Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

Przetwarzanie Sygnałów

Studia Podyplomowe, Automatyka i Robotyka

Transformata Fouriera

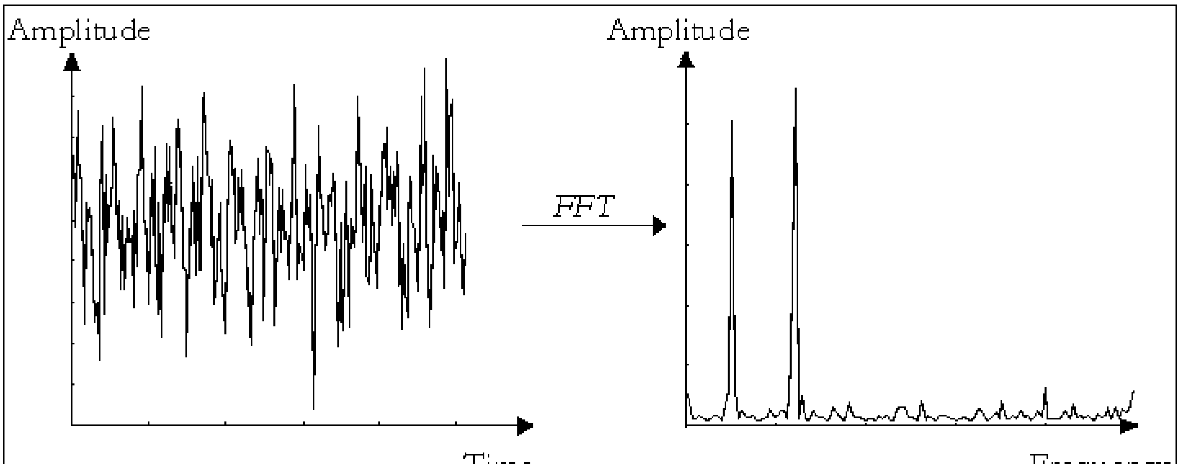
1. Wstęp teoretyczny

Transformata Fouriera (ang. *Fourier Transform*, FT) jest podstawowym narzędziem w analizie sygnałów stacjonarnych. Dokonuje ona dekompozycji sygnału na składowe sinusoidalne o różnych częstotliwościach:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

gdzie $F(\omega)$ jest *widmem częstotliwościowym*, a $f(t)$ badaną realizacją czasową.

Podczas transformacji następuje zmiana dziedziny czasu na dziedzinę częstotliwości (Rys. 1), czyli widmo zawiera informację o „zawartości” częstotliwościowej sygnału. Transformatę tę można interpretować jako wyznaczanie miary korelacji (podobieństwa) sygnału do poszczególnych funkcji harmonicznych, czyli sprawdzenia „ile” jest w sygnale konkretnej „częstotliwości”.



Rys. 1 Transformata Fouriera. Przejście z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości: sygnał w dziedzinie czasu (po lewej) i w dziedzinie częstotliwości (po prawej).

Do analizy częstotliwościowej sygnałów losowych stosuje się zazwyczaj *funkcję gęstości widmowej mocy* (ang. *Power Spectral Density*, PSD), czyli transformatę Fouriera funkcji autokorelacji:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(r) e^{-j2\pi ft} dr$$

Estymatę funkcji gęstości widmowej mocy oblicza się w ten sposób, że dzieli się obserwowany sygnał na krótsze fragmenty, wyznacza się widmo dla każdego z nich, a następnie uśrednia się i normuje kwadraty modułów tych widm.

2. Zadanie praktyczne

Oblicz transformatę Fouriera i funkcję gęstości widmowej mocy dla:

a) sygnału losowego o rozkładzie normalnym,

b) sygnału sinusoidalnego $y = \sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_2 t) + \frac{1}{4}\sin(2\pi f_3 t)$ zakłóconego szumem białym, o wariancji 0.8. Częstotliwości składowe wynoszą: f_1 = 5, f_2 = 10, f_3 = 30, częstotliwość próbkowania *fs* = 1000Hz.

Podstaw parametry:

```
clear
N=1500;            %liczba próbek sygnału
f1=5;              %częstotliwości składowych sinusoidalnych sygnału
f2=15;
f3=30;
fs=1000;           %częstotliwość próbkowania
td=1/fs;           %okres sygnału
war=0.8;           %wariancja zakłócenia
sig=sqrt(war);     %odchylenie standardowe zakłócenia
Nf=1024;           %liczba próbek transformaty Fouriera
```

Wygeneruj sygnały testowe:

```
%sygnał losowy i deterministyczny
for i=1:N
    yn(i)=randn;
    y(i)=sin(2*pi*f1*td*i) + 0.5*sin(2*pi*f2*td*i) + ...
        0.25*sin(2*pi*f3*td*i) + sig*randn;
end
```

Oblicz transformatę Fouriera za pomocą funkcji *fft*. Wektor „częstotliwości” *f* będzie potrzebny do wyskalowania osi częstotliwości w Hz:

```
%transformata Fouriera
Yn=fft(yn,Nf);
Y=fft(y,Nf);
f=fs*(0:Nf-1)/Nf;   %wektor częstotliwości w [Hz]
```

Oblicz funkcję gęstości widmowej mocy za pomocą funkcji *periodogram*:

```
% PSD
[Pn,wn] = periodogram(yn,[],Nf,fs);
[P,w] = periodogram(y,[],Nf,fs);
```

Narysuj sygnały testowe:

```
% wizualizacja
t=(0:N-1)*td;    %wektor "czasu"
subplot(3,2,1)
plot(t,yn),title('Sygnal losowy'),xlabel('czas [s]')
subplot(3,2,2)
plot(t,y),title('Sygnal sinusoidalny, zaszumiony'),xlabel('czas [s]')
```

Narysuj transformaty Fouriera:

```
% FFT
subplot(3,2,3)
plot(f(1:50),abs(Yn(1:50)),'.-'),title('Transformata Fouriera'),...
    xlabel('częstotliwość [Hz]','FontName','MS Sans Serif')
subplot(3,2,4)
plot(f(1:50),abs(Y(1:50)),'.-'),title('Transformata Fouriera')...
    ,xlabel('częstotliwość [Hz]','FontName','MS Sans Serif')
```

Narysuj funkcje gęstości widmowej mocy:

```
% PSD
subplot(3,2,5)
plot(wn(1:50),Pn(1:50),'.-')
title('Widmowa gęstość mocy','FontName','MS Sans Serif'),...
    xlabel('częstotliwość [Hz]','FontName','MS Sans Serif')
subplot(3,2,6)
plot(w(1:50),P(1:50),'.-')
title('Widmowa gęstość mocy','FontName','MS Sans Serif'),...
    xlabel('częstotliwość [Hz]','FontName','MS Sans Serif')
```

Przeanalizuj rysunki.

W przypadku sygnału losowego, widmo Fouriera wskazuje na obecność „wielu” częstotliwości w całym obserwowanym zakresie pasma. Natomiast w przypadku sygnału sinusoidalnego, wyraźnie widać osobne prążki dla poszczególnych składowych częstotliwościowych: $f_1 = 5$, $f_2 = 10$, $f_3 = 30$ Hz.
Ponieważ funkcja gęstości widmowej mocy uśrednia widmo, jej wykres jest bardziej wygładzony w stosunku do transformaty Fouriera, a przez to poszczególne prążki widma są bardziej widoczne.