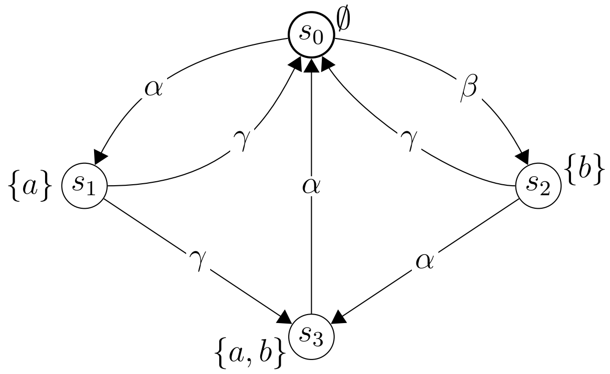
Zadania – zestaw 2

3. Rozważmy poniższy system tranzycyjny TS i zbiory akcji $B_1 = \{\alpha\}$, $B_2 = \{\alpha, \beta\}$ i $B_3 = \{\beta\}$.



Niech E_b, E_a i E' będą następującymi LT-własnościami:

- E_b jest zbiorem słów $A_0A_1 \ldots \in \left(2^{\{a,b\}}\right)^\omega$ takich, że $A_i \in \{\{a, b\}, \{b\}\}$ dla nieskończenie wielu i.
- E_a jest zbiorem słów $A_0A_1 \ldots \in \left(2^{\{a,b\}}\right)^\omega$ takich, że $A_i \in \{\{a, b\}, \{a\}\}$ dla nieskończenie wielu i.
- E' jest zbiorem słów $A_0A_1 \ldots \in \left(2^{\{a,b\}}\right)^\omega$ takich, że nie istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $A_i = \{a\}$, $A_{i+1} = \{a, b\}$ i $A_{i+2} = \emptyset$.

Pytania:

a) Dla których zbiorów akcji B_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) i LT-własności $E \in \{E_a, E_b, E'\}$ zachodzi $TS \models_{\mathcal{F}_i} E$, gdzie $\mathcal{F}_i = (\emptyset, \{B_i\}, \emptyset)$?

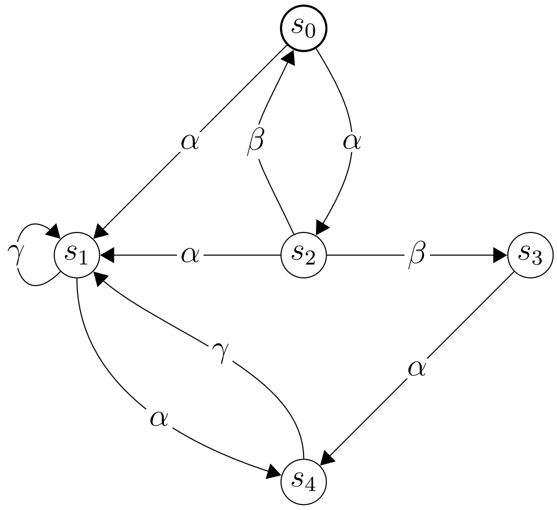
b) Dla których zbiorów akcji B_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) i LT-własności $E \in \{E_a, E_b, E'\}$ zachodzi $TS \models_{\mathcal{F}_i} E$, gdzie $\mathcal{F}_i = (\emptyset, \emptyset, \{B_i\})$?

Komentarz:

Rozważmy punkt a) i przykład $TS \models_{\mathcal{F}_1} E_b$. Wtedy $\mathcal{F}_1 = (\emptyset, \{\{\alpha\}\}, \emptyset)$. Własność E_b oznacza, że ślad zawiera nieskończenie wiele liter $\{a, b\}$ lub $\{b\}$.
System tranzycyjny spełnia sprawiedliwie tę własność, jeżeli wszystkie sprawiedliwe ślady należą do E_b.

Nietrudno zauważyć, że ślady należące do E_b, to ślady takich ścieżek, w których nieskończenie wiele razy występuje stan s_1 lub s_3. Ślady możliwe w systemie i nie należące do E_b, to ślady takich ścieżek, w których stany s_1 i s_3 występują skończoną liczbę razy, a zatem nieskończenie wiele razy muszą wystąpić stany s_0 i s_2 (pętla, więc oba występują nieskończoną liczbę razy). Dowolna taka ścieżka nie jest sprawiedliwa, bo mamy nieskończenie wiele razy wykonalną akcję α (stan s_0), a tylko skończoną liczbę jej wykonań. Zatem wszystkie sprawiedliwe ślady należą do E_b.

4. Rozważmy poniższy system tranzycyjny TS ($AP = \emptyset$).



Określ, które z podanych założeń dotyczących sprawiedliwości $\mathcal{F}_i$ są realizowalne dla TS.

a) $\mathcal{F}_1 = (\{\{\alpha\}\}, \{\{\gamma\}\}, \{\{\alpha, \beta\}\})$;

b) $\mathcal{F}_2 = (\{\{\alpha, \gamma\}\}, \{\{\alpha, \beta\}\}, \{\{\gamma\}\})$;

c) $\mathcal{F}_3 = (\{\{\alpha, \gamma\}, \{\beta\}\}, \{\{\alpha, \beta\}\}, \{\{\gamma\}\})$;

Komentarz:
Zacznijmy od definicji z wykładu: Niech dany będzie system tradycyjny $TS = (S, Act, \to, I, AP, L)$ i założenie dotyczące sprawiedliwości $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ nazywamy *realizowalnym* dla TS, jeżeli dla dowolnego osiągalnego stanu s: $FairPaths(s) \neq \emptyset$.
Przeanalizujmy pojęcia, które pojawiają się w warunku $FairPaths(s) \neq \emptyset$. Ścieżka to ciąg stanów, oczywiście taki, że wraz z krawędziami tworzą ciąg przejść. Jeżeli dany jest ciąg przejść σ, to niech $path(\sigma)$ oznacza ścieżkę uzyskaną z tego ciągu przejść (usuwamy krawędzie i zostają tylko stany w takiej kolejności jak w σ.
Analogicznie jak dla śladu (patrz slajd 35) możemy przyjąć, że ścieżka π jest $\mathcal{F}$-sprawiedliwa, jeżeli istnieje ciąg przejść σ, który jest $\mathcal{F}$-sprawiedliwy, taki że $\pi = path(\sigma)$.
Warunek $FairPaths(s) \neq \emptyset$ oznacza, że z każdego stanu do którego dojdę **istnieje** co najmniej jedna $\mathcal{F}$-sprawiedliwa ścieżka. Kluczowy jest tu mały kwantyfikator. W tym zadaniu do sprawdzenia jest pięć stanów. Wystarczy pokazać, że z każdego z nich istnieje $\mathcal{F}$-sprawiedliwa ścieżka. Ścieżka taka musi spełniać wszystkie założenia o sprawiedliwości (na odpowiednim poziomie).

Podczas ostatniej dyskusji ktoś zauważył, że nie ma możliwości, aby założenie dotyczące silnej lub słabej sprawiedliwości nie było spełnione. Definicje takich założeń mają formę implikacji więc, jeżeli akcje z danego zbioru są nieskończenie wiele razy wykonalne, to możemy wybrać też ciąg przejść, w którym są one wykonywane i to da nam przykładową sprawiedliwą ścieżkę. Intuicyjnie wydaje się to oczywiste. Gdyby ktoś miał inne zdanie chętnie podyskutujemy.
Podsumowując, w zadaniu możemy się skupić na bezwarunkowej sprawiedliwości. Skupmy się na punkcie a). Z każdego stanu możemy przejść do s_1, a następnie wykonywać naprzemiennie akcje α i γ. Zatem z każdego stanu istnieje ścieżka spełniająca założenie dotyczące bezwarunkowej sprawiedliwości (nieskończenie wiele wystąpień α).