
$$N_4 = (2L_4 - 1)L_4$$

$$N_5 = 4L_1L_2 \quad N_8 = 4L_1L_4$$
$$N_6 = 4L_2L_3 \quad N_9 = 4L_2L_4$$
$$N_7 = 4L_1L_3 \quad N_{10} = 4L_3L_4$$



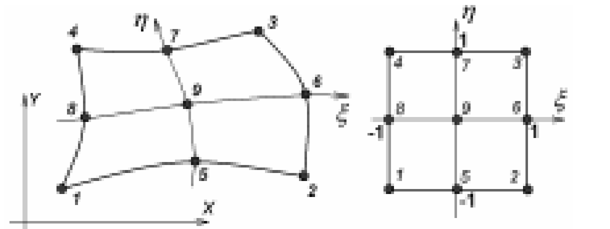
$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

FUNKCJI KSZTAŁTU ELEMENTÓW WYŻSZEGO STOPNIA



Numeracja węzłów dwuwymiarowego 8- węzłowego elementu skończonego w układzie globalnym i lokalnym.

$$N_1=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$
$$N_4=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1)$$
$$N_5=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)$$
$$N_6=\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi)$$
$$N_7=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta)$$
$$N_8=\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi).$$



Numeracja węzłów dwuwymiarowego 9- węzłowego elementu skończonego w układzie globalnym i lokalnym.

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$$
$$N_2=-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta$$
$$N_4=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta$$
$$N_5=-\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)\eta$$
$$N_6=\frac{1}{2}(1+\xi)\left(1-\eta^2\right)\xi$$
$$N_7=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta)\eta$$
$$N_8=-\frac{1}{2}(1-\xi)\left(1-\eta^2\right)\xi$$
$$N_9=\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)$$

Elementy typu Lagranga, przykładem którego jest rozpatrywany element, są oparte o interpolujący wielomian Lagranga:

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

jaki przyjmuje wartości:
$$L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, gdy: i=j\\ 0, gdy: i\neq j\end{cases}$$

Więc, wielomian Lagranga spełnia kryterium, jaki jest właściwy dla funkcji kształtu i na jego podstawie można stworzyć szereg funkcji kształtu dla różnych elementów, zakładając, że $\boldsymbol{L_i=N_i}$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)L_i(x)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i N_i$$

Przykład

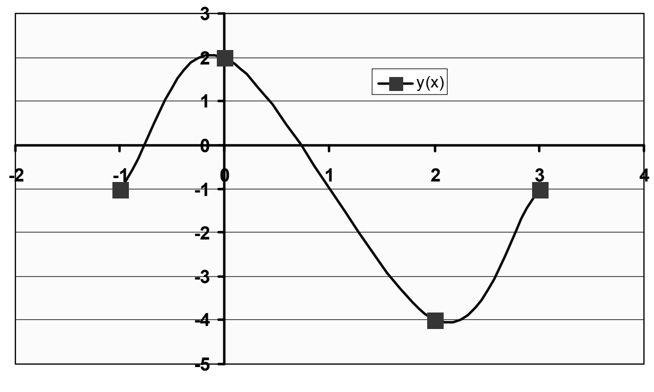
Zbudować wielomian interpolacyjny Lagrange`a,
który dla x = -1; 0; 2; 3
przyjmuje wartości y(x)= -1; 2; -4; -1

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$y(x)=\sum_{i=0}^{4}y(x_i)L_i(x)=(-1)\frac{x(x-2)(x-3)}{(-1)(-3)(-4)}+2\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{1(-2)(-3)}+$$
$$-4\frac{(x+1)x(x-3)}{3\cdot 2\cdot(-1)}-1\frac{(x+1)x(x-2)}{4\cdot 3\cdot 1}=x^3-3x^2-x+2$$

Zbudować wielomian interpolacyjny Lagrange`a,
który dla $\boldsymbol{x}$ = -1; 0; 2; 3
przyjmuje wartości ***y(x)*= -**1; 2; -4; -1

$$y = x^3-3x^2-x+2$$

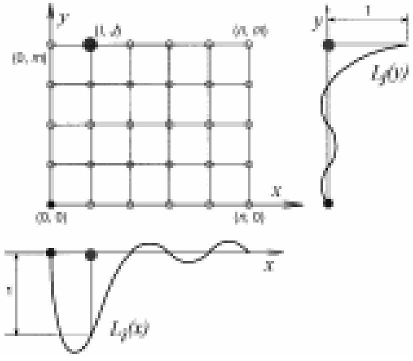


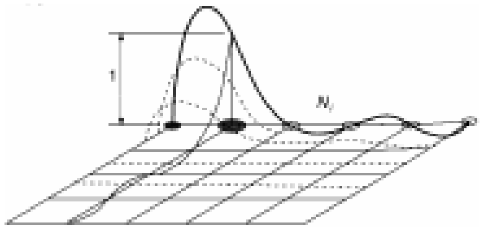
W przypadku wykorzystania wieloamina Lagranga do otrzymania funkcji kształtu elementu dwuwymiarowego trzeba wykorzystać wielomian względem współrzędnych X i Y:

$$L_j(y)=\frac{(y-y_0)(y-y_1)..(y-y_{j-1})(y-y_{j+1})..(y-y_m)}{(y_j-y_0)(y_j-y_1)..(y_j-y_{j-1})(y_j-y_{j+1})..(y_j-y_m)}$$

$$N_k=L_{ij}(x,y)=L_i(x)L_j(y)$$

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})..(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)..(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})..(x_i-x_n)}$$





Wykres funkcji kształtu, otrzymanej za pomocą wieloamina Lagranga.

Całkowanie numeryczne w MES

Operacji otrzymania układu równani MES są związane z całkowaniem po objętości elementów. Ponieważ forma strefy całkowania oraz całkowany wzór są skomplikowane, całkowanie numeryczne prawie zawsze nie może być zastosowano. Jeżeli wykorzystano przekształcenie układu współrzędnych, sprawą komplikuje pomnożenie całkowanego wzoru na wyznacznik matrycy Jacobiego. Opisane problemy powodują, że w MES jest używane całkowanie numeryczne, przy którym całka zamieniana na kwadraturą. Przy wyznaczeniu takich kwadratur w jedno-, dwu- oraz trójwymiarowych zadaniach jest wykorzystywane sumowanie wartości całkowanego wzoru, obliczonego w węzłach całkowania i pomnożonych na odpowiedni wagowe współczynniki:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx W_0 f(\xi_0)+W_1 f(\xi_1)+\ldots+W_n f(\xi_n)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \approx W_0 f(\xi_0,\eta_0)+W_1 f(\xi_1,\eta_1)+\ldots+W_n f(\xi_n,\eta_n)$$

Warto zwrócić uwagę, że wartości ξ_i η_i są zadane „a priori" i zazwyczaj wybierane na równej odległości między sobą.

Formuły Niutona-Kotesa

W celu wyznaczenia W_i wykorzystywana jest następująca metoda:

Rozpatrujemy nabór punktów całkowania ξ_0 ξ_1 ξ_n i znajdziemy wielomian $F_n(\xi)$ stopnia n, równy $f(\xi)$ w każdym z rozpatrywanych punktów. W tym celu zapiszemy wielomian: $F_n(\xi)=a_0+a_1\xi+\ldots+a_n\xi^n$

$$\left.\begin{aligned} f(\xi_0)&=a_0+a_1\xi_0+\ldots+a_n\xi_0^n\\ f(\xi_1)&=a_0+a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_1^n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(\xi_n)&=a_0+a_1\xi_n+\ldots+a_n\xi_n^n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dalej za pomocą analitycznego całkowania funkcji można aproksymować wartość całki:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \int_{-1}^{1} F_n(\xi)d\xi = 2a_0+\frac{2a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}\left(1-(-1)^{n+1}\right) \qquad (2)$$

Jeżeli podstawić do tego wzoru (2) wartości a_i, uzyskane po rozwiązaniu układu (1), to otrzymamy przybliżone formule do całkowania typu

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx W_0 f(\xi_0)+W_1 f(\xi_1)+\ldots+W_n f(\xi_n)$$

W MES, jednak, podczas całkowania warto minimalizować liczbę punktów całkowania ze względu na czas obliczeń

Zamiast tego, żeby wyznaczać punkty $\xi_0 \quad \xi_1 \quad \xi_n$

„a priori", spróbujemy wyznaczyć ich w taki sposób, żeby aproksymacja dawała ścisły wynik całki wtedy, kiedy

$F_p(\xi)$ - wielomian stopnia nie wyżej p, gdzie wartość p (p>=n) również jest wyznaczana.

$$F_p(\xi) = a_0 + a_1\xi + ... + a_p\xi^p$$

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx W_0 f(\xi_0) + W_1 f(\xi_1) + ... + W_n f(\xi_n)$$

$$\int_{-1}^{1} F_p(\xi)d\xi \approx W_0\left(a_0 + a_1\xi_0 + ... + a_p\xi_0^p\right) + W_1\left(a_0 + a_1\xi_1 + ... + a_p\xi_1^p\right) + ... + W_n\left(a_0 + a_1\xi_n + ... + a_p\xi_n^p\right)$$

Z innej strony, dokładną wartość tej całki można obliczyć za pomocą (2):

$$\int_{-1}^{1} F_p(\xi)d\xi = 2a_0 + \frac{2a_2}{3} + ... + \frac{a_p}{p+1}\left(1 - (-1)^{p+1}\right)$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

$$\int_{-1}^{1} F_p(\xi)d\xi \approx W_0\left(a_0 + a_1\xi_0 + ... + a_p\xi_0^p\right) + W_1\left(a_0 + a_1\xi_1 + ... + a_p\xi_1^p\right) + ... + W_n\left(a_0 + a_1\xi_n + ... + a_p\xi_n^p\right)$$

$$\int_{-1}^{1} F_p(\xi)d\xi = 2a_0 + \frac{2a_2}{3} + ... + \frac{a_p}{p+1}\left(1 - (-1)^{p+1}\right)$$

Porównanie współczynników a_i w tych wzorach daje możliwości stwierdzić, że pierwsza formuła daje dokładną wartość całki dla dowolnego wielomianu, jeżeli:

$$\left.\begin{array}{l} W_0 + W_1 + ... + W_n = 2 \\ W_0\xi_0 + W_1\xi_1 + ... + W_n\xi_n = 0 \\ .... \\ W_0\xi_0^p + W_1\xi_1^p + ... + W_n\xi_n^p = \left(\dfrac{1}{p+1}\right)\left(1-(-1)^{p+1}\right) \end{array}\right\}$$

W otrzymanym układzie p+1 równani wartości W_i i ξ_i, i=0,1,... n są niewiadomymi. Z tego wynika, że układ ma rozwiązanie tylko w tym przypadku, kiedy liczba równani równa liczbie niewiadomych, czyli:

$$p + 1 = 2(n+1)$$

Uzyskana zależność daje możliwość wyznaczyć ilość punktów całkowania w zależności od stopnia wieloamina, całkowanego za pomocą rozpatrywanego schematu.

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Tabela 3.1

Stopień ściśle całkowanego wielomianu w zależności od Liczba punktów całkowania.

Liczba punktów całkowania	Stopień ściśle całkowanego wielomianu
1	1
2	3
3	5
4	7

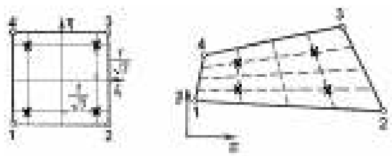
Dla konkretnych wartości n z układu równani można uzyskać W i ξ_i.
Na przykład, przy n=0, równania są zapisane tak:

$$W_0 = 2 \qquad W_0\xi_0 = 0 \qquad \xi_0 = 0$$

Można było przypuścić, że przy jednemu punkcie całkowania ten punkt trzeba rozmieścić w centrze elementu. Taki schemat całkowania jest ścisłym dla wielomianów pierwszego stopnia.

Natomiast przy n=1 mamy

$$\left.\begin{array}{l} W_0 + W_1 = 2 \\ W_0\xi_0 + W_1\xi_1 = 0 \\ W_0\xi_0^2 + W_1\xi_1^2 = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \qquad \xi_1 = -\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577350269 \qquad W_0 = W_1 = 1,0$$



ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

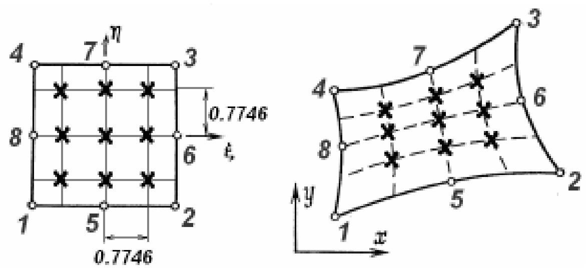
Natomiast przy n=2 mamy

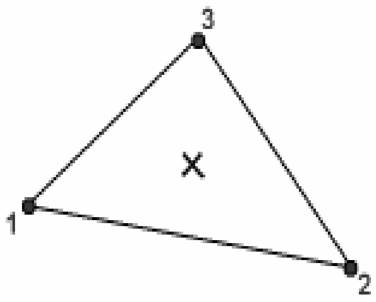
$$\xi_2 = -\xi_0 = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,774596669$$

$$\xi_1 = 0,0$$

$$W_0 = W_2 = \frac{5}{9} \approx 0,5555555556$$

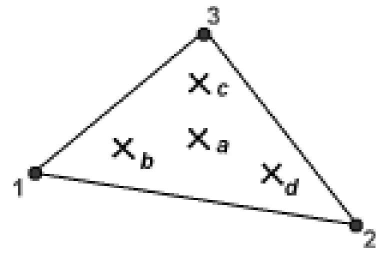
$$W_1 = \frac{8}{9} \approx 0,8888888889.$$





Rozwiązanie układu dla n=0 daje wynik
L_1 =1/3; L_2=1/3; L_3=1/3; W=1/2.

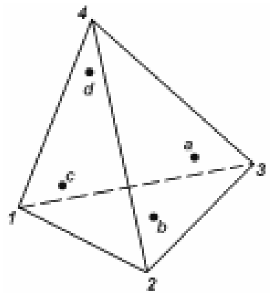
ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009



Natomiast, dla n=1 mamy:

a) L_1 =1/3;	L_2=1/3;	L_3=1/3;	W= -27/96
b) L_1 =11/15;	L_2=2/15;	L_3=2/15;	W= 25/96
c) L_1 =2/15;	L_2=2/15;	L_3=11/15;	W= 25/96
d) L_1 =2/15;	L_2=11/15;	L_3=2/15;	W=25/96

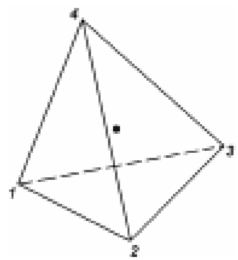
ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009



Dla układu 3d przy n=1 mamy :
α = 0.58541020; β = 0.13819660;

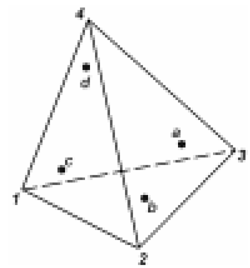
a) $L_1 = \alpha$;	$L_2=\beta$;	$L_3=\beta$;	$L_4=\beta$;	W=1/4;
b) $L_1 = \beta$;	$L_2= \alpha$;	$L_3=\beta$;	$L_4=\beta$;	W=1/4;
c) $L_1 = \beta$;	$L_2=\beta$;	$L_3= \alpha$;	$L_4=\beta$;	W=1/4 ;
d) $L_1 = \beta$;	$L_2=\beta$;	$L_3=\beta$;	$L_4= \alpha$;	W=1/4 ;

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009



Dla układu 3d przy n=0 mamy :

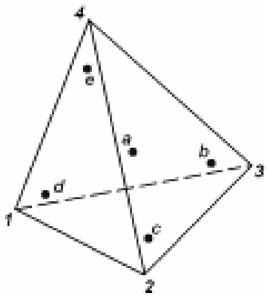
L_1 =1/4; L_2=1/4; L_3=1/4; L_4=1/4; W=1;



Dla układu 3d przy n=1 mamy :

α = 0.58541020; β = 0.13819660;

a) $L_1 = \alpha$; $L_2=\beta$; $L_3=\beta$; $L_4=\beta$; W=1/4;
b) $L_1 = \beta$; $L_2= \alpha$; $L_3=\beta$; $L_4=\beta$; W=1/4;
c) $L_1 = \beta$; $L_2=\beta$; $L_3= \alpha$; $L_4=\beta$; W=1/4 ;
d) $L_1 = \beta$; $L_2=\beta$; $L_3=\beta$; $L_4= \alpha$; W=1/4 ;



a) $L_1 = 1/4$; $L_2=1/4$; $L_3=1/4$; $L_4=1/4$; $W = -16/20$;

b) $L_1 = 1/3$; $L_2=1/6$; $L_3=1/6$; $L_4=1/6$; $W = 9/20$;

c) $L_1 = 1/6$; $L_2=1/3$; $L_3=1/6$; $L_4=1/6$; $W = 9/20$;

d) $L_1 = 1/6$; $L_2=1/6$; $L_3=1/3$; $L_4=1/6$; $W = 9/20$;

e) $L_1 = 1/6$; $L_2=1/6$; $L_3=1/6$; $L_4=1/3$; $W = 9/20$;

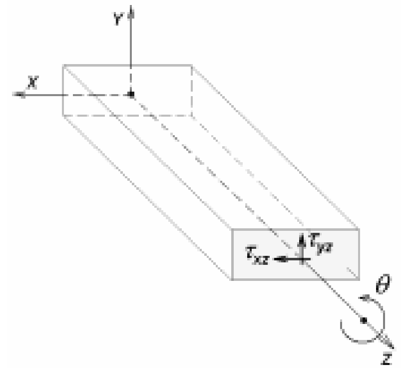
PRZEDSTAWIENIE RÓWNANI MES DLA ZADANI MECHANIKI W FORMIE MACIERZOWEJ

Otrzymanie równani MES do zadania brzegowego kręcenia pręta o przekroje nie okrągłym

-Zadanie brzegowe kręcenia pręta o przekroje nie okrągłym

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2G\theta=0 \qquad \varphi=0$$

$$\tau_{zx}=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad \tau_{zy}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad T=\int_S \varphi dS$$



$$J=\int_V\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-2G\theta\varphi\right]dV$$

$$J=\int_V\frac{1}{2}\left[\{g\}^T[D]\{g\}-2G\theta\varphi\right]dV$$

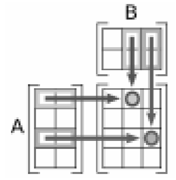
$$\{g\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{Bmatrix} \qquad [D]=\begin{bmatrix}K_{xx} & 0\\ 0 & K_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\{g_e\}=[B_e]\{\varphi\}$$

$$\frac{\partial J_e}{\partial\{\varphi\}} = [k_e]\{\varphi\} + \{f_e\} = 0$$

$$\{f_e\} = -\int_{V_e} G\theta[N]^T\, dV$$

$$[k_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [D_e][B_e]\, dV$$



$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} \\ \frac{\partial[N]}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad [B_e]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad [D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B_e]^T[D_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T[D][B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} \\ \frac{\partial[N]}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_k}{\partial y}$$

$$\boxed{\{u\}\int_V \left[\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}\right] dV = \int_V G\theta[N]^T\, dV \qquad G\theta[N]^T = G\theta N_k}$$

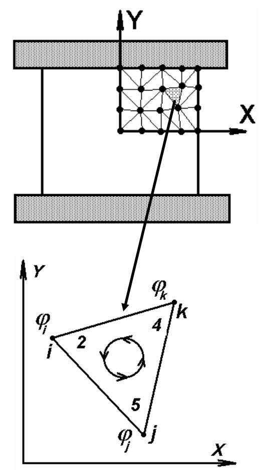
Fragment kodu

```
DO P=1, N_p

CALL Jacob_2d(J_,J_inv,P,N_p,NBN, N1, N2,X,Y,DetJ);

        DO I=1,ELSlv%NBN
          Ndx(i)=N1(i,p)*J_inv(1,1) + N2(i,p)*J_inv(1,2)
          Ndy(i)=N1(i,p)*J_inv(2,1) + N2(i,p)*J_inv(2,2)
        END DO;

         DO k=1,NBN

                DO I=1,NBN

                Nk = Nf(k,p);
                Ke(kl) = Ke(k,l) + (Ndx(k)*Ndx(i)+Ndy(k)*Ndy(i))*DetJ;

                END DO

                Fe(k) = Fe(k) + Nk*G*Teta*DetJ;

         END DO
END DO
```


Położenie elementów k_e w K

$$[k_e] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[K] = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & & & & & \\ 2 & & k_{11} & & k_{13} & k_{12} & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & k_{31} & & k_{33} & k_{32} & \\ 5 & & k_{21} & & k_{23} & k_{22} & \\ 6 & & & & & & \end{array}$$

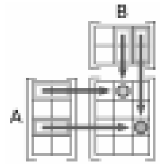


Równania MES dla teorii sprężystości w formie macierzowej. Odkształcenie płaskie.

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Równania MES dla teorii sprężystości w formie macierzowej. Odkształcenie płaskie.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [L]\{u\} \qquad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$



$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_{0t}\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \varepsilon_{0t} \right) \qquad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon_{0t}\} = (1+\nu) \begin{Bmatrix} \beta\Delta t \\ \beta\Delta t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Równania MES dla teorii sprężystości w formie macierzowej. Odkształcenie płaskie.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_{0t}\} \qquad \{\varepsilon\} = D^{-1}\{\sigma\} + \varepsilon_{0t}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x(1-\nu) + \varepsilon_y \nu\right) \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \varepsilon_{x0t}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x \nu + \varepsilon_y(1-\nu)\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \varepsilon_{y0t}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(2\varepsilon_{xy}\frac{1-2\nu}{2}\right) = \qquad 2\varepsilon_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xy}$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)}2\varepsilon_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \varepsilon_{z0t} = 0$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Równania MES dla teorii sprężystości w formie macierzowej. Macierzy własności.

Odkształcenie płaskie
$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Płaski stan naprężeń
$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Odkształcenie 3d
$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ & & & & (1-2\nu)/2 & 0 \\ sym & & & & & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Równania MES dla teorii sprężystości w formie macierzowej.

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}\qquad \{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}\qquad W=\int_V \frac{1}{2}\left(\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}-\{\varepsilon_0\}^T\{\sigma\}\right)dV$$

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}-[D]\{\varepsilon_0\}$$

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[N] & 0\\ 0 & [N]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{U_x\}\\ \{U_y\}\end{Bmatrix}=[\overline{N}]\{U\}$$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}\{U\}=[B]\{U\}$$

$$[\overline{N}]=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\ldots & N_p & 0 & 0\ldots & 0\\ 0 & 0\ldots & 0 & N_1 & N_2\ldots & N_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[N] & 0\\ 0 & [N]\end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}=[B]\{U\}\qquad [B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Funkcjonał w postaci macierzowej

$$W=\int_V \frac{1}{2}\left(\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}-\{\varepsilon_0\}^T\{\sigma\}\right)dV$$

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}-[D]\{\varepsilon_0\}$$

$$\{\varepsilon\}=[B]\{U\}$$

$$W_e=\int_{V_e}\frac{1}{2}\left(\{U\}^T[B]^T[D][B]\{U\}-2\{U\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}+\boxed{\{\varepsilon_0\}^T[D]\{\varepsilon_0\}}\right)dV$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Funkcjonał w postaci macierzowej

Energia sil wewnętrznych:

$$W_s=\{U\}^T\{P\}=\{P\}^T\{U\}\qquad \{P\}=\begin{Bmatrix}\{P_x\}\\ \{P_y\}\end{Bmatrix}$$

Energia obciążeń masowych:

$$W_b=\int_{V_e}\left(u_x m_x+u_y m_y\right)dV=\int_{V_e}\{U\}^T[\overline{N}]^T\{M\}dV\qquad \{M\}=\begin{Bmatrix}m_x\\ m_y\end{Bmatrix}$$

$$[\overline{N}]=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\ldots & N_p & 0 & 0\ldots & 0\\ 0 & 0\ldots & 0 & N_1 & N_2\ldots & N_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[N] & 0\\ 0 & [N]\end{bmatrix}$$

Energia naprężeni na powierzchni kontaktu elementu z otoczeniem:

$$W_p=\int_{S_e}\left(u_x p_x+u_y p_y\right)dS=\int_{S_e}\{U\}^T[\overline{N}]^T\{p\}dS\qquad \{p\}=\begin{Bmatrix}p_x\\ p_y\end{Bmatrix}$$

Pełna energia odkształcanego elementu:

$$W_e=\int_{V_e}\frac{1}{2}\{U\}^T[B]^T[D][B]\{U\}dV-\int_{V_e}\{U\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV-\int_{V_e}\{U\}^T[\overline{N}]^T\{M\}dV-\int_{S_e}\{U\}^T[\overline{N}]^T\{p\}dS-\{U\}^T\{P\}$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Otrzymanie matrycy sztywności

$$\frac{\partial W_e}{\partial\{U\}}=\{U\}\int_{V_e}[B]^T[D][B]dV-\int_{V_e}[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV-\int_{V_e}[\overline{N}]^T\{M\}dV-\int_{S_e}[\overline{N}]^T\{p\}dS-\{P\}$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial\{U\}}=[K_e]\{U\}+\{F_e\}$$

$$\boxed{[K_e]=\int_{V_e}[B]^T[D][B]dV\qquad \{F_e\}=-\int_{V_e}[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV-\int_{V_e}[\overline{N}]^T\{M\}dV-\int_{S_e}[\overline{N}]^T\{p\}dS-\{P\}}$$

$$[K]\{U\}+\{F\}=0$$

$$[K]=\sum_{e=1}^{n_e}[K_e]\qquad \{F\}=\sum_{e=1}^{n_e}\{F_e\}$$

Otrzymanie matrycy sztywności

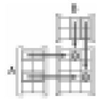
$$[K]^e=\int_{V_e}[B]^T[D][B]\,dV$$

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}\qquad [B]^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}\qquad [D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix}$$

$$[K]^e=\int_{V_e}[B]^T[D][B]dV=\sum_{p=1}^{N_p}[B]^T[D][B]W_p\det|J|$$

$$\{F_e\}=-\int_{V_e}[B_e]^T[D_e]\{\varepsilon_{0t}\}dV\qquad \{\varepsilon_{0t}\}=\begin{Bmatrix}\beta\Delta t\\ \beta\Delta t\\ 0\end{Bmatrix}$$

Otrzymanie matrycy sztywności



$$[K]^e=\int_{V_e}[B]^T[D][B]dV$$

$$[B]^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\end{bmatrix}\qquad [D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix}\qquad [B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\int_{V_e}[B]^T[D][B]dV=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}$$

$$\{f\}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix}\int_{V_e}\left(\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\beta\Delta t\right)dV\\ \int_{V_e}\left(\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\beta\Delta t\right)dV\end{Bmatrix}$$

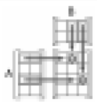
$$K_{11}=\int_{V_e}\left((1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\frac{(1-2\nu)}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}\right)dV$$

$$K_{12}=\int_{V_e}\left(\nu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\frac{(1-2\nu)}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y}\right)dV$$

$$K_{21}=\int_{V_e}\left(\nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\frac{(1-2\nu)}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial x}\right)dV$$

$$K_{22}=\int_{V_e}\left((1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\frac{(1-2\nu)}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}\right)dV$$

Otrzymanie matrycy sztywności



$$[B]^T[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}(1-\nu) & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\nu & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}(1-2\nu)/2\\ \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\nu & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}(1-\nu) & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}(1-2\nu)/2\end{bmatrix}$$

$$[B]^T[D][B]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}(1-\nu) & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\nu & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}(1-2\nu)/2\\ \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\nu & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}(1-\nu) & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}(1-2\nu)/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}$$

Otrzymanie wektora obciążeń

$$\{f_e\}=-\int_{V_e}[B_e]^T[D_e]\{\varepsilon_{0t}\}dV$$

$$[B]^T[D]\begin{Bmatrix}\beta\Delta t\\ \beta\Delta t\\ 0\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}(1-\nu) & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\nu & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}(1-2\nu)/2\\ \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\nu & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}(1-\nu) & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}(1-2\nu)/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\Delta t\\ \beta\Delta t\\ 0\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix}(1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\beta\Delta t+\nu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\beta\Delta t\\ \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\beta\Delta t+(1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\beta\Delta t\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\beta\Delta t\\ \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\beta\Delta t\end{Bmatrix}$$

Fragment kodu

```
DO P=1, N_p
        CALL Jacob(J_, J_inv, P, N_p, NBN, N1, N2, X, Y, DetJ);
        DO I=1,NBN
                Ndx(i)=N1(i,p)*J_inv(1,1) + N2(i,p)*J_inv(1,2)
                Ndy(i)=N1(i,p)*J_inv(2,1) + N2(i,p)*J_inv(2,2)
        END DO;
        dtp = Temp - TempNULL;
        M = reo(1)%m
        Kvol = Fs * Es/(1-2*m);         M1 = Kvol*(1-m)/(1+m);          M3 = Kvol*m/(1+m);
        Et=dtp*2e-5
        DO N=1,NBN
        Row1 = N;
        Row2 = NBN + N;
                DO I=1,NBN
                C1 = I;
                C2 = NBN + I;
                feSM(Row1,C1)=feSM(Row1,C1) + (M1*Ndx(n)*Ndx(i) + M2*Ndy(n)*Ndy(i))*DetJ;
                feSM(Row1,C2)=feSM(Row1,C2) + (M3*Ndx(n)*Ndy(i) + M2*Ndx(i)*Ndy(n))*DetJ;
                feSM(Row2,C1)=feSM(Row2,C1) + (M3*Ndx(i)*Ndy(n) + M2*Ndx(n)*Ndy(i))*DetJ;
                feSM(Row2,C2)=feSM(Row2,C2) + (M1*Ndy(n)*Ndy(i) + M2*Ndx(n)*Ndx(i))*DetJ;
                END DO ! I
        feRhs(Row1) = feRhs(Row1) + Kvol*Et*Ndx(N)*DetJ;
        feRhs(Row2) = feRhs(Row2) + Kvol*Et*Ndy(N)*DetJ;
        END DO
END DO
```


Równania MES dla przestrzennego stanu odkształcenia

Odkształcenie przestrzenne

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ 2\varepsilon_{xy}\\ 2\varepsilon_{yz}\\ 2\varepsilon_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{Bmatrix}=[L]\{u\}=[B]\{U\}$$

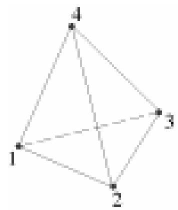
$$[L]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial[N]}{\partial z}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial z} & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial z} & 0 & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[N] & 0 & 0\\ 0 & [N] & 0\\ 0 & 0 & [N]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{U_x\}\\ \{U_y\}\\ \{U_z\}\end{Bmatrix}=[\overline{N}]\{U\}$$

$$[N]=[N_1\ N_2\ N_3\ N_4]$$

$$N_1=L_1$$
$$N_2=L_2$$
$$N_3=L_3$$
$$N_4=L_4$$



$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_{0t}\}$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ sym & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x(1-\nu) + \varepsilon_y \nu + \varepsilon_z \nu\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(2\varepsilon_{xy}\frac{1-2\nu}{2}\right) = 2G\varepsilon_{xy}$$

Rozpatrzmy otrzymanie formuł dla elementów matrycy sztywności

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D][B]\, dV$$

$$[B]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial z} & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \frac{\partial[N]^T}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{\partial[N]^T}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial[N]^T}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ sym & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial[N]}{\partial z} \\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial z} & \frac{\partial[N]}{\partial y} \\ \frac{\partial[N]}{\partial z} & 0 & \frac{\partial[N]}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} (1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y} & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial z} \\ \hline \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y} & (1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial z} & 0 \\ \hline \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial z} & \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial z} & (1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial z} & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \end{array}\right]$$

$$[B]^T[D][B] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{l} (1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z} \end{array} & \begin{array}{l} \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial x} \end{array} & \begin{array}{l} \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial z} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial z} \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial x} \end{array} & \begin{array}{l} (1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z} \end{array} & \begin{array}{l} \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial z} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial z} \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial z} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial x} \end{array} & \begin{array}{l} \nu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial z} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial z} \end{array} & \begin{array}{l} (1-\nu)\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} \\ +\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\frac{\partial[N]}{\partial z} \end{array} \end{array}\right]$$

Elementy wektora obciążeń

$$\int_{V_e} [B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} \int_{V_e}\left(\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\beta\Delta t\right)dV \\ \int_{V_e}\left(\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\beta\Delta t\right)dV \\ \int_{V_e}\left(\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\beta\Delta t\right)dV \end{Bmatrix} \qquad \{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_x\} \\ \{P_y\} \\ \{P_z\} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_e\} = -\int_{V_e}[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV - \int_{V_e}[\overline{N}]^T\{M\}dV - \int_{S_e}[\overline{N}]^T\{p\}dS - \{P\}. \qquad \{M\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

$$[\overline{N}] = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N] \end{bmatrix} \qquad [\overline{N}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & [N]^T \\ 0 & [N]^T & 0 \\ [N]^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$$

Równania MES dla teorii plastycznego płynięcia w formie macierzowej

Wariacyjne sformułowanie:

$$\{\sigma\} = \sigma_0 [I]^T + \{s\} = \sigma_0 [I]^T + [D]\{\dot\varepsilon\}$$

$$[I] = [1 \quad 1 \quad 0] \qquad [I]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

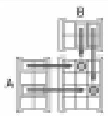
$$\{\dot\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \dot\varepsilon_{xx} \\ \dot\varepsilon_{yy} \\ 2\dot\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \dot\varepsilon_0 = [I]\{\dot\varepsilon\} = [1 \quad 1 \quad 0]\begin{Bmatrix} \dot\varepsilon_{xx} \\ \dot\varepsilon_{yy} \\ 2\dot\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \sigma_0 = [I]\{\sigma\} = [1 \quad 1 \quad 0]\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 2\sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$W = \int_V \frac{1}{2}\{\dot\varepsilon\}^T\{s\}dV + \int_V \sigma_0 [I]\{\dot\varepsilon\}dV \qquad \mathrm{J}(\mathrm{v}_\mathrm{i}^*, \sigma_0) = \frac{1}{2}\int_V \mu\dot\varepsilon_i^{*2}\mathrm{d}V + \int_V \sigma_0 div\vec{\mathrm{v}}\mathrm{d}V - \int_S p_i v_\mathrm{i}^*\mathrm{d}S$$

$$W_p = \int_S \{v\}^T\{p\}dS \qquad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$$

$$J = \int_V \frac{1}{2}\{\dot\varepsilon\}^T\{s\}dV + \int_V \sigma_0 [I]\{\dot\varepsilon\}dV - \int_S \{v\}^T\{p\}dS$$

$$J = \int_V \frac{1}{2}\{\dot\varepsilon\}^T\{s\}dV + \int_V \sigma_0 [I]\{\dot\varepsilon\}dV - \int_S \{v\}^T\{p\}dS$$



$$\{s\} = [D]\{\dot\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} 2\mu\dot\varepsilon_{xx} \\ 2\mu\dot\varepsilon_{yy} \\ \mu 2\dot\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\dot\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \dot\varepsilon_{xx} \\ \dot\varepsilon_{yy} \\ 2\dot\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_x = \sigma_0 + 2\mu\dot\varepsilon_x$$
$$\sigma_y = \sigma_0 + 2\mu\dot\varepsilon_y$$
$$\sigma_{xy} = \mu 2\dot\varepsilon_{xy}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad \{s\} = \begin{Bmatrix} 2\mu\dot\varepsilon_{xx} \\ 2\mu\dot\varepsilon_{yy} \\ \mu 2\dot\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$J = \int_V \frac{1}{2}\{\dot\varepsilon\}^T[D]\{\dot\varepsilon\}dV + \int_V \sigma_0 [I]\{\dot\varepsilon\}dV - \int_S \{v\}^T\{p\}dS \qquad \mu = \frac{\sigma_i}{\dot\varepsilon_i}$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}=\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_x\\ \dot{\varepsilon}_y\\ 2\dot{\varepsilon}_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_x\\ v_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}[N]\{\mathrm{v_x}\}\\ [N]\{\mathrm{v_y}\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\mathrm{v_x}\}\\ \{\mathrm{v_y}\}\end{Bmatrix}=[B]\{\mathrm{v}\}$$

$$v_x=[N]\{\mathrm{v_x}\}$$
$$v_y=[N]\{\mathrm{v_y}\}$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}=[B]\{\mathrm{v}\}$$

$$[B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\{v\}=\begin{Bmatrix}v_x\\ v_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[N] & 0\\ 0 & [N]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\mathrm{v}_x\}\\ \{\mathrm{v}_y\}\end{Bmatrix}=[\overline{N}]\{\mathrm{v}\}$$

$$[\overline{N}]=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\ldots & N_p & 0 & 0\ldots & 0\\ 0 & 0\ldots & 0 & N_1 & N_2\ldots & N_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[N] & 0\\ 0 & [N]\end{bmatrix}$$

Aproksymacja średniego naprężenia: $\sigma_0=[N]\{\sigma_0\}$ $\sigma_0=[H]\{\sigma_0\}$

$$\dot{\varepsilon}_0=[I]\{\dot{\varepsilon}\}=[1\quad 1\quad 0]\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_{xx}\\ \dot{\varepsilon}_{yy}\\ 2\dot{\varepsilon}_{xy}\end{Bmatrix}=[I][B]\{\mathrm{v}\}=[E]\{\mathrm{v}\}$$

$$[E]=[I][B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & \frac{\partial[N]}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$\{s\}=[D][B]\{\mathrm{v}\}$$

$$J=\int_V\frac{1}{2}\{\mathrm{v}\}^T[B]^T[D][B]\{\mathrm{v}\}dV+\int_V\sigma_0[E]\{\mathrm{v}\}dV-\int_S\{\mathrm{v}\}^T[\overline{N}]^T\{p\}dS=0$$

$$J=\int_V\frac{1}{2}\{\mathrm{v}\}^T[B]^T[D][B]\{\mathrm{v}\}dV+\int_V[H]\{\sigma_0\}[E]\{\mathrm{v}\}dV-\int_S\{\mathrm{v}\}^T[\overline{N}]^T\{p\}dS=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial\{\mathrm{v}\}}=\left(\int_V[B]^T[D][B]dV\right)\{\mathrm{v}\}+\left(\int_V[E]^T[H]dV\right)\{\sigma_0\}-\int_S[\overline{N}]^T\{p\}dS=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial\{\sigma_0\}}=\left(\int_V[H]^T[E]dV\right)\{\mathrm{v}\}=0$$

$$[K]\{\mathrm{v},\sigma_0\}+\{F\}=0$$

Otrzymamy poszczególne komponenty matrycy [K]:

$$[B]^T[D][B]=\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\mu & 0 & 0\\ 0 & 2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial[N]}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$[B]^T[D]=\begin{bmatrix}2\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x} & 0 & \mu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\\ 0 & 2\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial y} & \mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$[B]^T[D][B]=\begin{bmatrix}2\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} & \mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y}\\ \mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y} & 2\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}\end{bmatrix}$$

Matryca sztywności

$$\frac{\partial J}{\partial\{\mathrm{v}\}}=\left(\int_{\mathrm{V}}[B]^T[D][B]dV\right)\{\mathrm{v}\}+\left(\int_{\mathrm{V}}[E]^T[H]dV\right)\{\sigma_0\}-\int_{\mathrm{S}}[\overline{N}]^T\{p\}dS=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial\{\sigma_0\}}=\left(\int_{\mathrm{V}}[H]^T[E]dV\right)\{\mathrm{v}\}=0$$

$$[K]=\int_V\begin{bmatrix} 2\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} & \mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]^T}{\partial x}[H] \\ \mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y} & 2\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]^T}{\partial y}[H] \\ [H]^T\frac{\partial[N]}{\partial x} & [H]^T\frac{\partial[N]}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}dV$$

$$\{F\}=\int_S\begin{Bmatrix}[N]^T p_x \\ [N]^T p_y \\ 0\end{Bmatrix}dS$$

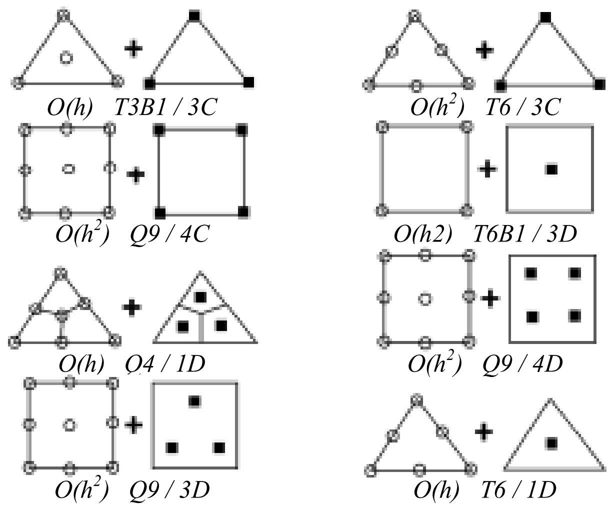
ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Fragment kodu

```
DO P=1, ELSlv%N_p
     DO N=1,NBN
          Row1 = N;
          Row2 = NBN + N;
          Row3 = 2*NBN + N;
          DO I=1,NBN
               C1 = I;
               C2 = NBN + I;
               C3 = 2*NBN + I;
feSM(Row1,C1)=feSM(Row1,C1) + m*(2*Ndx(N)*Ndx(i)+Ndy(N)*Ndy(i))*DetJ;
feSM(Row1,C2)=feSM(Row1,C2) + m*Ndx(i)*Ndy(N)*DetJ;

if (i<=NBNp) feSM(Row1,C3)=feSM(Row1,C3) + Ndx(N)*detJ*Hk(i,p);

feSM(Row2,C1)=feSM(Row2,C1) + m*Ndx(N)*Ndy(i)*DetJ;
feSM(Row2,C2)=feSM(Row2,C2) + m*(2*Ndy(N)*Ndy(i)+Ndx(N)*Ndx(i))*DetJ

if (i<=NBNp) feSM(Row2,C3) = feSM(Row2,C3) + Ndy(N)*detJ*Hk(i,p);

     if (N<=NBNp) then
feSM(Row3,C1) = feSM(Row3,C1) + Ndx(i)*detJ*Hk(n,p);
feSM(Row3,C2) = feSM(Row3,C2) + Ndy(i)*detJ*Hk(n,p);
      end if
          END DO
     END DO
END DO
```

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

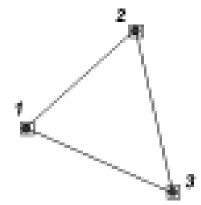
Stabilne układy N (○) i H (■) interpolacji



ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Uwzględnienie warunków brzegowych w matryce sztywności elementu.

	v_{x1}	v_{x2}	v_{x3}	v_{y1}	v_{y2}	v_{y3}	σ_1	σ_2	σ_3
v_{x1}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}
v_{x2}	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}	k_{29}
v_{x3}	k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}
v_{y1}	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}
v_{y2}	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}
v_{y3}	k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}
σ_1	k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}	k_{79}
σ_2	k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}	k_{89}
σ_3	k_{91}	k_{92}	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	k_{97}	k_{98}	k_{99}



$$[N]=[H]$$

$$[k]=\int_V\begin{bmatrix} \boxed{\mu\left(2\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}\right)} & \boxed{\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y}} & \boxed{\frac{\partial[N]^T}{\partial x}[H]} \\ \boxed{\mu\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial y}} & \boxed{\mu\left(2\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}+\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}\right)} & \boxed{\frac{\partial[N]^T}{\partial y}[H]} \\ \boxed{[H]^T\frac{\partial[N]}{\partial x}} & \boxed{[H]^T\frac{\partial[N]}{\partial y}} & \boxed{0} \end{bmatrix}dV$$

Uwzględnienie warunków brzegowych w matryce sztywności elementu.

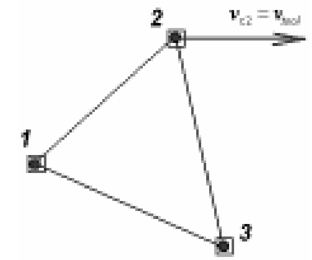
```
DO n=1,NBN (I)
    Row1 = n;
    Row2 = NBN + n;
    Row3 = 2*NBN + n;
    DO i=1,NBN   (J)
        C1 = i;
        C2 = NBN + i;
        C3 = 2*NBN + i;
feSM(Row1,C1)=feSM(Row1,C1) + m*(2*Ndx(n)*Ndx(i)+Ndy(n)*Ndy(i))*DetJ;
feSM(Row1,C2)=feSM(Row1,C2) + m*Ndx(i)*Ndy(n)*DetJ;
feSM(Row1,C3)=feSM(Row1,C3) + Ndx(n)*detJ*Hk(i,p);
feSM(Row2,C1)=feSM(Row2,C1) + m*Ndx(n)*Ndy(i)*DetJ;
feSM(Row2,C2)=feSM(Row2,C2) + m*(2*Ndy(n)*Ndy(i)+Ndx(n)*Ndx(i))*DetJ
feSM(Row2,C3) = feSM(Row2,C3) + Ndy(n)*detJ*Hk(i,p);
feSM(Row3,C1) = feSM(Row3,C1) + Ndx(i)*detJ*Hk(n,p);
feSM(Row3,C2) = feSM(Row3,C2) + Ndy(i)*detJ*Hk(n,p);
    END DO
END DO
```


Uwzględnienie warunków brzegowych w matryce sztywności elementu.

	v_{x1}	v_{x2}	v_{x3}	v_{y1}	v_{y2}	v_{y3}	σ_1	σ_2	σ_3	
v_{x1}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	f_1
v_{x2}	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	k_{27}	k_{28}	k_{29}	f_2
v_{x3}	k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}	f_3
v_{y1}	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}	f_4
v_{y2}	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}	f_5
v_{y3}	k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}	f_6
σ_1	k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}	k_{79}	f_7
σ_2	k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}	k_{89}	f_8
σ_3	k_{91}	k_{92}	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	k_{97}	k_{98}	k_{99}	f_9

$$v_{x2} = v_{tool}$$

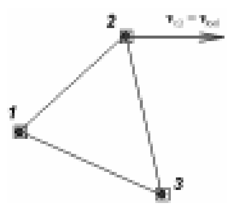
	v_{x1}	v_{x2}	v_{x3}	v_{y1}	v_{y2}	v_{y3}	σ_1	σ_2	σ_3	
v_{x1}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	f_1
v_{x2}	0	k_{22}	0	0	0	0	0	0	0	$k_{22}v_{tool}$
v_{x3}	k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}	f_3
v_{y1}	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}	f_4
v_{y2}	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}	f_5
v_{y3}	k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}	f_6
σ_1	k_{71}	k_{72}	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}	k_{79}	f_7
σ_2	k_{81}	k_{82}	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}	k_{89}	f_8
σ_3	k_{91}	k_{92}	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	k_{97}	k_{98}	k_{99}	f_9



	v_{x1}	v_{x2}	v_{x3}	v_{y1}	v_{y2}	v_{y3}	σ_1	σ_2	σ_3	
v_{x1}	k_{11}	0	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	$f_1 - k_{12}v_{tool}$
v_{x2}	0	k_{22}	0	0	0	0	0	0	0	$k_{22}v_{tool}$
v_{x3}	k_{31}	0	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}	$f_3 - k_{32}v_{tool}$
v_{y1}	k_{41}	0	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}	$f_4 - k_{32}v_{tool}$
v_{y2}	k_{51}	0	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}	$f_5 - k_{32}v_{tool}$
v_{y3}	k_{61}	0	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}	$f_6 - k_{32}v_{tool}$
σ_1	k_{71}	0	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	k_{77}	k_{78}	k_{79}	$f_7 - k_{32}v_{tool}$
σ_2	k_{81}	0	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	k_{87}	k_{88}	k_{89}	$f_8 - k_{32}v_{tool}$
σ_3	k_{91}	0	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	k_{97}	k_{98}	k_{99}	$f_9 - k_{32}v_{tool}$

	v_{x1}	v_{x2}	v_{x3}	v_{y1}	v_{y2}	v_{y3}	σ_1	σ_2	σ_3	
v_{x1}	k_{11}	0	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	$f_1 - k_{12}v_{tool}$
v_{x2}	0	k_{22}	0	0	0	0	0	0	0	$k_{22}v_{tool}$
v_{x3}	k_{31}	0	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	k_{37}	k_{38}	k_{39}	$f_3 - k_{32}v_{tool}$
v_{y1}	k_{41}	0	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	k_{47}	k_{48}	k_{49}	$f_4 - k_{32}v_{tool}$
v_{y2}	k_{51}	0	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	k_{57}	k_{58}	k_{59}	$f_5 - k_{32}v_{tool}$
v_{y3}	k_{61}	0	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	k_{67}	k_{68}	k_{69}	$f_6 - k_{32}v_{tool}$
σ_1	k_{71}	0	k_{73}	k_{74}	k_{75}	k_{76}	0	0	0	$0 - k_{32}v_{tool}$
σ_2	k_{81}	0	k_{83}	k_{84}	k_{85}	k_{86}	0	0	0	$0 - k_{32}v_{tool}$
σ_3	k_{91}	0	k_{93}	k_{94}	k_{95}	k_{96}	0	0	0	$0 - k_{32}v_{tool}$

$$[K] = \int_V \left[\begin{array}{c|c|c} 2\mu \frac{\partial [N]^T}{\partial x}\frac{\partial [N]}{\partial x} + \mu \frac{\partial [N]^T}{\partial y}\frac{\partial [N]}{\partial y} & \mu \frac{\partial [N]^T}{\partial x}\frac{\partial [N]}{\partial y} & \frac{\partial [N]^T}{\partial x}[H] \\ \hline \mu \frac{\partial [N]^T}{\partial x}\frac{\partial [N]}{\partial y} & 2\mu \frac{\partial [N]^T}{\partial y}\frac{\partial [N]}{\partial y} + \mu \frac{\partial [N]^T}{\partial y}\frac{\partial [N]}{\partial y} & \frac{\partial [N]^T}{\partial y}[H] \\ \hline [H]^T \frac{\partial [N]}{\partial x} & [H]^T \frac{\partial [N]}{\partial y} & 0 \end{array} \right] dV$$



Uwzględnienie warunków brzegowych w matryce sztywności elementu. Fragment kodu.

```
do i=1,nbn
j  = abs(feVrtxMapSlv(I,nElem));
            Status=vrtxStatusSlv(j);
            SELECT CASE(Status)
            case(5,69,11,75 )
            Nzad=1;
            NUM_zad(1)=i;      VAL_zad(1)=0.0;
            case(10,74 )
            Nzad=2;
            NUM_zad(1)=i;         VAL_zad(1)=vrtxVelSlv(1,j);
            NUM_zad(2)=i+nbn;   VAL_zad(2)=vrtxVelSlv(2,j);
            case(8,72 )
            Nzad=2;
            NUM_zad(1)=i;      VAL_zad(1)=vrtxVelSlv(1,j);
            NUM_zad(2)=i+nbn;   VAL_zad(2)=vrtxVelSlv(2,j);
            END SELECT;

            do ii=1,Nzad
call mat_corr(Num_zad(ii),VAL_zad(ii),feUknCount,feSM,feRhs);
            end do;
end do;
```

```
subroutine mat_corr(Num, VAL_, ncn, est, r);
integer*4 ncn;
integer*4 Num;
real*8 VAL_;
real(8), dimension(ncn,ncn) :: est;
real(8), dimension(ncn)     :: r;
integer i, j;
        do j=1,ncn
          if (j.NE.Num) est(Num,j)=0;
        end do;
        r(Num) = est(Num,Num)*VAL_;
        do i=1,ncn
          if (i.NE.Num) then
                r(i)=r(i)-est(i,Num)*Val_;
                est(i,Num)=0;
          end if;
        end do;
end subroutine mat_corr;
```

Problemy z ograniczeniami, nieściśliwość, metoda mnożnika Lagrange'a, funkcji kary i metoda mieszana

1. Klasyczne sformułowanie, metoda mnożnika Lagrange'a

$$J(v_i,\sigma_0)=\frac{1}{2}\int_V \mu\dot{\varepsilon}_i^2 dV+\int_V \sigma_0 div(\vec{v})dV-\int_S p_i v_i dS$$

2. Problemy z ograniczeniami. Nieprzenikalnie narzędzia

$$J(v_i,\sigma_0)=\frac{1}{2}\int_V \mu\dot{\varepsilon}_i^2 dV+\int_V \sigma_0 div(\vec{v})dV-\int_S p_i v_i dS+K_w\int_S (w_n-v_n)^2 dS$$

3. Problemy z ograniczeniami. Nieściśliwość.

$$J(v_i,\sigma_0)=\frac{1}{2}\int_V \mu\dot{\varepsilon}_i^2 dV+K_{pen}\int_V (\dot{\varepsilon}_0)^2 dV-\int_S p_i v_i dS$$

4. Uwzględnienie tarcia za pomocą metody funkcji kary:

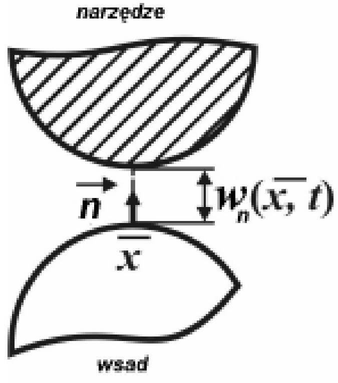
$$J(v_i,\sigma_0)=\frac{1}{2}\int_V \mu\dot{\varepsilon}_i^2 dV+\int_V \sigma_0 div(\vec{v})dV-K_\tau^{(p)}\int_S (v_\tau)^2 dS \qquad K_\tau^{(p)}=\left|\frac{\sigma_\tau^{(p-1)}}{v_\tau^{(p-1)}}\right|$$

2. Problemy z ograniczeniami. Nieprzenikalnie narzędzia

$$J(v_i,\sigma_0)=\frac{1}{2}\int_V \mu\dot{\varepsilon}_i^2 dV+\int_V \sigma_0 div(\vec{v})dV-\int_S p_i v_i dS+K_w\int_S (w_n-v_n)^2 dS$$

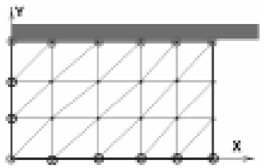
$$v_n(x,t)\le w_n(x,t)$$

```
DetJ_dop = DetJ_dop +
POVSlv(N_POV_GL)%DetJ(p)*SfSlv(N_pov_LOK)%W(p);

DO N=1,NBN
Id  = abs(feVrtxMapSlv(N,nElem));
Row1 = N;
Row2 = NBN + N;
Pen_dop = DetJ_dop*G(N)*NdsSlv(idPov)%penalty*10000; !*VtoolSlv;

feSM(Row1,Row1)=feSM(Row1,Row1) + Pen_dop*( AxT(n)*AxT(n) );
feSM(Row1,Row2)=feSM(Row1,Row2) + Pen_dop*( AxT(n)*AyT(n) );
feSM(Row2,Row1)=feSM(Row2,Row1) + Pen_dop*( AyT(n)*AxT(n) );
feSM(Row2,Row2)=feSM(Row2,Row2) + Pen_dop*( AyT(n)*AyT(n) );
feRhs(Row1) = feRhs(Row1) + Pen_dop*AxT(n)*Wnt(n);
feRhs(Row2) = feRhs(Row2) + Pen_dop*AyT(n)*Wnt(n);
END DO;
```



3. Problemy z ograniczeniami. Nieściśliwość.

$$J(v_i,\sigma_0)=\frac{1}{2}\int_V \mu\dot{\varepsilon}_i^2 dV+K_{pen}\int_V (\dot{\varepsilon}_0)^2 dV-\int_S p_i v_i dS$$



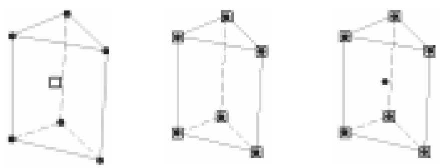
DOF = 2*10+7=27

Ncond = ne = 30

DOF<Ncond

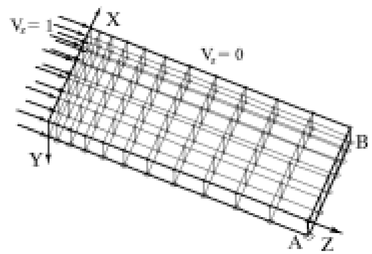
$n_{dof} \ge n_\sigma$ Warunek Babuski-Brezzi $\quad K_{lock}=\frac{n_\sigma}{n_{dof}}$

3. Problemy z ograniczeniami. Nieściśliwość.

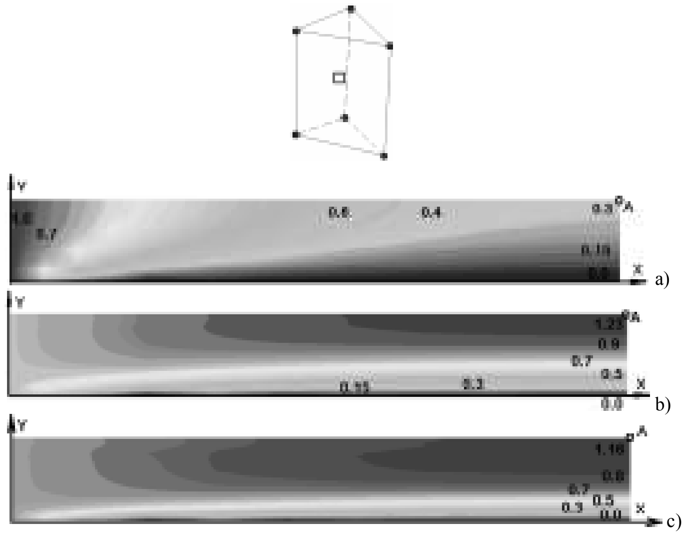


1) 2) 3)

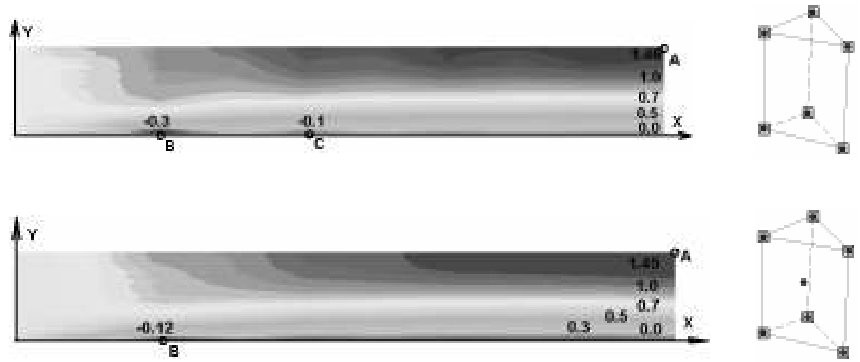
Zadanie testowe:



$$v_z=\frac{3}{2}\frac{B}{h^3}\left(h^2-x^2\right)$$

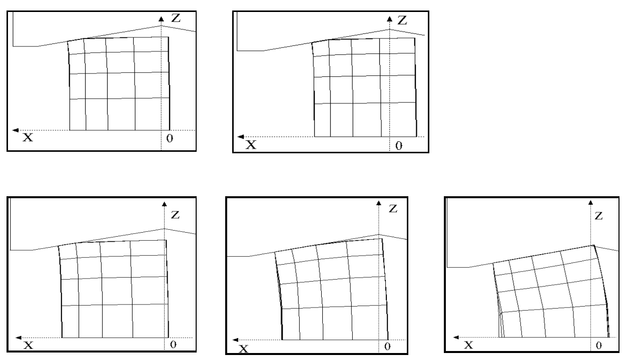


Rozwiązanie zadania Puazejla, a – K_p=500μ; b – K_p =25000μ; c – K_p =100000μ.



4. Uwzględnienie tarcia za pomocą metody funkcji kary:

$$J(v_i,\sigma_0)=\frac{1}{2}\int_V \mu\dot{\varepsilon}_i^2\mathrm{d}V+\int_V \sigma_0 div(\vec{v})dV-K_\tau^{(p)}\int_S (v_\tau)^2\,dS \qquad K_\tau^{(p)}=\left|\frac{\sigma_\tau^{(p-1)}}{v_\tau^{(p-1)}}\right|$$




```
DO N=1,NBN
        Row1 = N;
        Row2 = NBN + N;
        Wes=8.0/9.0;
        if (N<=3) Wes=5.0/9.0;

        Vmax = dV(n);
        SigmaFr = m(n)*Ti(n)*(1-dexp(-0.722*Sx(n)/Ti(n)));
        Pen_dop =  Wes*DetJ_dop*X(n)*SigmaFr /Vmax;

        feSM(Row1,Row1)=feSM(Row1,Row1) + Pen_dop !* Ax1(n)*Ax1(n);
        feSM(Row1,Row2)=feSM(Row1,Row2) + Pen_dop !* Ax1(n)*Ay1(n);
        feSM(Row2,Row1)=feSM(Row2,Row1) + Pen_dop !* Ay1(n)*Ax1(n);
        feSM(Row2,Row2)=feSM(Row2,Row2) + Pen_dop !* Ay1(n)*Ay1(n);
        feRhs(Row1) = feRhs(Row1) + Pen_dop * ( Ax1(n) * W1(n) );
        feRhs(Row2) = feRhs(Row2) + Pen_dop * ( Ay1(n) * W1(n) );
                                        end if;
END DO;
```

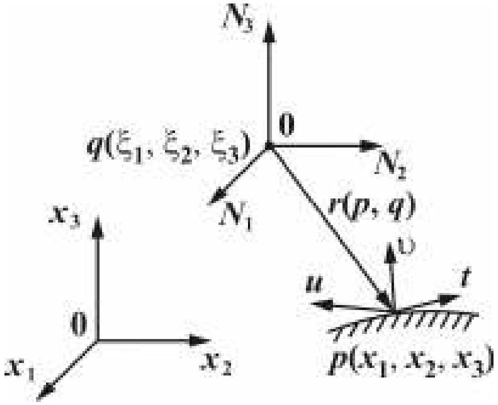
Metoda elementów brzegowych (MEB, BEM)

Trevelyan J. Boundary Elements for Engineers (Theory and Applications): Computational Mechanics Publications, 1994 – 228 p.

S.L.Crouch and A.M.Starfield Boundary element methods in solid mechanics, George Allen & Unwin, London, 1983. 322 p.

www.wessex.ac.uk

Fundamentalne rozwiązania zadani sprężystości



$$r(p,\ q) = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}$$

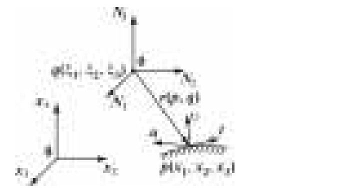
Rozwiązanie zadań teorii sprężystości za pomocą MEB może być oparte o rozwiązanie fundamentalne Kelvina, które otrzymane w teorii sprężystości dla zadania obliczenia stanu naprężeń i przemieszczeń w punkcie *p* nieskończonego ośrodka przy oddziaływaniu siły jednostkowej w punkcie *q*. Formuły Kelvina mogą być zapisane w sposób następujący

$$u_{ij}(p,\ q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu_0)Gr}\left[(3-4\nu_0)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right]$$

$$t_{ij}(p,\ q,\ \nu) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu_0)r^2}\left\{\left[(1-2\nu_0)\delta_{ij} + 3\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right]\frac{\partial r}{\partial \nu} + (1-2\nu_0)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\nu_j - \frac{\partial r}{\partial x_j}\nu_i\right)\right\}$$

gdzie $u_{ij}(p,\ q)$ – komponenty wektora przemieszeni w punkcie *p* w kierunku osi x_j od oddziaływania siły jednostkowej, przyłożonej w punkcie q w kierunku osi x_i; $t_{ij}(p,\ q,\ \nu)$ – komponenty wektora sil wewnętrznych w punkcie *p* na powierzchni charakteryzującej kierunkiem normalnym ν w kierunku osi x_j od oddziaływania siły jednostkowej, przyłożonej w punkcie *q* w kierunku osi x_i.

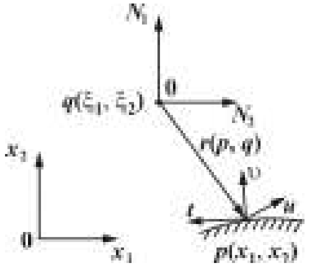
$$r(p,\ q) = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}$$



Fundamentalne rozwiązania zadani sprężystości dla płaskiego stanu odkształceń

$$u_{ij}(p,\ q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu_0)G}\left[(3-4\nu_0)\delta_{ij}\ln r - \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right] =$$

$$= -\frac{1}{8\pi(1-\nu_0)G}\left[(3-4\nu_0)\delta_{ij}\ln r - \frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{r^2}\right];$$



$$t_{ij}(p,\ q,\ \nu) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu_0)r}\left\{\left[(1-2\nu_0)\delta_{ij} + 2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right]\frac{\partial r}{\partial \nu} - (1-2\nu_0)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\nu_j - \frac{\partial r}{\partial x_j}\nu_i\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi(1-\nu_0)r}\left\{(1-2\nu_0)\left[(x_i-\xi_i)\delta_{jk} - (x_j-\xi_j)\delta_{ik} - (x_k-\xi_k)\delta_{ij} + \frac{2(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)}{r^3}\right]\nu_k\right\}.$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Przekształcenie formuł Kelvina dla przypadku odkształcenia płaskiego ośrodka nieściśliwego daje formuły

$$\nu_0 = 0{,}5$$

$$v_x = \frac{F_x}{2\mu}\left(g - x\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{F_y}{2\mu}y\frac{\partial g}{\partial x}$$

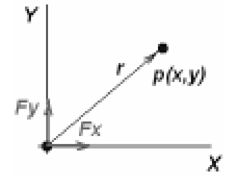
$$v_y = \frac{F_y}{2\mu}\left(g - y\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{F_x}{2\mu}x\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\sigma_x = F_x\left(\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) + F_y\left(\frac{\partial g}{\partial y} - y\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma_y = F_x\left(\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) + F_y\left(\frac{\partial g}{\partial y} - y\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_{xy} = -F_x x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_y y\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$$

$$g(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x^2+y^2)}$$



$$t_y = \sigma_{xy}a_x + \sigma_y a_y$$

$$t_x = \sigma_x a_x + \sigma_{xy}a_y$$

gdzie F_x i F_y – rzuty siły, jaka działa w liniowo lepkim ośrodku;
v_x, v_y, σ_x, σ_y, σ_{xy} – prędkości płynięcia i naprężenia w odległości *x* i *y* od punktu przyłożenia obciążenia F;
μ – umowna lepkości metalu.

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Obliczenie pochodnych

$$g(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

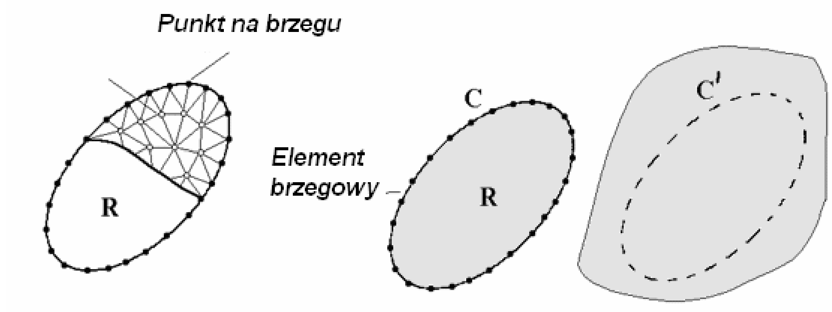
$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

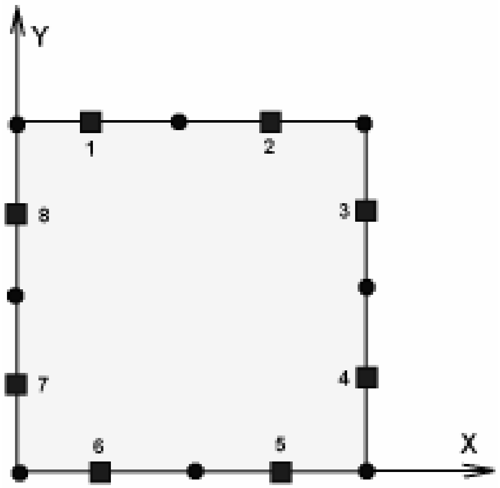
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{x}{(x^2+y^2)}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Idea metody MEB



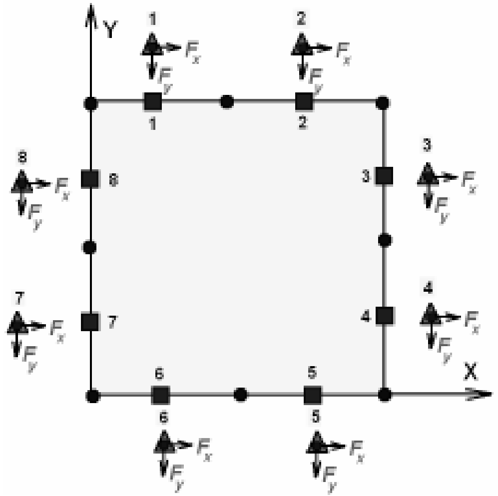
Przykład: Modelowanie procesu spęczania próbki z materiału liniowo- lepkiego



Warunki w węzłach:

1: v_x=0; v_y=-1; t_x=? t_y=? a_x=0 a_y=1
2: v_x=0; v_y=-1; t_x=? t_y=? a_x=0 a_y=1
3: v_x=?; v_y=?; t_x=0 t_y=0 a_x=1 a_y=0
4: v_x=?; v_y=?; t_x=0 t_y=0 a_x=1 a_y=0
5: v_x=?; v_y=0; t_x=0 t_y=? a_x=0 a_y=-1
6: v_x=?; v_y=0; t_x=0 t_y=? a_x=0 a_y=-1
7: v_x=0; v_y=?; t_x=? t_y=0 a_x=-1 a_y=0
8: v_x=0; v_y=?; t_x=? t_y=0 a_x=-1 a_y=0

Metoda rozwiązania



$$v_x = \frac{F_x}{2\mu}\left(g - x\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{F_y}{2\mu} y \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$v_y = \frac{F_y}{2\mu}\left(g - y\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{F_x}{2\mu} x \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\sigma_x = F_x\left(\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) + F_y\left(\frac{\partial g}{\partial y} - y\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma_y = F_x\left(\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) + F_y\left(\frac{\partial g}{\partial y} - y\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$$

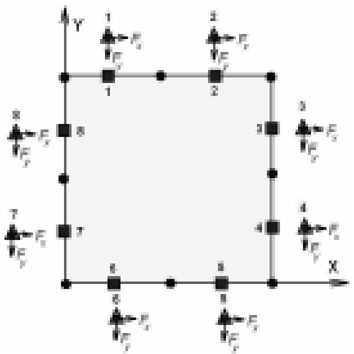
$$\sigma_{xy} = -F_x x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - F_y y\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

$$g(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$t_y = \sigma_{xy}a_x + \sigma_y a_y$$

$$t_x = \sigma_x a_x + \sigma_{xy} a_y$$

1: v_x=0; v_y=-1; t_x=? t_y=? a_x=0 a_y=1
2: v_x=0; v_y=-1; t_x=? t_y=? a_x=0 a_y=1
3: v_x=?; v_y=?; t_x=0 t_y=0 a_x=1 a_y=0
4: v_x=?; v_y=?; t_x=0 t_y=0 a_x=1 a_y=0
5: v_x=?; v_y=0; t_x=0 t_y=? a_x=0 a_y=-1
6: v_x=?; v_y=0; t_x=0 t_y=? a_x=0 a_y=-1
7: v_x=0; v_y=?; t_x=? t_y=0 a_x=-1 a_y=0
8: v_x=0; v_y=?; t_x=? t_y=0 a_x=-1 a_y=0



$$\sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(1)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(2)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(1)} = -1 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(2)} = -1$$

$$\sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(3)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(4)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(3)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(4)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(5)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(6)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(5)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(6)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(7)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(8)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(7)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(8)} = 0$$

$$F_{xi}, F_{yi} = ?$$

Wyznaczenie niewiadomych w węzłach

$$\sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(1)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(2)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(1)} = -1 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(2)} = -1$$

$$\sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(3)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(4)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(3)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(4)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(5)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(6)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(5)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(6)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(7)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(8)} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(7)} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(8)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(2)}$$
$$\sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(3)} \qquad \sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(4)}$$
$$\sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(3)} \qquad \sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(4)}$$

$$\sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(5)} \qquad \sum_{i=1}^{8} v_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_x^{(6)}$$
$$\sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(5)} \qquad \sum_{i=1}^{8} t_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_y^{(6)}$$

$$\sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(7)} \qquad \sum_{i=1}^{8} t_x^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = t_x^{(8)}$$
$$\sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(7)} \qquad \sum_{i=1}^{8} v_y^{(i)}(F_{xi},F_{yi}) = v_y^{(8)}$$

Wyznaczenie niewiadomych w punktach wewnętrznych

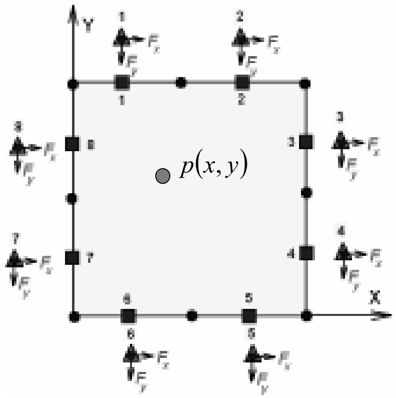
$$\sum_{i=1}^{8} v_{xi}^{(p)}\left(F_{xi}, F_{yi}\right) = v_x^{(p)}$$

$$\sum_{i=1}^{8} v_{yi}^{(p)}\left(F_{xi}, F_{yi}\right) = v_y^{(p)}$$

$$\sum_{i=1}^{8} \sigma_{xi}^{(p)}\left(F_{xi}, F_{yi}\right) = \sigma_x^{(p)}$$

$$\sum_{i=1}^{8} \sigma_{yi}^{(p)}\left(F_{xi}, F_{yi}\right) = \sigma_y^{(p)}$$

$$\sum_{i=1}^{8} \sigma_{xyi}^{(p)}\left(F_{xi}, F_{yi}\right) = \sigma_{xy}^{(p)}$$

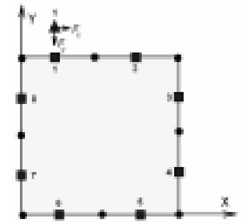


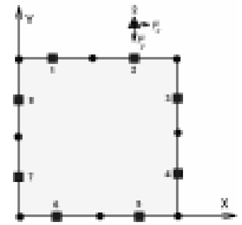
Bezpośrednia metoda MEB

Do obliczenia współczynników układu równań można wykorzystać teoremat Kastiliano w formie następującej:

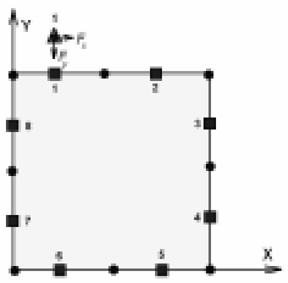
$$\int_S \left(t_x v_x^* + t_y v_y^*\right) dS = \int_S \left(t_x^* v_x + t_y^* v_y\right) dS$$

gdzie S – długość konturu; t_x, t_y, v_x, v_y – rzuty naprężeń i prędkości płynięcia na brzegu obwodu (na elementach brzegowych), odpowiadające rzeczywistemu stanu naprężeń i odkształceń; t_x^*, t_x^*, v_x^*, v_y^* – kontrolne rozwiązanie, jakie wyznaczamy przez przyłożenie sił jednostkowych do każdego elementu i obliczenia naprężeń na innych elementach z wykorzystaniem fundamentalnego rozwiązania (formuł Kelvina).





$$\int_S \left(t_x v_x^* + t_y v_y^*\right) dS = \int_S \left(t_x^* v_x + t_y^* v_y\right) dS$$

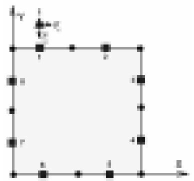


$$\sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \left(t_x v_x^* + t_y v_y^*\right) dS_j = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \left(t_x^* v_x + t_y^* v_y\right) dS_j$$

$$\sum_{j=1}^{N} t_x^j \int_{S_j} v_x^*\left(F_x^i\right) dS + \sum_{j=1}^{N} t_y^j \int_{S_j} v_y^*\left(F_x^i\right) dS = \sum_{j=1}^{N} v_x^j \int_{S_j} t_x^*\left(F_x^i\right) dS + \sum_{j=1}^{N} v_y^j \int_{S_j} t_y^*\left(F_x^i\right) dS$$

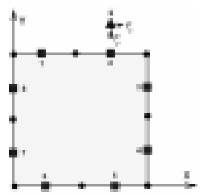
$$\sum_{j=1}^{N} t_x^j \int_{S_j} v_x^*\left(F_y^i\right) dS + \sum_{j=1}^{N} t_y^j \int_{S_j} v_y^*\left(F_y^i\right) dS = \sum_{j=1}^{N} v_x^j \int_{S_j} t_x^*\left(F_y^i\right) dS + \sum_{j=1}^{N} v_y^j \int_{S_j} t_y^*\left(F_y^i\right) dS$$

Układ równań MEB



$$\sum_{j=1}^{N} t_x^j \int_{S_j} v_x^*\left(F_x^{(1)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} t_y^j \int_{S_j} v_y^*\left(F_x^{(1)}\right) dS = \sum_{j=1}^{N} v_x^j \int_{S_j} t_x^*\left(F_x^{(1)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} v_y^j \int_{S_j} t_y^*\left(F_x^{(1)}\right) dS$$

$$\sum_{j=1}^{N} t_x^j \int_{S_j} v_x^*\left(F_y^{(1)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} t_y^j \int_{S_j} v_y^*\left(F_y^{(1)}\right) dS = \sum_{j=1}^{N} v_x^j \int_{S_j} t_x^*\left(F_y^{(1)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} v_y^j \int_{S_j} t_y^*\left(F_y^{(1)}\right) dS$$



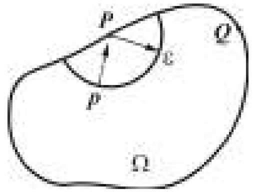
$$\sum_{j=1}^{N} t_x^j \int_{S_j} v_x^*\left(F_x^{(2)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} t_y^j \int_{S_j} v_y^*\left(F_x^{(2)}\right) dS = \sum_{j=1}^{N} v_x^j \int_{S_j} t_x^*\left(F_x^{(2)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} v_y^j \int_{S_j} t_y^*\left(F_x^{(2)}\right) dS$$

$$\sum_{j=1}^{N} t_x^j \int_{S_j} v_x^*\left(F_y^{(2)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} t_y^j \int_{S_j} v_y^*\left(F_y^{(2)}\right) dS = \sum_{j=1}^{N} v_x^j \int_{S_j} t_x^*\left(F_y^{(2)}\right) dS + \sum_{j=1}^{N} v_y^j \int_{S_j} t_y^*\left(F_y^{(2)}\right) dS$$

1: $v_x=0$; $v_y=-1$; $t_x=?$ $t_y=?$ $a_x=0$ $a_y=1$
2: $v_x=0$; $v_y=-1$; $t_x=?$ $t_y=?$ $a_x=0$ $a_y=1$

Wyznaczenie niewiadomych w punktach wewnętrznych

Twierdzenie Somiliany



Następnie wyznaczamy średnią wartość intensywności prędkość odkształcenia za pomocą formuł Somiliany:

$$u_x = -\int_C \left[u_s \sigma_s^{`}(F_x) + u_n \sigma_n^{`}(F_x)\right] ds + \int_C \left[\sigma_s u_s^{`}(F_x) + \sigma_n u_n^{`}(F_x)\right] ds \,,$$

$$u_y = -\int_C \left[u_s \sigma_s^{`}(F_y) + u_n \sigma_n^{`}(F_y)\right] ds + \int_C \left[\sigma_s u_s^{`}(F_y) + \sigma_n u_n^{`}(F_y)\right] ds \,,$$

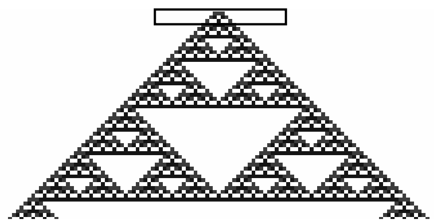
gdzie u_s, u_n, σ_s, σ_n – uzyskane wartości granicznych prędkości płynięcia i naprężeń w elementach brzegowych na etapie bieżącym; $u_s'(F_i)$, $u_n'(F_i)$, $\sigma_s'(F_i)$, $\sigma_n'(F_i)$ – normalne i styczne prędkości płynięcia i naprężenia na granice C, spowodowane wpływem siły jednostkowej *F* w punkcie (x, y).

Metoda automatów komórkowych

Idea automatów komórkowych

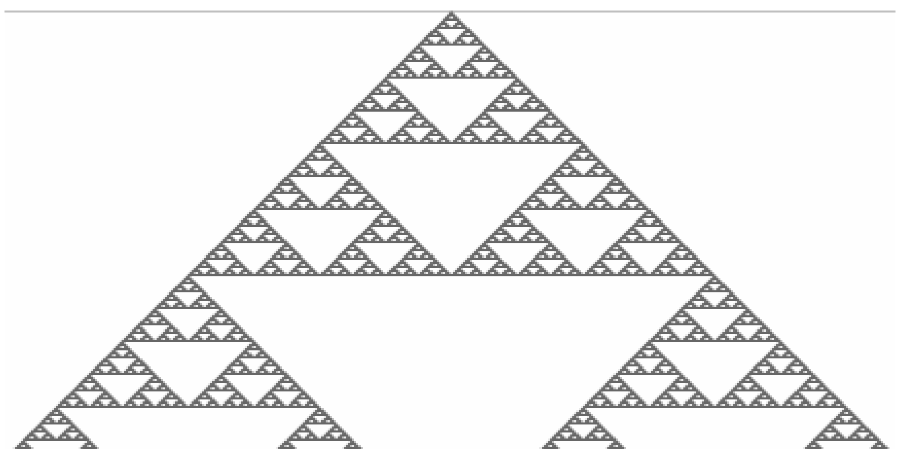
Summa=1

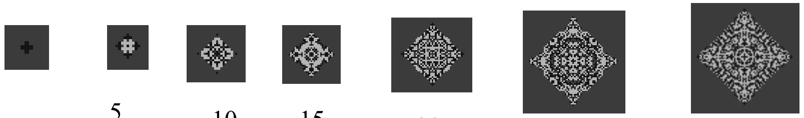
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**2**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**



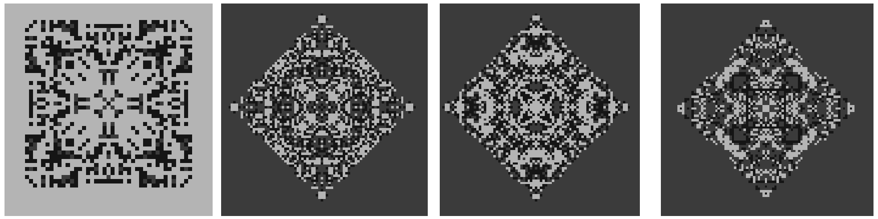
0	1	2

Kod	Summa
0	0
1	1
2	2
0	3
2	4
1	5
0	6

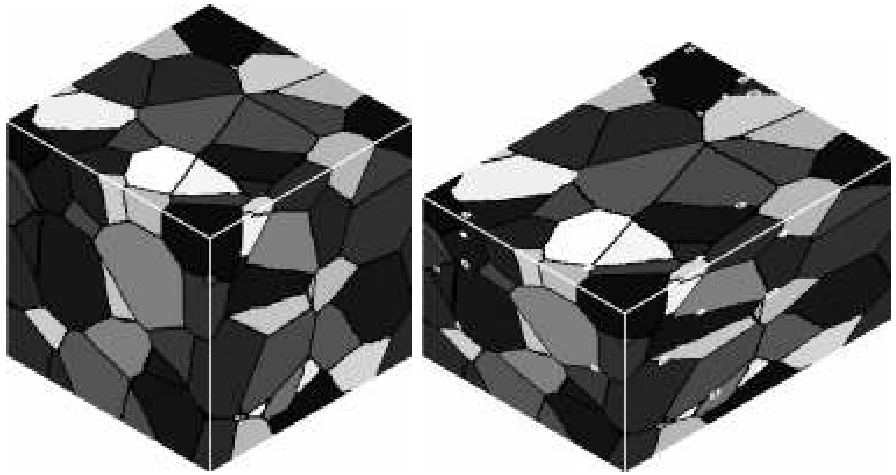




2 5 10 15 20 30 40



ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009



ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

ZAAWANSOWANE METODY OBLICZENIOWE W INŻYNIERII
Milenin Andrzej, 2009

Dodatkowy materiał

$$U_{ij}(p,\ q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu_0)Gr}\left[(3-4\nu_0)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right] =$$

$$= \frac{1}{16\pi(1-\nu_0)Gr}\left[(3-4\nu_0)\delta_{ij} + \frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{r^2}\right];$$

$$T_{ij}(p,\ q,\ \nu) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu_0)r^2}\left\{\left[(1-2\nu_0)\delta_{ij} + 3\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right]\frac{\partial r}{\partial \nu} + (1-2\nu_0)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\nu_j - \frac{\partial r}{\partial x_j}\nu_i\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{8\pi(1-\nu_0)r^2}\left\{\frac{1-2\nu_0}{r}\left[(x_i-\xi_i)\delta_{jk} - (x_j-\xi_j)\delta_{ik} - (x_k-\xi_k)\delta_{ij} - \frac{3(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)}{r^3}\right]\nu_k\right\}.$$