Zestaw 3: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. Zmienna losowa dyskretna.

Zagadnienia: Zdarzenia losowe, klasyczna definicja prawdopodobieństwa, niezależność zdarzeń. Zmienna losowa dyskretna, dystrybuanta dyskretnej zmiennej losowej, rozkład prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej, rozkład dwumianowy.

Zad.1 Oblicz prawdopodobieństwo, że przypadkowo wybrany punkt kwadratu: $|x| < 1, |y| < 1$, jest punktem leżącym wewnątrz okręgu o równaniu: $x^2 + y^2 = 1$. Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych.

> *Wskazówka: w przypadku gdy zbiór zdarzeń elementarnych jest nieskończony, nieprzeliczalny, można go przedstawić jako podzbiór przestrzeni euklidesowej, który ma skończona miarę (długość, pole). Prawdopodobieństwo geometryczne zdarzenia A zawierającego się w przestrzeni Ω liczy się wtedy: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, gdzie $m(A)$, $m(\Omega)$ oznaczają miary zbiorów (zdarzeń) Ω i A.*

Zad.2 Wykładowca umówił się ze studentem na konsultacje w piątek między 15 a 16. Przypuśćmy, że obie strony obowiązuje zasada kwadransa akademickiego, tzn. strona, która przyszła pierwsza, czeka tylko 15 minut, po czym odchodzi. Obliczyć prawdopodobieństwo, że konsultacje dojdą do skutku, jeśli obie strony przychodzą losowo między 15 a 16 i niezależnie od siebie? Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych.

> *Wskazówka: Wykorzystaj prawdopodobieństwo geometryczne. Przyjmij układ współrzędnych (x,y), w którym x – moment czasowy przybycia wykładowcy, y – moment czasowy przybycia studenta.*

Zad.3 Trzy niezależne urządzenia do kontroli jakości w pewnym zakładzie produkcyjnym oceniają jakość wyprodukowanych wyrobów. Urządzenia są ustawione szeregowo na taśmie produkcyjnej. Pierwsze urządzenie wykrywa średnio 60% wad produkcji, drugie i trzecie po 70% każde. Jaki procent wad produkcyjnych wykrywają łącznie?

Zad.4 Dla jakiej wartości parametru ***t*** zbiór wartości:

x_i	-4	-2	1	3	10
p_i	0,2	0,1	0,3	0,1	***t***

Jest rozkładem prawdopodobieństwa dla dyskretnej zmiennej losowej X?

a) Naszkicuj wykres rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuantę;
b) Oblicz wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe dla tej zmiennej;
c) Oblicz $P(X \geq 0)$, $P(X < 7)$.

Zad.5 Dane są możliwe wartości zmiennej losowej dyskretnej X: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$
oraz wartości oczekiwane tej zmiennej i jej kwadratu: $E(X) = 0{,}1$; $E(X^2) = 0{,}9$;
Wyznacz prawdopodobieństwa: p_1, p_2, p_3 odpowiadające możliwym wartościom x_1, x_2, x_3 zmiennej losowej X.

Zad.6 Dyskretna zmienna losowa X określona jest dystrybuantą:

X	x < -7,2	-7,2≤ x < -6,1	-6,1 ≤ x < -5,0	-5,0 ≤ x < -3,5	-3,5≤ x < -0,5	x ≥ -0,5
F(x)	0	1/6	1/4	7/12	3/4	1

a) Narysuj wykres dystrybuanty.
b) Wyznacz funkcję rozkładu prawdopodobieństwa (histogram, funkcja lub tabela).
c) Oblicz P(-7 < X ≤ -4,5) oraz P(-1 < X ≤ 0).

Zad.7 Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy o wartości oczekiwanej $E(X) = 18$ oraz odchyleniu standardowym $D(X) = 3$. Jaka jest w tym przypadku liczba niezależnych doświadczeń oraz jakie jest prawdopodobieństwo porażki w pojedynczym doświadczeniu?

Zad.8 Energia elektryczna ma być z przerwami wykorzystywana przez 5 pracowników pewnej firmy $(n = 5)$. Aby z grubsza oszacować zapotrzebowanie na energię przyjęto następujące założenia:

1) W danej chwili prawdopodobieństwo p zapotrzebowania na energię przez każdego z pracowników jest takie samo;
2) Pracownicy pracują niezależnie od siebie;
3) Każdy z nich korzysta z energii przez 12 minut w ciągu godziny.

Niech X oznacza liczbę pracowników korzystających z energii elektrycznej w danym momencie. Znajdź rozkład zmiennej losowej X. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba pracowników korzystających z energii w danym momencie nie jest większa od 2.

Zad.9 Prawdopodobieństwo tego, że statystyczny student nie jest przygotowany do zajęć wynosi 1/3. Prowadzący ćwiczenia wybiera przypadkowo 4 studentów. Wyznacz funkcję rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, której wartościami są liczby studentów nieprzygotowanych do ćwiczeń wśród 4 wybranych. Narysuj tez dystrybuantę. Oblicz wartość oczekiwaną $E(X)$, wariancję $D^2(X) = V(X)$ oraz prawdopodobieństwo $P(X \leq 1)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 2)$.