ZESTAW II

w razie pytań: *lukasz.kusmierz@uj.edu.pl*

Zadanie domowe:

1. Pewien leniwy profesor chce, by odpowiedzi z egzaminu sprawdzali sami piszący go studenci. W tym celu zbiera wszystkie kartki z odpowiedziami (każdy student zapełnia tylko jedną), następnie miesza je i rozdaje spowrotem. Na ile sposobów studenci mogą otrzymać te kartki? Jakie jest prawdopodobieństwo, że nikt nie dostał swojej kartki z odpowiedziami? Odpowiedź podaj dla dowolnej ilości studentów n. Ile wynosi to prawdopodobieństwo w granicy $n \to \infty$?

   Wskazówki:

   - Oznaczmy przez w_n ilość tych możliwych rozdań, w których żaden student nie sprawdza swojej kartki, a przez p_n prawdopodobieństwo takiego rozdania. Jak związane są w_n i p_n?
   - Weźmy pod uwagę jednego ze studentów (A). Dla każdego sprzyjającego rozdania musi on dostać kartkę któregoś z pozostałych studentów (B). W takim układzie mamy dwa przypadki: student B dostaje kartkę studenta A albo kartkę jednego z pozostałych studentów. Rozważając pozostałych studentów w obu tych przypadkach z osobna, ułóż równanie rekurencyjne postaci
   $$w_n = a(n)w_{n-1} + b(n)w_{n-2}, \tag{1}$$
   gdzie $a(n)$ i $b(n)$ są funkcjami do wyznaczenia.
   - Wykorzystując równanie (1) udowodnij przez indukcję
   $$w_n = nw_{n-1} + (-1)^n. \tag{2}$$
   - Przepisz równanie (2) na analogiczne równanie rekurencyjne na p_n.
   - Rozwiąż rekurencję podając wzór (w postaci sumy) na p_n oraz w_n.

Zagadnienia teoretyczne:

Doświadczenia losowe,

Przestrzeń zdarzeń elementarnych,

Zdarzenia,

Prawdopodobieństwo warunkowe,

Niezależność zdarzeń,

Wzór Bayesa.

Zadania:

1. Niech:

   A będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 6,
   B - zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 2,
   C - zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 5.

   Znaleźć zbiory: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A - C$, $A - C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$.

2. Liczby $1, 2, ..., n$ zostały ustawione przypadkowo. Znaleźć prawdopodobieństwo, że: **a)** cyfry 1 i 2, **b)** cyfry 1, 2, 3 - pojawiły się w sąsiedztwie i w wymienionej kolejności

3. Montując pewien aparat, do zacisku A należy podłączyć dwa przewody: jeden zielony, a drugi niebieski. Natomiast do zacisku B - trzeci przewód, czerwony. Oblicz prawdopodobieństwo prawidłowego połączenia, jeśli montujący: a) łączy przewody kompletnie losowo; b) wie, że do każdego zacisku musi być podłączony co najmniej jeden przewód.

4. Dziecko bawiąc się literami A, A, A, E, K, M, M, T, T, Y, układa różne słowa. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że przypadkowo złoży słowo MATEMATYKA.

5. Grupa studencka składa się z n osób. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żadne dwie osoby z tej grupy nie obchodzą urodzin tego samego dnia. Jakie jest minimalne n takie, że to prawdopodobieństwo jest mniejsze od 1/2? Dla uproszczenia przyjmij równomierne prawdopodobieństwo urodzenia w ciągu roku oraz że liczba dni w roku jest równa 365.

6. Obliczyć $P(A \cap \bar{B})$, znając $P(A)$ i $P(A \cap B)$.

7. Niech A i B będą zdarzeniami losowymi. Wykazać, że $P(A) + P(\bar{A} \cap B) = P(B) + P(A \cap \bar{B})$.

8. W pewnym przedsiębiorstwie 96% wyprodukowanych wyrobów jest dobrych. Wśród 100 sztuk dobrych wyrobów 75 jest pierwszego gatunku. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pewna sztuka wyprodukowana w tym przedsiębiorstwie jest pierwszego gatunku.

9. Dwaj artylerzyści strzelają niezależnie jeden od drugiego do tego samego celu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony tylko raz, jeżeli wiadomo, że pierwszy strzelec trafia średnio w cel 7 razy na 10 oddanych strzałów, a drugi 8 razy na 10?

10. Każde zdjęcie rentgenowskie przedstawiające obraz tkanki podejrzanej o wystąpienie zmian patologicznych jest sprawdzane przez dwóch niezależnych specjalistów. Prawdopodobieństwo niezauważenia zmiany przez pierwszą osobę sprawdzającą wynosi 0,08. Dla drugiej osoby prawdopodobieństwo to wynosi 0,05. Obliczyć prawdopodobieństwo, że istniejąca i zobrazowana na zdjęciu zmiana nie zostanie zauważona.

11. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje tak zwaną fałszywą pozytywną odpowiedź u 5% zdrowych (u chorego daje zawsze odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora? Zakładamy, że nic nie wiemy o innych możliwych objawach u badanej osoby.

12. Aparatura medyczna w Twoim szpitalu jest sprowadzana od 3 dostawców: A, B, C, w następujących ilościach: 50%, 20% i 30%. Wadliwość urządzeń: od dostawcy A - 1%, B - 2%, C - 3%. Jedno z urządzeń okazało się wadliwe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ono od dostawcy A?