

# Algebra Boole'a

Metoda wnioskowania boolowskiego pochodzi z 1847 roku od Boole'a i była rozwijana przez innych matematyków końca XIX-go wieku. Idee te zostały ponownie odkryte w kontekście nowych zastosowań w naukach przyrodniczych końca XX-go wieku.

**Definicja 1.** Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem, a  $n$  dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Dowolne przekształcenie  $d: X^n \rightarrow X$  nazywamy  $n$ -argumentowym działaniem określonym w zbiorze  $X$ , przy czym działaniem zero-argumentowym nazywamy dowolnie ustalony element zbioru  $X$ .

**Definicja 2.** Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem, a  $n$  dowolną, ustaloną liczbą naturalną. *Strukturę algebraiczną* nazywamy strukturę składającą się ze zbioru  $X$  wraz z pewną liczbą działań  $d_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) określonych w tym zbiorze. Strukturę algebraiczną zapisujemy w postaci układu  $(X, d_1, \dots, d_n)$ .

**Definicja 3.** Niech  $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  będzie strukturą algebraiczną, w której  $B$  jest niepustym zbiorem,  $\vee$  i  $\wedge$  są działaniami dwuargumentowymi,  $\neg$  jest działaniem jednoargumentowym, a  $0$  i  $1$  działaniami zero-argumentowymi. Strukturę tę nazywamy *algebrą Boole'a*, jeżeli działania  $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$  są tak określone, że spełniają następujące cztery warunki:

1. Działania  $\vee$  i  $\wedge$  są łączne i przemienne.
2. Działanie  $\vee$  jest rozdzielne względem  $\wedge$  i odwrotnie.
3. Dla dowolnego  $a \in B$ :  
 $a \vee (\neg a) = 1$ ,  
 $a \wedge (\neg a) = 0$ ,  
 $a \vee 0 = a$ ,  
 $a \wedge 1 = a$ .
4. Elementy  $0$  i  $1$  są różne.

Elementy zbioru  $B$  nazywamy *stałymi boolowskimi*, zaś każdą zmienną przyjmującą wartości ze zbioru  $B$  nazywamy *zmienną boolowską*.

## Prawa pochłaniania:

$$\begin{aligned}a \vee a &= a, \\a \vee (a \wedge b) &= a, \\a \wedge a &= a, \\a \wedge (a \vee b) &= a.\end{aligned}$$

## Prawa de Morgana:

$$\begin{aligned}\neg(a \vee b) &= (\neg a) \wedge (\neg b), \\ \neg(a \wedge b) &= (\neg a) \vee (\neg b).\end{aligned}$$

*Dwuwartościową algebrą Boole'a (BA)* nazywamy algebrę Boole'a dla której  $B = \{0, 1\}$ , zaś działania  $\vee, \wedge, \neg$  odpowiadają logicznej alternatywie, koniunkcji i negacji.

Stałe boolowskie  $0$  i  $1$  wraz ze wszystkimi zmiennymi boolowskimi algebry  $BA$  i ich zaprzeczeniami nazywamy *literałami boolowskimi*.

**Definicja 4.** Niech  $BA = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  będzie dwuwartościową algebrą Boole'a. *Zbiór wyrażeń (formuł) boolowskich* algebry  $BA$  jest najmniejszym zbiorem spełniającym następujące dwa warunki:

1. Dowolna stała lub zmienna boolowska algebry  $BA$  należy do zbioru formuł boolowskich algebry  $BA$ .
2. Jeśli  $a, b$  są formułami boolowskimi algebry  $BA$ , to również  $\neg a, a \wedge b$  i  $a \vee b$  są formułami boolowskimi algebry  $BA$ .

Wartościowanie  $W$  wyrażeń (formuł) boolowskich algebry  $BA$  jest funkcją przyporządkowującą każdemu wyrażeniu boolowskiemu liczbę ze zbioru  $\{0, 1\}$ . Dla dowolnego wyrażenia boolowskiego  $b$ , liczbę  $W(b)$  nazywamy wartością wyrażenia  $b$  i obliczamy ją w zwykły sposób, tzn. poprzez wykonanie wszystkich działań występujących w wyrażeniu  $b$  zgodnie z ich określeniem oraz w kolejności wskazywanej przez nawiasy występujące w wyrażeniu  $b$ .

**Definicja 5.** Niech  $BA = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  będzie dwuwartościową algebrą Boole'a, a  $n$  dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Dowolną funkcję  $f: B^n \rightarrow B$  nazywamy *funkcją boolowską  $n$  zmiennych*.

Funkcję boolowską określamy za pomocą odpowiedniego wyrażenia boolowskiego. Można także opisywać funkcję boolowską za pomocą tabelki zawierającej wszystkie możliwe argumenty ze zbioru  $\{0, 1\}^n$  wraz z odpowiadającymi im wartościami ze zbioru  $\{0, 1\}$ .

Przykład:  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$ .

**Twierdzenie 1.** Funkcję boolowską  $n$ -zmiennych  $f$  można przedstawić w dwóch postaciach:

1.  $f(x) = \bigvee (x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n})$ , gdzie  $a = (a_1, \dots, a_n)$  przebiega zbiór  $f^{-1}(1) \subseteq \{0, 1\}^n$ ,
2.  $f(x) = \bigwedge (x_1^{a_1} \vee \dots \vee x_n^{a_n})$ , gdzie  $a = (a_1, \dots, a_n)$  przebiega zbiór  $f^{-1}(0) \subseteq \{0, 1\}^n$ ,

przy czym oznaczenie  $x_i^{a_i}$  jest równe  $x_i$ , jeśli  $a_i = 1$  i  $\neg x_i$ , jeśli  $a_i = 0$ .

Postać pierwszą nazywamy *alternatywną postacią normalną* (disjunctive normal form) i oznaczamy przez  $DNF_f$ . Postać drugą nazywamy *koniunkcyjną postacią normalną* (conjunctive normal form) i oznaczamy przez  $CNF_f$ .

Z powodów technicznych szczególnie atrakcyjna jest sytuacja, gdy do przedstawienia funkcji boolowskiej wystarczą dwa tzw. poziomy logiczne: poziom koniunkcji (na którym występuje koniunkcja stałych lub zmiennych boolowskich) i poziom alternatywy (gdzie wyrażenia koniunkcyjne z pierwszego poziomu tworzą alternatywę). Taką postać funkcji boolowskiej nazywamy *wielomianem boolowskim*.

**Definicja 6.** Niech  $f$  będzie funkcją boolowską  $n$ -zmiennych.

1. *Jednomianem boolowskim* (monom) nazywamy dowolne wyrażenie boolowskie będące koniunkcją literałów boolowskich. *Koszt obliczeniowy* jednomianu boolowskiego nazywamy liczbę literałów boolowskich tworzących jednomian boolowski.
2. *Wielomianem boolowskim* (polynomial) nazywamy dowolne wyrażenie boolowskie będące alternatywą jednomianów boolowskich. *Koszt obliczeniowy* wielomianu boolowskiego nazywamy sumę arytmetyczną kosztów obliczeniowych wszystkich jednomianów boolowskich tworzących wielomian boolowski.
3. Wielomian boolowski  $p$  *oblicza funkcję boolowską  $f$*  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall x \in f^{-1}(B): p(x) = f(x)$ .
4. Wielomian boolowski  $p$  nazywamy *wielomianem boolowskim o najmniejszym koszcie obliczeniowym* dla funkcji boolowskiej  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  oblicza  $f$  i nie istnieje inny wielomian boolowski obliczający  $f$  i mający mniejszy koszt obliczeniowy niż  $p$ .

Proces prowadzący do przedstawienia funkcji boolowskiej w postaci wielomianu boolowskiego o najmniejszym koszcie obliczeniowym nazywamy *minimalizacją funkcji boolowskiej*. Definicję wielomianu boolowskiego obliczającego daną funkcję boolowską spełnia postać  $DNF$  tej funkcji, a zatem dla każdej funkcji boolowskiej istnieje chociaż jeden wielomian boolowski obliczający tę funkcję. Zatem istnieje również wielomian o najmniejszym koszcie obliczeniowym.

**Definicja 7.** Niech  $f$  będzie funkcją boolowską  $n$ -zmiennych.

Funkcję boolowską  $f_{imp}(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{a_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}^{a_k}$ , gdzie  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$  oraz  $a_i \in \{0, 1\}$  (dla  $i = 1, \dots, k$ ), nazywamy *implikantem funkcji boolowskiej  $f$*  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:  $\forall x \in B^n: (f_{imp}(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1)$ .

Zbiór wszystkich implikantów funkcji  $f$  oznaczamy przez  $I(f)$ .

**Definicja 8.** Niech  $f$  będzie funkcją boolowską  $n$ -zmiennych i niech implikant  $g \in I(f)$ . Implikant  $g$  nazywamy *implikantem pierwszym*, jeśli jest implikantem minimalnym ze względu na liczbę czynników. Zbiór wszystkich implikantów pierwszych funkcji  $f$  oznaczamy przez  $PI(f)$ .

Implikant pierwszy danej funkcji boolowskiej ma taką własność, że odrzucenie z niego dowolnego czynnika powoduje, że powstała w ten sposób funkcja nie jest już implikantem.

**Twierdzenie 2.** Wielomian boolowski o najmniejszym koszcie obliczeniowym dla funkcji boolowskiej  $f$  jest zbudowany tylko z implikantów funkcji  $f$ .