ZESTAW IV

w razie pytań: *lukasz.kusmierz@uj.edu.pl*

Zagadnienia teoretyczne:

Zmienne losowe ciągłe, wartość oczekiwana i wariancja, funkcje zmiennej losowej.

Zadanie domowe:

1. Oznaczmy, że jeśli zmienna losowa U ma rozkład jednorodny na $(0,1)$ to $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Jeżeli znamy dystrybuantę pewnego rozkładu F, to wówczas zmienna losowa $X = F^{-1}(U)$ ma rozkład o dystrybuancie F (dlaczego?). Może to posłużyć do generowania rozkładów opisanych żądaną funkcją. Technika ta nazywana jest *metodą odwracania dystrybuanty.*
   Przykładowo, chcielibyśmy wygenerować rozkład wykładniczy $\rho_X(x) = e^{-x}$ dla $x > 0$. Obliczamy dystrybuantę $F_X(x) = \int_0^x e^{-x'} dx' = 1 - e^{-x}$. Zapiszmy więc, że jeśli $F_X(x) = u$ to $x = -\ln(1-u)$. Ponieważ $1-u$ ma taki sam rozkład jak u, to ostatecznie dostajemy, że zmienna losowa $X = -\ln(U)$ (gdzie $U \sim \mathcal{U}(0,1)$) ma żądany rozkład $\rho_X(x) = e^{-x}$.
   Używając podobnej techniki pokaż, jak wygenerować rozkłady:
   - potęgowy $\rho(x) = nx^{n-1}$, gdzie $x \in [0,1]$,
   - Cauchy'ego $\rho(x) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{x^2+\gamma^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$,
   - normalny $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Zadania:

1. Oblicz stałą normalizacyjną, średnią oraz wariancję rozkładów:
   - Rozkład jednorodny na odcinku $[0, L]$,
   - $f(x) = \frac{N}{\gamma^2+(x-x_0)^2}$,
   - $f(x) = Ne^{-a|x|}$,
   - $f(x) = Ne^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
2. Wyznacz funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y:
   (a) X - zmienna losowa o rozkładzie jednorodnym na odcinku $[-a, a]$
   - $Y = 2X$,
   - $Y = X^2$.

   (b) X - zmienna losowa o standardowym rozkładzie normalnym ($\mu = 0$, $\sigma = 1$)
   - $Y = X + b$,
   - $Y = X^2$,
   - $Y = aX$,
   - $Y = e^X$,

   gdzie a i b to dowolne stałe.

   (c) *X_i - niezależne zmienne losowe o identycznych rozkładach (*i.i.d.*) Gaussa z $\mu = 0$
   - $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$,
   - $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$.