ZESTAW IV

Inżynieria Biomedyczna I rok
semestr zimowy 2016/2017

1 Zagadnienia teoretyczne:

Zmienne losowe dyskretne,

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej,

Dystrybuanta,

Rozkład jednopunktowy, dwupunktowy i dwumianowy,

Rozkład Poissona,

2 Zadania:

1. Narysować histogram i dystrybuantę zmiennej losowej X, dla której: $P(X = 0) = 0,1$, $P(X = 1) = 0,9$.

2. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X:

x_i	-5	-2	0	1	3	8
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	c	0,1

   Wyznaczyć:
   - Stałą c
   - Wykres funkcji prawdopodobieństwa
   - Dystrybuantę i jej wykres
   - Prawdopodobieństwo: P$(X = 1)$, P$(X = 2)$, P$(X < 3)$, P$(X < 2)$, P$(-2 \leq X < 3)$

3. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X. Wyznaczyć jej funkcję prawdopodobieństwa.

x	$(-\infty, -2\rangle$	$(-2, 1\rangle$	$(1, 3\rangle$	$(3, +\infty\rangle$
F(x)	0	0,2	0,8	1

4. Dana jest dystrybuanta F(x) zmiennej losowej X następującej postaci:

x	$(-\infty, -1\rangle$	$(-1, 1\rangle$	$(1, 2\rangle$	$(2, 5\rangle$	$(5, 10\rangle$	$(10, +\infty)$
F(x)	0	0,1	0,3	0,6	0,9	1

   Oblicz E(X) i $V(X)$.

5. Określić zmienną losową dla rzutu sześcienną kostką, narysować wykres funkcji prawdopodobieństwa. Wyznaczyć dystrybuantę i jej wykres. Podać prawdopodobieństwa: P$(X < 3.5)$, P$(3 \leq X < 4.5)$, P$(X = 5)$

6. Narysować histogram i dystrybuantę F zmiennej losowej X, dla której:

   (a) $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

(b) $P(X=1)=\frac{1}{4}$, $P(X=2)=\frac{3}{4}$

(c) $P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k=1,2,...$

Obliczyć $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład określony funkcją prawdopodobieństwa:

x_k	-1	0	1	3	4
p_k	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.

8. Z bieżącej produkcji pobrano w sposób przypadkowy 5 sztuk towaru. Niech X oznacza liczbę sztuk wadliwych wśród pobranych. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X, jeśli wiadomo, że wadliwość jest równa 0,1.

9. Robotnik obsługuje cztery jednakowe automaty funkcjonujące niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwo, że w ciągu godziny automat będzie wymagał interwencji robotnika wynosi 0,9. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu godziny:
   - żaden z automatów nie będzie wymagał interwencji robotnika
   - liczba automatów wymagających interwencji będzie nie większa od 2.

10. W centrali telefonicznej jest n = 20 linii. Wezwania nadchodzą niezależnie od siebie i nadchodzące wezwanie może zająć którąkolwiek z wolnych linii. Prawdopodobieństwo tego, że linia jest wolna, wynosi 0,4.
    - Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że liczba linii zajętych jest nie większa od 8,
    - Znaleźć najbardziej prawdopodobną liczbę linii zajętych

11. W pewnym szpitalu rodzi się średnio 1000 dzieci rocznie. Można przyjąć, że zdarzenia narodzin następują zgodnie z rozkładem Poissona.
    - Narysuj rozkład prawdopodobieństwa dla liczby narodzin w ciągu jednej doby.
    - Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu jednej doby przyjdzie na świat więcej niż 3 dzieci?

12. Średnie stężenie bakterii coli w skażonym zbiorniku wodnym wynosi 100 na litr. Odpowiedz na pytania:
    - jakie jest prawdopodobieństwo, że próbka o objętości 10 ml pobrana z tego zbiornika nie wykaże skażenia?
    - jaką próbkę należy zbadać, aby wykryć skażenie z prawdopodobieństwem co najmniej 90%?

13. Apteka sprzedaje średnio 2 opakowania insuliny dziennie. Pewnego dnia w aptece zostały tylko 2 opakowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tego dnia zabraknie insuliny dla klientów?

14. Przy masowych prześwietleniach małoobrazkowych prawdopodobieństwo trafienia na człowieka chorego na gruźlicę jest równe 0,01. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia tego, że wśród 200 prześwietlonych ludzi liczba X chorych na gruźlicę jest nie mniejsza niż 3.

15. Każde z pytań egzaminacyjnych jest napisane na oddzielnej kartce. Student losuje jedno pytanie, po czym zwraca kartkę. Egzaminator egzaminuje trzech studentów. Każdy ze zdających zna odpowiedzi dokładnie na 50% pytań. Niech X oznacza liczbę studentów, którzy umieli odpowiedzieć na wylosowane pytanie. Znaleźć rozkład i dystrybuantę zmiennej losowej X. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden student odpowiedział na wylosowane pytanie.

16. Wiadomo, że 1% skrzynek winogron psuje się w czasie transportu. Z transportu w sposób przypadkowy wybrano 3 skrzynki. Niech X oznacza liczbę skrzynek z zepsutymi winogronami spośród trzech wybranych. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

17. Po określonej trasie jeździ 5 autobusów. Awarie poszczególnych autobusów są zdarzeniami niezależnymi i prawdopodobieństwo awarii każdego z nich w określonym przedziale czasu jest równe 0,2. Niech X oznacza liczbę autobusów, które w ciągu rozważanego czasu uległy awarii (autobus, który uległ awarii nie jest naprawiany). Obliczyć $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$.

18. W skład złożonej aparatury wchodzi m.in. $n = 500$ elementów określonego rodzaju. Prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku każdego z tych n elementów jest równe $0,002$ i nie zależy od stanu pozostałych elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku:
    (a) dokładnie jednego elementu
    (b) nie mniej niż 1 elementu

19. Obliczyć oczekiwaną stopę zysku i ryzyko inwestora dla danych liczbowych zawartych w poniższej tabeli.

Stan gospodarki	Prawdopodobieństwo	Stopa zysku
Szybki rozwój	0,1	20%
Umiarkowany rozwój	0,2	5%
Stagnacja	0,3	1%
Niewielka recesja	0,2	−1%
Znaczna recesja	0,1	−10%

20. W pewnym urządzeniu trzeba przeciętnie 7 razy w roku (ok. 7000 h pracy) wymieniać pewien podzespół. Zakładając, że liczba wymian tego podzespołu w danym okresie ma rozkład Poissona, wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że konieczność wymiany podzespołu nastąpi po 10, 100 i 1000 godzinach pracy.

21. Korekta 500-stronicowej książki zawiera 500 poprawek. Zakładając, że rozkład ilości błędów na jednej stronie jest rozkładem Poissona, obliczyć następujące prawdopodobieństwa:
    (a) na stronie są nie mniej niż 3 błędy
    (b) na stronie jest co najwyżej 1 błąd