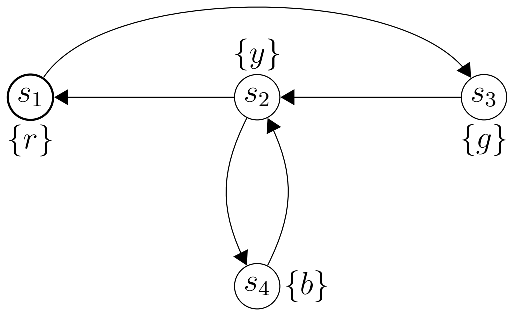
Zadania – zestaw 4

1. Dane są następujące formuły logiczne.

a) $\mathsf{AG}a \vee \mathsf{FE}b$
b) $(a \vee \mathsf{X}a) \Rightarrow \mathsf{EG}(a \vee b)$;
c) $\mathsf{AXAX}a$;
d) $\mathsf{AEX}a$;
e) $a \vee b$;
f) $a \vee b \,\mathsf{U}\, c$.

Wskaż te, które **nie należą** do logiki CTL. Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest system tranzycyjny o podanym niżej grafie stanów.



System opisuje działanie świateł drogowych, które mogą być w trybie *mrugające żółte światło*: r red, y yellow, g green, b blink. Wyznacz zbiory stanów, dla których spełnione są formuły CTL:

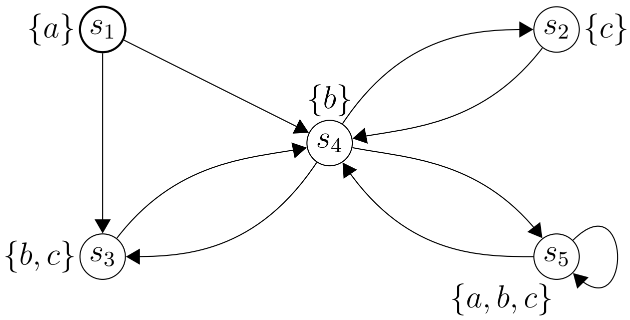
a) $\mathsf{AF}y$
b) $\mathsf{AG}y$
c) $\mathsf{AGAF}y$
d) $\mathsf{AF}g$
e) $\mathsf{EF}g$
f) $\mathsf{EG}g$
g) $\mathsf{EG}\neg g$
h) $\mathsf{A}(b \,\mathsf{U}\, \neg b)$
i) $\mathsf{E}(b \,\mathsf{U}\, \neg b)$
j) $\mathsf{A}(\neg b \,\mathsf{U}\, \mathsf{EF}b)$
k) $\mathsf{A}(g \,\mathsf{U}\, \mathsf{A}(y \,\mathsf{U}\, r))$
l) $\mathsf{A}(\neg b \,\mathsf{U}\, b)$

Zdefiniuj maszynę stanów w języku SMV dla rozważanego systemu tranzycyjnego. W maszynie stanów zdefiniuj zmienne r, y, g i b jako zmienne typu `boolean`. Sprawdź spełnialność powyższych własności, przyjmując kolejne stany jako początkowe.

3. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.

a) Jeżeli $s \models \mathsf{EG}a$, to $s \models \mathsf{AG}a$.
b) Jeżeli $s \models \mathsf{AF}a \vee \mathsf{AF}b$, to $s \models \mathsf{AF}(a \vee b)$.
c) Jeżeli $s \models \mathsf{AF}a \vee \mathsf{AF}b$, to $s \models \mathsf{EF}(a \wedge b)$.
d) Jeżeli $s \models \mathsf{A}(a \,\mathsf{U}\, b)$, to $s \models \neg(\mathsf{E}(\neg b \,\mathsf{U}\, (\neg a \wedge \neg b)) \vee \mathsf{EG}\neg b)$.

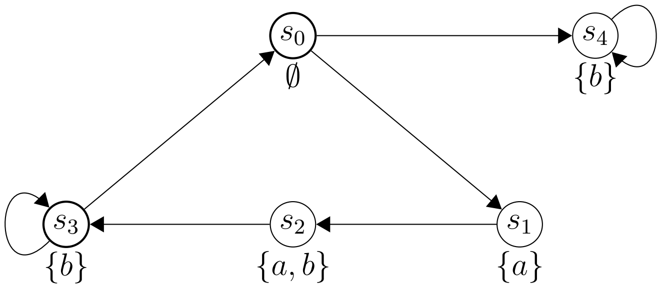
4. Dany jest system tranzycyjny o podanym niżej grafie stanów ($I = \{s_1\}$).



Sprawdź, które z poniższych własności CTL są spełnione dla tego systemu tranzycyjnego. Podaj uzasadnienie spełnialności lub kontrprzykład.

a) $\mathsf{AXEG}\neg a$
b) $\mathsf{A}(\neg(a \wedge b)\,\mathsf{U}\,(\neg a \wedge c)$
c) $\mathsf{EXEG}\neg a$
d) $\mathsf{AXE}((b \vee c)\,\mathsf{U}\,(a \wedge b \wedge c))$.

5. Dany jest system tranzycyjny o podanym niżej grafie stanów ($I = \{s_0, s_3\}$).



Wyznacz zbiory $Sat(\Phi_i)$ i sprawdź, czy $TS \models \Phi_i$ dla $i = 1, \ldots .4$.

$\Phi_1 = \mathsf{A}(a\,\mathsf{U}\,b) \vee \mathsf{EX}(\mathsf{AG}\,b)$
$\Phi_2 = \mathsf{AGA}(a\,\mathsf{U}\,b)$
$\Phi_3 = (a \wedge b) \Rightarrow \mathsf{EGEXA}(b\,\mathsf{W}\,a)$
$\Phi_4 = (\mathsf{AGEF}a)$

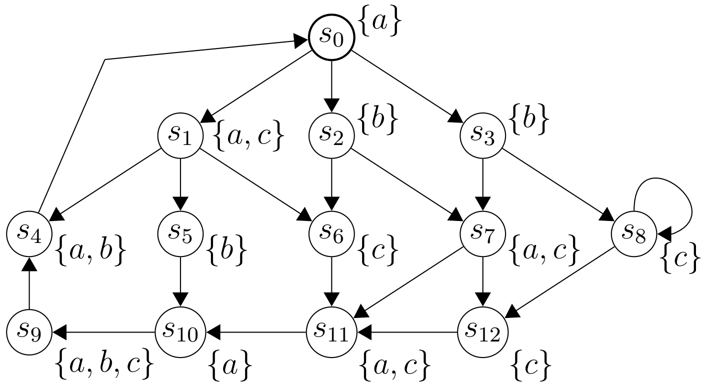
6. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe? Podaj dowód lub kontrprzykład.

a) Jeżeli $s \models \mathsf{EG}a$, to $s \models \mathsf{AG}a$.
b) Jeżeli $s \models \mathsf{AG}a$, to $s \models \mathsf{EG}a$.
c) Jeżeli $s \models \mathsf{AF}a \vee \mathsf{AF}b$, to $s \models \mathsf{AF}(a \vee b)$.
d) Jeżeli $s \models \mathsf{AF}(a \vee b)$, to $s \models \mathsf{AF}a \vee \mathsf{AF}b$.
e) Jeżeli $s \models \mathsf{A}(a\,\mathsf{U}\,b)$, to $s \models \neg(\mathsf{E}(\neg b\,\mathsf{U}\,(\neg a \wedge \neg b)) \vee \mathsf{EG}\neg b)$.

7. Niech Φ i Ψ będą dowolnymi formułami CTL. Które z poniższych równoważności są prawdziwe?

a) $\mathsf{AXAF}\Phi \equiv \mathsf{AFAX}\Phi$
b) $\mathsf{EXEF}\Phi \equiv \mathsf{EFEX}\Phi$
c) $\mathsf{AXAG}\Phi \equiv \mathsf{AGAX}\Phi$
d) $\mathsf{EXEG}\Phi \equiv \mathsf{EGEX}\Phi$
e) $\neg\mathsf{A}(\Phi\,\mathsf{U}\,\Psi) \equiv \mathsf{E}(\Phi\,\mathsf{U}\,\neg\Psi)$

8. Dany jest system tranzycyjny o podanym niżej grafie stanów. **Uwaga:** $I = \{s_0\}$.



Sprawdź, które z poniższych własności CTL są spełnione dla tego systemu tranzycyjnego. Podaj uzasadnienie spełnialności lub kontrprzykład.

a) $\mathsf{EFAX}c$

b) $\mathsf{AXA}(\neg a\, \mathsf{U}\, (a \wedge c))$

9. Podaj przykłady systemów tranzycyjnych (maksymalnie 5 stanów), dla których spełniona jest formuła w logice CTL, ale nie jest spełniona formuła w logice LTL (uzasadnij, że tak jest).

a) $\mathsf{AX}\ \mathsf{E}(a\, \mathsf{U}\, (b \vee c))$, $\quad \mathsf{X}\ (a\, \mathsf{U}\, (b \vee c))$

b) $(\mathsf{EG}\ \mathsf{AX}a) \wedge b$, $\quad (\mathsf{G}\ \mathsf{X}a) \wedge b$

10. Podaj przykłady systemów tranzycyjnych (maksymalnie 5 stanów), dla których jedna z formuł jest spełniona, a druga nie (uzasadnij, że tak jest).

a) $\mathsf{AX}\ (\neg b \wedge \mathsf{EG}a)$, $\quad \mathsf{X}\ (\neg b \wedge \mathsf{G}a)$

b) $b \wedge c \wedge (\mathsf{AG}\ \mathsf{EX}a)$, $\quad b \wedge c \wedge (\mathsf{G}\ \mathsf{X}a)$

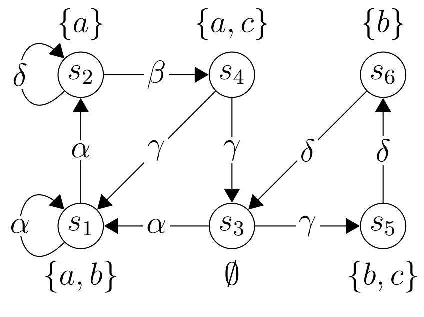
11. Przyjmując, że dla podanego systemu tranzycyjnego $I = \{s_1\}$ sprawdź, które z poniższych formuł są spełnione, a które nie dla tego systemu. Odpowiedzi uzasadnij.

a) $\mathsf{AX}(\neg b \wedge \mathsf{EG}a)$

b) $\mathsf{EG}a \vee \mathsf{E}(a\, \mathsf{U}\, \neg(a \wedge b \wedge c))$

c) $a \wedge (\mathsf{AX}a) \wedge (\mathsf{AX}\ \mathsf{AX}a) \wedge (\mathsf{AX}\ \mathsf{AX}\ \mathsf{AX}\ \mathsf{AX}a)$

d) $\mathsf{EF}\ \mathsf{EG}(\neg a)$

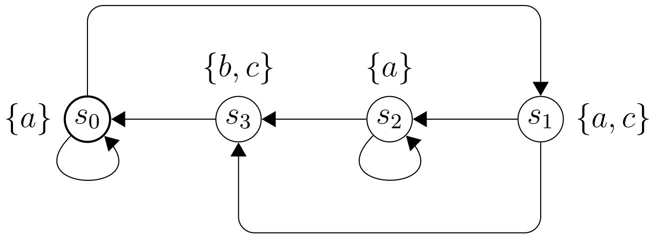


12. Dla podanego systemu tranzycyjnego zdefiniuj w logice CTL podane poniżej własności. Które z nich są prawdziwe dla podanego systemu? Odpowiedź uzasadnij.

a) (2 pkt.) Zawsze jeżeli w jakimś stanie zachodzi c, to w każdym kolejnym stanie zachodzi a.

b) (2 pkt.) Możliwa jest ścieżka, taka że jeżeli w pewnym (dowolnym dla tej ścieżki) stanie zachodzi c, to zawsze dwa stany później zachodzi b.

c) (2 pkt.) Możliwa jest ścieżka, taka że od pewnego jej stanu począwszy nigdy już nie będą spełnione dwie własności jednocześnie.



13. Dany jest system tranzycyjny, dla którego $AP = \{a, b, c\}$. Zdefiniuj w logice CTL opisane poniżej własności.

a) Każde wykonanie systemu prowadzi do stanu, w którym spełniona jest własność a i takiego, że w żadnym z kolejnych możliwych stanów nie jest spełnione b.
b) Możliwa jest takie wykonanie systemu, które prowadzi do stanu, w którym spełnione jest a, po którym w każdych kolejnych trzech stanach spełnione jest tylko b lub c.
c) Dla systemu w każdym osiągalnych stanie spełniona jest własność a i zawsze możliwe jest, że dodatkowo będzie spełnione b.
d) Dla wszystkich stanów, dla których spełnione jest a, możliwe jest, że w kolejnym stanie spełnione jest b.
e) Każde wykonanie systemu prowadzi do stanu, w którym spełniona jest własność a i takiego, że we wszystkich poprzednich stanach spełnione jest b i nie jest spełnione c.
f) Każda z własności spełniona jest nieskończenie wiele razy.

14. Do jakich logik temporalnych poznanych na wykładzie można zaliczyć poniższe formuły?

a) $\mathsf{AG}a \vee \mathsf{E}(b \,\mathsf{U}\, a)$
b) $(a \vee \mathsf{AX}a) \Rightarrow \mathsf{EF}(a \vee b)$;
c) $\mathsf{FXXX}a$;
d) a;
e) $\mathsf{G}a \vee \mathsf{F}b$;
f) $a \vee b \,\mathsf{U}\, c$.

15. Które z poniższych równoważności CTL* są prawdziwe? Udowodnij równoważność lub podaj kontrprzykład. Zakładamy, że Φ i Ψ są dowolnymi formułami stanu CTL*, a φ i ψ formułami ścieżkowymi.

a) $\mathsf{EXEG}\Phi \equiv \mathsf{EXG}\Phi$
b) $\neg\mathsf{A}(\varphi \Rightarrow \psi)) \equiv \mathsf{E}(\varphi \wedge \neg\psi)$