Instrukcja do ćwiczeń przedmiotu

INŻYNIERIA WIEDZY
I SYSTEMY EKSPERTOWE

Temat:
Podstawowe pojęcia z logiki rozmytej

© Dr inż. Barbara Mrzygłód
KISiM, WIMiIP, AGH
mrzyglod@ agh.edu.pl

1 Wprowadzenie

Sterowanie rozmyte oferuje wygodne możliwości projektowania sterowania obiektami nieliniowymi, szczególnie w przypadku, gdy charakter nieliniowości utrudnia ich opisanie metodami analitycznymi, np. w formie równań różniczkowych lub algebraicznych, i wymagana jest zmiana parametrów regulacji w zależności od punktu pracy.

Logika rozmyta okazała się bardzo przydatna w zastosowaniach inżynierskich, czyli tam, gdzie klasyczna logika klasyfikująca jedynie według kryterium prawda-fałsz nie potrafi skutecznie poradzić sobie z wieloma niejednoznacznościami i sprzecznościami.

Regulacja rozmyta, w swojej formie podstawowej, jest tu podobna do procesu sterowania ręcznego. Znajduje wiele zastosowań, między innymi w elektronicznych systemach sterowania (maszynami, pojazdami i robotami), zadaniach eksploracji danych czy też w budowie systemów ekspertowych. Logika rozmyta staje się atrakcyjna szczególnie w przypadku mikroregulatorów, ponieważ wymaga ona mniejszej mocy obliczeniowej i mniej pamięci operacyjnej niż konwencjonalna regulacja PID

2 Podstawowe pojęcia

2.1 Zbiór rozmyty

Pojęcie **zbioru rozmytego** jest uogólnieniem pojęcia zbioru ostrego, polegającym na dopuszczeniu, aby **funkcja** charakterystyczna **(przynależności)** zbioru przyjmowała obok stanów krańcowych 0 i 1 również wartości pośrednie.

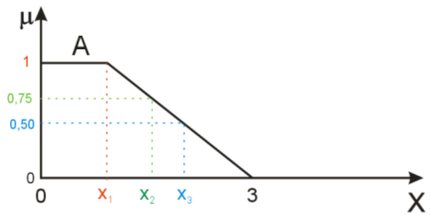
Zbiorem rozmytym A w pewnej (niepustej) przestrzeni X, co zapisujemy jako $A \subseteq X$ nazywamy zbiór par:

$$A=\{(x,\ \mu_A(x)) : x \in X\}$$

gdzie

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A.

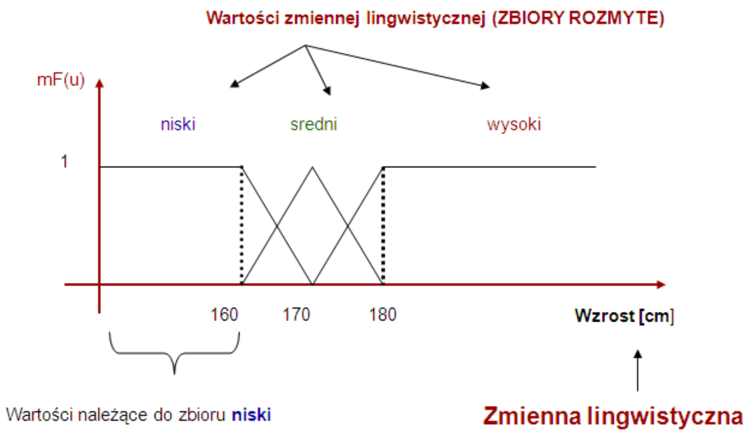


Funkcja przynależności przypisuje każdemu elementowi $x \in X$ jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A.

2.2 Zmienna lingwistyczna

Z pojęciem zbiorów rozmytych łączy się również pojęcie **zmiennej lingwistycznej,** przez którą rozumiemy zmienną, dla której wartościami są słowa lub zdania wyrażone w języku naturalnym, np.

ciśnienie {*wysokie, niskie*},
prędkość {*mała, średnia, duża*},
wzrost {*niski, średni, wysoki*}, itd.



2.3 Rodzaje funkcji przynależności

Spełnienie przesłanki w logice rozmytej może być reprezentowane przez różne **funkcje przynależności**. Podczas projektowania systemów rozmytych istotną kwestią jest dobór **typu funkcji przynależności**, opisujących poszczególne zbiory rozmyte zmiennej lingwistycznej. W praktyce do dyspozycji mamy wiele typów funkcji.

Funkcje przynależności podzielono na dwie grupy:

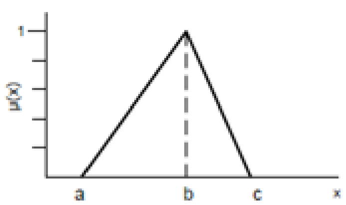
- odcinkowo – liniowe funkcje przynależności,
- nieliniowe funkcje przynależności.

2.3.1 Przykłady odcinkowo-liniowych funkcji przynależności

Do najpopularniejszych odcinkowo-liniowych funkcji przynależności należą: funkcja trójkątna, funkcja trapezowa, funkcja klasy L i klasy γ. Są to funkcje bardzo proste do zdefiniowania i przez to bardzo popularne w zastosowaniu.

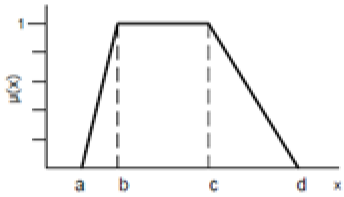
- **Trójkątna funkcja przynależności klasy t bądź λ** jest opisywana przy pomocy trzech parametrów a, b, c.

Tabela 1 Trójkątna f. przynależności klasy t bądź ***λ***

Kształt funkcji przynależności	Wzór funkcji przynależności
	$\mu(x;a,b,c)=\begin{cases} 0\ dla\ x\ \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ dla\ a<x\leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b}\ dla\ b<x\leq c \\ 0\ dla\ x>c \end{cases}$ oraz $\mu(x;a,b,c)=max\left[min\left(\dfrac{x-a}{b-a},\dfrac{c-x}{c-b}\right),0\right]$

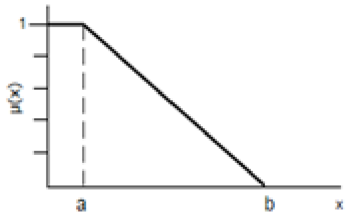
- **Trapezowa funkcja przynależności** jest opisywana przy pomocy czterech parametrów a, b, c, d.

Tabela 2 Trapezowa f. przynależności

Kształt funkcji przynależności	**Wzór funkcji przynależności**
	$\mu(x;a,b,c,d)=\begin{cases} 0\ dla\ x\ \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ dla\ a<x\leq b \\ \dfrac{d-x}{d-c}\ dla\ c<x\leq d \\ 0\ dla\ x>d \end{cases}$ oraz $\mu(x;a,b,c,d)=max\left[min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{d-x}{d-c}\right),0\right]$

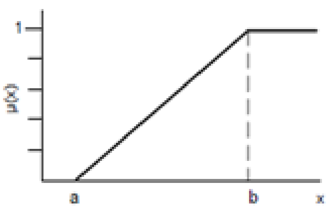
- **Lewa zewnętrzna funkcja przynależności klasy L** jest opisywana przy pomocy dwóch parametrów a i b.

Tabela 3 Lewa zewnętrzna f. przynależności klasy L

Kształt funkcji przynależności	**Wzór funkcji przynależności**
	$\mu(x;a,b)=\begin{cases} 1\ dla\ x\ \leq a \\ \dfrac{b-x}{b-a}\ dla\ a<x\leq b \\ 0\ dla\ x>b \end{cases}$ oraz $\mu(x;a,b)=max\left[min\left(1,\frac{b-x}{b-a}\right),0\right]$

- **Prawa zewnętrzna funkcja przynależności klasy γ** jest opisywana przy pomocy dwóch parametrów a i b.

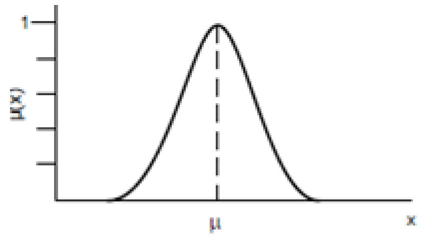
*Tabela 4 Prawa zewnętrzna f. przynależności klasy **γ***

Kształt funkcji przynależności	**Wzór funkcji przynależności**
	$\mu(x;a,b)=\begin{cases} 0\ dla\ x\ \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ dla\ a<x\leq b \\ 1\ dla\ x>b \end{cases}$ oraz $\mu(x;a,b)=max\left[min\left(\frac{x-a}{b-a},1\right),0\right]$

2.3.2 Przykłady nieliniowych funkcji przynależności

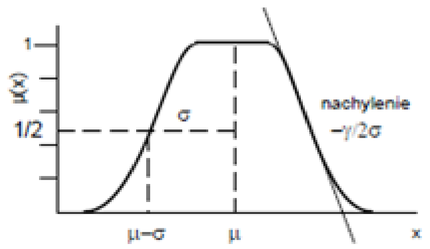
- **Gaussowska funkcja przynależności** jest opisywana przy pomocy dwóch parametrów μ i σ. Funkcja Gaussa umożliwia uzyskanie różniczkowalnych, gładkich, ciągłych hiperpowierzchni danego modelu rozmytego. Parametr μ odpowiada za położenie środka funkcji, σ decyduje o szerokości funkcji. Funkcja symetryczna.

Tabela 5 Gaussowska f. przynależności

Kształt funkcji przynależności	**Wzór funkcji przynależności**
	$\mu(x;\mu,\sigma) = exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ Gdzie: μ-środek, σ^2-wariancja

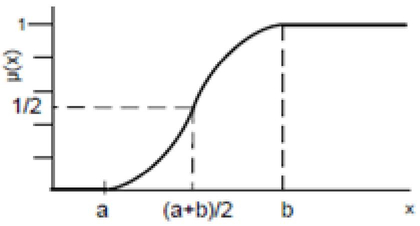
- **Dzwonowa funkcja przynależności** jest opisywana przy pomocy trzech parametrów μ, σ, γ. Parametr μ odpowiada za położenie środka funkcji, σ decyduje o szerokości funkcji, γ pozwala na regulację nachylenia zbioru rozmytego.

Tabela 6 Dzwonowa f. przynależności

Kształt funkcji przynależności	**Wzór funkcji przynależności**
	$\mu(x;\mu,\sigma,\gamma) = \frac{1}{1+\left\lvert\frac{x-\mu}{\sigma}\right\rvert^{2\gamma}}$ Gdzie: μ-środek, σ – szerokość, γ- nachylenie zbioru rozmytego

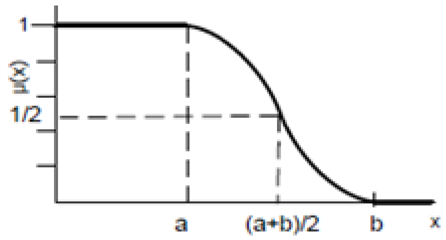
- **Funkcja przynależności klasy s** jest opisywana przy pomocy dwóch parametrów a i b. Wykres ten ma postać przypominającą literę „S”, a jej ostateczny kształt zależy od wartości parametrów a i b.

Tabela 7 F. przynależności klasy s

Kształt funkcji przynależności	**Wzór funkcji przynależności**
	$\mu(x;a,b)=\begin{cases}0\ dla\ x\ \le a\\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\ dla\ a<x\le(a-b)/2\\ 1-2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2\ dla\ (a-b)/2<x\le b\\ 1\ dla\ x>b\end{cases}$

- **Funkcja przynależności klasy z** jest opisywana przy pomocy dwóch parametrów a i b.

Tabela 8 F. przynależności klasy z

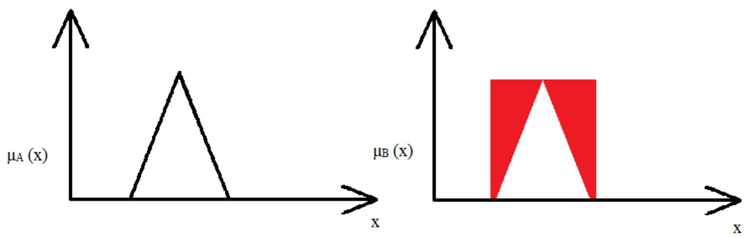
Kształt funkcji przynależności	**Wzór funkcji przynależności**
	$\mu(x;a,b)=\begin{cases}1\ dla\ x\ \le a\\ 1-2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2\ dla\frac{a+b}{2}<x\le b\\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\ dla\ a<x\le(a+b)/2\\ 0\ dla\ x>b\end{cases}$

2.4 Podstawowe operacje na zbiorach rozmytych

Podstawowe operacje logiczne, jakich można dokonywać na zbiorach rozmytych, to: dopełnienie (NOT), suma (OR), iloczyn (AND). W dalszej części przedstawiono wybrane sposoby ich realizacji.

2.4.1 Dopełnienie

Dopełnieniem zbioru rozmytego A, nazywamy taki zbiór rozmyty B, w którym dla każdego x ∈ X, $\mu_B(x) = 1-\mu_A(x)$. Przykład realizacji dopełnienia zaprezentowano na rys. 1



Rys. 1 Operacja NEGACJI zbiorów rozmytych.

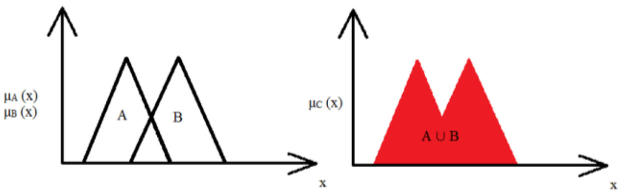
2.4.2 Suma

Sumę zbiorów rozmytych A i B stanowi zbiór rozmyty C= A ∪ B, który można zrealizować za pomocą jednego z operatorów S-normy. W Tabela 9 zaprezentowano wykaz podstawowych operatorów s-normy do realizacji sumy rozmytej.

Tabela 9 Podstawowe operatory s-normy

Nazwa operatora	Wzór
Maximum (MAX, Zadeha)	$\mu_{A\cup B}(x) = MAX\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
Suma algebraiczna	$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_b(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
Suma Hamachera	$\mu_{A\cup B}(x) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{1 - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$
Suma Einsteina	$\mu_{A\cup B}(x) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{1 + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}$
Suma drastyczna	$\mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} MAX[\mu_A(x), \mu_B(x)] \; dla \; MIN(\mu_A, \mu_B) = 0 \\ 1 \quad poza\ tym \end{cases}$
Suma ograniczona	$\mu_{A\cup B}(x) = MIN[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$

Przykład realizacji sumy rozmytej dla operatora MAX, zilustrowano na rys. 2



Rys. 2 Przykład działania operatora MAX, s-normy

2.4.3 Iloczyn

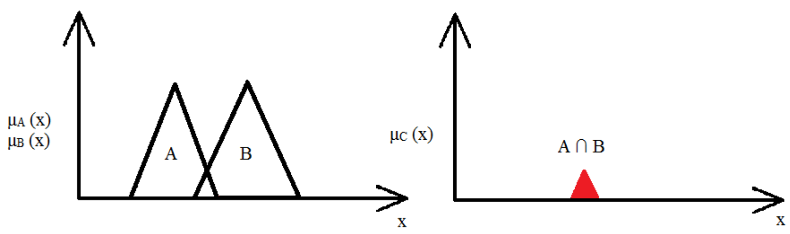
Iloczyn zbiorów rozmytych A i B stanowi zbiór rozmyty C = A ∩ B, który można zrealizować za pomocą jednego z operatorów t-normy. Wybrane operatory t-normy przedstawiono w Tabela 10

Tabela 10 Podstawowe operatory t-normy

Nazwa operatora	Wzór
Minimim (MIN, Zadeha)	$\mu_{A\cap B}(x) = MIN\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
Iloczyn (PROD)	$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

Iloczyn Hamachera **(Hamacherproduct)**	$\mu_{A\cap B}(x) = \frac{\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}$
Iloczyn Einsteina **(Einstein PROD)**	$\mu_{A\cap B}(x) = \frac{\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{2-(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x))}$
Iloczyn drastyczny **(drastic PROD)**	$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} MIN(\mu_A(x),\mu_B(x))\ dla\ MAX(\mu_A(x),\mu_B(x)) = 1 \\ 0 \qquad poza\ tym \end{cases}$
Różnica ograniczona **(bounded difference)**	$\mu_{A\cap B}(x) = MAX(0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1)$

Przykład realizacji iloczynu logicznego dla operatora MIN, przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3 Przykład działania operatora MIN, t-normy.

3 Wnioskowanie w LR

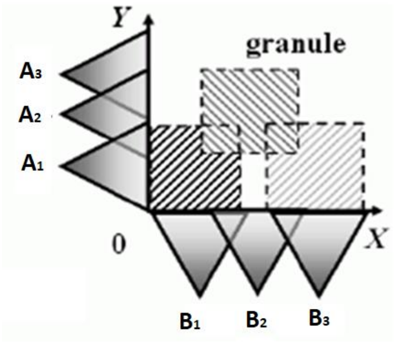
3.1 Model MAMDANI

Model Mamdami stanowi jakościowy opis systemu najbardziej bliski językowi naturalnemu. Jest pierwszym rodzajem modelowania rozmytego zastosowanego w praktyce, tworzącego te modele na bazie wiedzy eksperta. Oparte są o wiedzę i doświadczenie eksperta znającego system i wszystkie jego zachowania. Wnioskowanie rozmyte przeprowadza się za pomocą opracowanej bazy reguł zapisanych w postaci:

R1 : JEŚLI (x jest A_1) TO (y jest B_1)
Rm: JEŚLI (x jest A_m) TO (y = B_m),

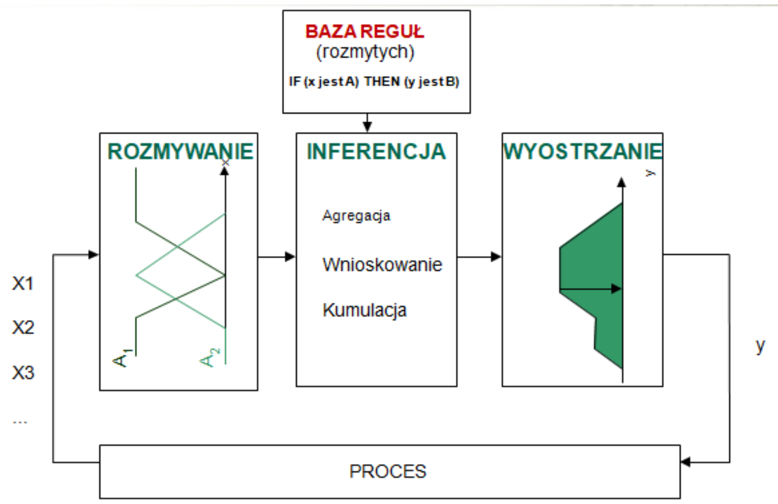
gdzie:
x – wejście systemu,
y – wyjście systemu,
A_1 ... A_m – zbiory rozmyte odniesienia w przestrzeni wejściowej X,
B_1 ... B_m – zbiory rozmyte odniesienia w przestrzeni wyjściowej Y.

W opracowanych regułach zarówno przesłanki jak i konkluzje odwołują się do określanych zbiorów rozmytych, a każda reguła wyraża pewien związek pomiędzy zmiennymi x i y i **ma charakter lokalny**.



- **Właściwości układów rozmytych typu Mamdani:**
  - dobra przy małej liczbie zmiennych - liczba reguł rośnie wykładniczo wraz z liczbą zmiennych w przesłance
    - im więcej reguł, tym trudniej ocenić ich dopasowanie do problemu
    - zbyt duża liczba zmiennych w przesłance - trudno zrozumieć relacje między przesłankami i konsekwencjami.
  - nie ma standardowej metody do przekształcenia wiedzy eksperckiej na reguły wnioskowania rozmytego;
  - nie ma efektywnej metody dostrajania funkcji przynależności (MF), tak by minimalizować błędy wnioskowania.

3.2 Wnioskowanie w modelu Mamdani



Rys. 4 Schemat wnioskowania wLR – Model MAMDANI

3.2.1 Rozmywanie (fuzyfikacja)

W pierwszym etapie wnioskowania następuje **rozmywanie (fuzyfikacja)** zmiennych wejściowych, czyli zamiana ostrych sygnałów wejściowych, na wartości, które reprezentują ich przynależność do poszczególnych zbiorów rozmytych. Aby prawidłowo przeprowadzić tą operację, blok rozmywania musi posiadać zdefiniowane zmienne lingwistyczne, biorące udział w procesie wnioskowania. Dla każdej z nich należy określić liczbę i nazwy zbiorów rozmytych. Każdy zbiór rozmyty jest reprezentowany przez określoną funkcję przynależności (patrz rozdział 2.3)

3.2.2 Wnioskowanie (inferencja)

Do bloku wnioskowanie (inferencja) trafiają dane obliczone w poprzednim etapie. Następnie zostaje obliczona wynikowa funkcja przynależności wyjścia regulatora, na podstawie wejściowych stopni przynależności. Funkcja ta często przybiera złożony kształt, a obliczenie jej zachodzi podczas inferencji (wnioskowania), którą jest realizowana na kilka sposobów. Aby dokonać prawidłowych obliczeń, blok ten musi zawierać określone elementy:

- Bazę reguł rozmytych - Baza reguł stanowi najważniejszy blok systemu wnioskowania. Baza reguł dla modelu Mamdaniego posiada następującą postać:

  IF (x1=A1) and (x2=B1) then (y=C1)
  IF (x1=A1) and (x2=B2) then (y=C2)
  IF (x1=A2) or (x2=B1) then (y=C2).

  Gdzie: x1, x2, y – zmienne lingwistyczne (parametry procesu)
  A1, A2, B1, B2, C1, C2 – zbiory rozmyte

- Mechanizm inferencyjny - ustalenie realizacji poszczególnych operatorów logicznych.

- Funkcje przynależności wyjścia modelu;

3.2.3 Wyostrzanie (defuzyfikacja)

Ostatnim etapem procesu jest **wyostrzenie**. Wejściem do tego modułu jest wynikowa funkcja przynależności, która zostaje tutaj poddana procesowi defuzyfikacji. Ustalane jest ostre wyjście z układu. Dokonuje się to w oparciu o jedną z wybranych metod wyostrzania.