

Zestaw 4: Zmienna losowa ciągła, rozkład normalny;

Zagadnienia: Zmienna losowa ciągła, dystrybuanta zmiennej losowej, rozkłady prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej, wstęp do rozkładu normalnego.

Zad.1 Wyznacz taką stałą A , aby funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 5e^{-Ax}, & x > 0 \end{cases}$$

Była gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X . Oblicz $P(X > 1)$.

Zad.2 Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{B}{x^4}, & |x| \geq 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

Dla jakiej wartości B funkcja ta jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X ? Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmie wartość większą od 2.

Zad.3 Dla jakiej wartości c funkcja $f(x)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X :

| | | | |
|--------|---------|-------------------|---------|
| x | $x < 0$ | $0 \leq x \leq 1$ | $x > 1$ |
| $f(x)$ | 0 | $c(1-x)$ | 0 |

- Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej
- Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję
- Oblicz prawdopodobieństwa: $P(X \leq 0,5)$, $P(0 < X \leq 0,75)$, $P(0,5 < X \leq 0,75)$, $P(X > 1)$.

Zad.4 Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X , gdy funkcja gęstości jest postaci:

| | | | |
|--------|---------|-------------------------------|---------------------|
| x | $x < 0$ | $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ | $x > \frac{\pi}{3}$ |
| $f(x)$ | 0 | $2 \sin x$ | 0 |

Zad.5 Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(1,83; 0,67)$. Naskicuj na wykresie rozkład normalny i zaznacz na nim poniższe przedziały, oblicz:

- $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma)$
- $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$
- $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma)$

Zadanie ilustruje tzw. regułę trzech sigm

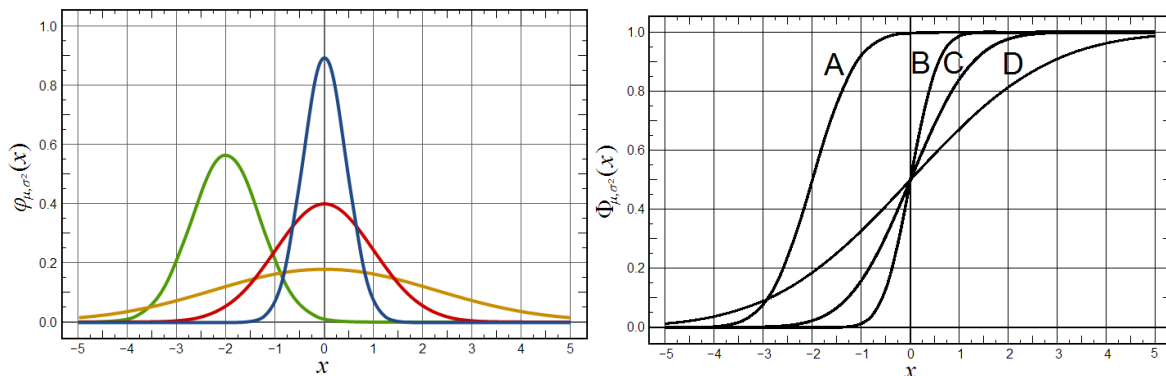
Zad. 6 Dystrybuanta zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym określona jest wzorem:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-(t-1)^2}{8}\right] dt$$

- Określ parametry (wartość oczekiwaną i odchylenie stand.) rozkładu zmiennej losowej X ;
- Oblicz prawdopodobieństwa: $P(0,5 < X \leq 1,5)$, $P(X \leq 2)$, $P(X > 1)$.

Zad.7 Na podstawie analizy poniższych wykresów:

- zaznacz na wykresach i odczytaj wartości oczekiwane dla każdego rozkładu;
- do każdego z rozkładów dopasuj wariancję: $\sigma_1^2 = 0,2$; $\sigma_2^2 = 5$; $\sigma_3^2 = 1$; $\sigma_4^2 = 0,5$.
- do każdego z rozkładów dopasuj odpowiednią funkcję dystrybuanty;



Zad.8 Zmienna losowa ma rozkład normalny $N(\mu; 0,35)$. Oblicz wartość oczekiwaną μ tej zmiennej losowej, jeśli $P(X \leq 2,5) = 0,6915$.

Zad.9 Pierwszy kwartył Q_1 dla zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym $N(\mu; \sigma)$ wynosi 0,5, a trzeci $Q_3 = 1,5$. Wyznacz parametry μ i σ tego rozkładu.

Zad.10 W ofercie pewnego dostawcy internetu prędkość pobierania danych podlega rozkładowi normalnemu. Wiedząc, że średnia prędkość pobierania danych wynosi 41 Mb/s z odchyleniem standardowym równym 2,4 Mb/s, oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- Prędkość sprawdzona w dowolnej chwili będzie w granicach 40 do 43,5 Mb/s;
- Będzie większa niż 39,5 Mb/s.

Zad.11 Średnia temperatura ciała człowieka to 36,8 °C z odchyleniem standardowym 0,4°C. Zakładając, że temperatura w populacji przyjmuje rozkład normalny, odpowiedz na pytania:

- Przyjmując, że mówimy i gorączce przy co najmniej 37,5 °C, jakie jest prawdopodobieństwo zdiagnozowania u kogoś gorączki, choć w rzeczywistości będzie to jego normalna temperatura?
- Jaka część populacji ma typową temperaturę pomiędzy 36,4 a 37,2 °C?

Zad.12 Ceny mieszkań w pewnym rejonie Polski podlegają rozkładowi normalnemu, ze średnią ceną 4,8 tys. zł/m² i odchyleniem standardowym 0,6 tys. zł/m². Pośrednicy z biura nieruchomości określają ceny jako:

Wysokie – dla ceny wyższej niż 2 odchylenia standardowe powyżej średniej,
Umiarkowane – dla ceny pomiędzy 1 a 2 odchyleniami standardowymi powyżej średniej,
Normalne – dla ceny w granicach 1 odchylenia standardowego poniżej lub powyżej średniej,
Niskie – dla ceny niższej od jednego odchylenia standardowego poniżej średniej.

- Jaki % mieszkań w tym rejonie Polski należy do każdej z powyższych grup?
- Jakie ceny stanowi pierwszy, drugi i trzeci kwartył?