

1. Pokazać, że średnia arytmetyczna z próby:

$$\hat{m}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Jest nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej cechy  $X$  w populacji o dowolnym rozkładzie.

2. Sprawdź, czy wariancja empiryczna  $s^2$  jest nieobciążonym estymatorem parametru  $\sigma^2$ , będącego wariancją cechy  $X$  elementów populacji generalnej.
3. Przed rozpoczęciem maratonu 31 zawodnikom w wieku 30-40 lat zmierzono ciśnienie skurczowe krwi. U jednego z nich stwierdzono 100 mmHg, u jednego 110 mmHg, u pięciu 120 mmHg, u siedmiu 130 mmHg, u dziewięciu 140 mmHg, u czterech 150 mmHg, u trzech 160 mmHg i u jednego 170 mmHg. Znajdź 95
4. Właściciel portalu internetowego chciał określić do jakiej grupy użytkowników trafia ze swoimi informacjami. Wyznacz 99-procentowy przedział ufności dla średniego wieku użytkowników tego portalu na podstawie danych zebranych w poniższej tabeli.

Wiek		Liczba pacjentów		
Przedziały klasowe (granice)	Środki przedziałów klasowych	Szereg rozdzielczy	Szereg skumulowany	Wartości pomocnicze do obliczania średniej
	$\dot{x}_i$	$n_i$		$n_i \cdot \dot{x}_i$
25 ÷ 34	30	17	17	510
35 ÷ 44	40	116	133	4640
45 ÷ 54	50	493	626	24650
55 ÷ 64	60	545	1171	32700
65 ÷ 74	70	186	1357	13020
	Ogółem	1357		75520

5. Na próbie 200 dorosłych Polaków przeprowadzono sondaż opinii dotyczącej zabezpieczenia finansowego na przyszłość. Uzyskano 35% pozytywnych odpowiedzi. Ile osób należałoby wylosować do następnego badania, aby na poziomie ufności 98% błąd oszacowania nie przekroczył 3%?
6. Przeprowadzono testy odporności skrzynki poczty elektronicznej na wiadomości spam, wysyłając na nią 200 różnych wiadomości tego typu. Testy pokazały, że dzięki zabezpieczeniom tylko  $p = 35\%$  niechcianych wiadomości dostaje się do skrzynki odbiorczej. Ile wiadomości spam należałoby wysłać na skrzynkę w następnym badaniu, aby na poziomie ufności 98% błąd oszacowania liczby  $p$  nie przekraczał  $d = 3\%$ ?
7. Z danych pewnego badania dotyczącego dostępności Internetu w wiejskich gospodarstwach rodzinnych w wybranych rejonach kraju wynika, że spośród przebadanych 300 rodzin 220 jest wyposażonych w komputer z Internetem. Przyjmując poziom ufności 0,9 wyznaczyć przedział ufności dla nieznannej frakcji rodzin w tych rejonach, posiadających Internet.
8. Z populacji studentów pewnej uczelni wylosowano 10-ciu. Studenci ci ponieśli następujące koszty wynikające z oprawienia pracy inżynierskiej: 15, 17, 17, 18, 23, 20, 23, 21, 26, 19 złotych. Zakładając, że rozkład wydatków jest normalny, na podstawie powyższych

danych wyznaczyć przedział ufności dla nieznannej wariancji populacji na poziomie ufności  $1 - \alpha = 0,98$ .

9. Odchylenie standardowe  $\sigma$  błędu przyrządu pomiarowego jest znane. Zakładamy, że rozkład błędów pomiarów jest rozkładem normalnym. W poniższej tabelce zapisano wyniki 10 pomiarów:

Nr pomiaru $k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wynik pomiaru $x_k$ [mm]	7	7,5	8,5	8	6	7,5	6,5	5,5	7,5	6

Znajdź wartości liczbowe krańców przedziału ufności (w mm) dla wartości przeciętnej  $\mu$ , przyjmując  $\sigma = 1$  i poziom ufności: a)  $1 - \alpha = 0,99$ , b)  $1 - \alpha = 0,98$ , c)  $1 - \alpha = 0,95$ .

10. Jak liczną próbę Polaków należałoby poddać badaniom statystycznym, aby długość przedziału ufności dla średniego czasu spędzanego dziennie przed komputerem była nie większa niż 15 min. Przyjmujemy, że mamy do czynienia z rozkładem normalnym o znanej wartości odchylenia standardowego  $\sigma = 90$  min dla całej populacji oraz przyjmujemy  $\alpha = 0,05$ .
11. Aby zbadać niezawodność  $\pi$  pewnego systemu wykrywającego tablice rejestracyjne samochodów (prawdopodobieństwa  $\pi$  poprawnego wykrycia) podano systemowi 400 zdjęć samochodów z widocznymi tablicami rejestracyjnymi. Stwierdzono, że w 330 przypadkach nastąpiło poprawne wykrycie. Wyznaczyć wartości liczbowe krańców przedziału ufności dla prawdopodobieństwa  $\pi$ , przyjmując poziom ufności 0,95.

*(oznaczenie częstości/prawdopodobieństwa  $\pi$  dla populacji odpowiada oznaczeniu  $p$  dla próby)*