ZESTAW III

w razie pytań: *lukasz.kusmierz@uj.edu.pl*

Zagadnienia teoretyczne:

Zmienne losowe dyskretne,

Rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuanta zmiennej losowej,

Wartość oczekiwana i wariancja, *funkcja tworząca momenty,

Rozkład jednopunktowy, dwupunktowy, dwumianowy i Poissona.

Zadania:

1. Prom kursuje między przystaniami A oraz B, znajdującymi się na dwu przeciwległych brzegach rzeki i odległymi od siebie o k km. Wiadomo, że:

   - $P(A) = 0,1$ (prawdopodobieństwo znajdowania się promu na przystani A),
   - $P(B) = 0,2$ (prawdopodobieństwo znajdowania się promu na przystani B),
   - prom pływa ze stałą prędkością, nie zatrzymuje się na rzece poza przystaniami i prawdopodobieństwo tego, że znajduje się na rzece (poza przystaniami) jest równe 0,7.

   Niech X oznacza odległość promu od przystani A. Znaleźć dystrybuantę F_X zmiennej losowej X.

2. Narysować histogram i dystrybuantę zmiennej losowej X, dla której: $P(X = 0) = 0,1$, $P(X = 1) = 0,9$.

3. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X:

x_i	-5	-2	0	1	3	8
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	c	0,1

   Wyznaczyć:

   - Stałą c
   - Wykres funkcji prawdopodobieństwa
   - Dystrybuantę i jej wykres
   - Prawdopodobieństwo: P($X = 1$), P($X = 2$), P($X < 3$), P($X < 2$), P($-2 \leq X < 3$).

4. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X. Wyznaczyć jej funkcję prawdopodobieństwa.

x	$(-\infty, -2\rangle$	$(-2, 1\rangle$	$(1, 3\rangle$	$(3, +\infty\rangle$
F(x)	0	0,2	0,8	1

   Wyznacz jej funkcję prawdopodobieństwa. Oblicz $E(X)$ i $V(X)$.

5. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych o rozkładach:
   (a) $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \ \lambda > 0$
   (b) $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, ...$
   (c) $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n$

6. Z bieżącej produkcji pobrano w sposób przypadkowy 5 sztuk towaru. Niech X oznacza liczbę sztuk wadliwych wśród pobranych. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X, jeśli wiadomo, że wadliwość jest równa 0,1.

7. Egzaminator zadaje studentowi kolejno pytania. Prawdopodobieństwo udzielenia dobrej odpowiedzi na każde z pytań wynosi 90%. Egzamin jest przerywany w chwili, gdy student nie umie odpowiedzieć na zadane pytanie. Podać rozkład zmiennej losowej X, czyli liczby pytań zadanych przez egzaminatora. Podać najbardziej prawdopodobną liczbę zadanych pytań i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

8. Robotnik obsługuje cztery jednakowe automaty funkcjonujące niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwo, że w ciągu godziny automat będzie wymagał interwencji robotnika wynosi 0,9. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu godziny:
   - żaden z automatów nie będzie wymagał interwencji robotnika,
   - liczba automatów wymagających interwencji będzie nie większa od 2.

9. W pewnym szpitalu rodzi się średnio 1000 dzieci rocznie.
   - Narysuj rozkład prawdopodobieństwa dla liczby narodzin w ciągu jednej doby.
   - Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu jednej doby przyjdzie na świat więcej niż 3 dzieci?

10. Średnie stężenie bakterii *E. coli* w skażonym zbiorniku wodnym wynosi 100 na litr. Odpowiedz na pytania:
    - Jakie jest prawdopodobieństwo, że próbka o objętości 10 ml pobrana z tego zbiornika nie wykaże skażenia?
    - Jaką próbkę należy zbadać, aby wykryć skażenie z prawdopodobieństwem co najmniej 90%?

    Zakładamy naiwnie, że jesteśmy w stanie wykryć już pojedynczą bakterię.

11. Apteka sprzedaje średnio 2 opakowania insuliny dziennie. Pewnego dnia w aptece zostały tylko 2 opakowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tego dnia zabraknie insuliny dla klientów?

12. Ciągła zmienna losowa T przyjmuje wartości w przedziale $[0, \infty)$. Zmienna ta ma własność braku pamięci, tzn.:
    $$P(T > t + s | T > t) = P(T > s). \tag{1}$$
    Interpretując T jako czas oczekiwania na jakieś wydarzenie zinterpretuj własność braku pamięci. Znajdź wszystkie możliwe dystrybuanty oraz funkcje gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej T, które spełniają podany warunek.