Rozdział 1

Własności

Poza własnościami dotyczącymi ograniczenia poszczególnych miejsc sieci, definiuje się również własności odnoszące się do łącznej liczby znaczników w sieci. Sieć nazywana jest *zachowawczą*, jeżeli łączna liczba znaczników nie ulega zmianie. W szczególności może się to odnosić do ważonej sumy znaczników.

Definicja 1. Sieć $\mathcal{N}$ nazywamy *zachowawczą*, jeżeli:

$$\forall (M,S) \in \mathcal{R}(M_0,S_0)\colon \sum_{p\in P} |M(p)| = \sum_{p \in P} |M_0(p)|. \tag{1.1}$$

Sieć $\mathcal{N}$ nazywamy *zachowawczą względem wektora wag* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, gdzie $w_i > 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$, ($P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$), jeżeli:

$$\forall (M,S) \in \mathcal{R}(M_0,S_0)\colon \sum_{i=1}^{n} w_i |M(p_i)| = \sum_{i=1}^{n} w_i |M_0(p_i)|. \tag{1.2}$$

Zachowawczość sieci jest własnością mocniejszą niż ograniczoność. Wymagane jest, by nie tylko nie następował nieograniczony wzrost liczby znaczników w miejscach sieci, ale by łączna ich liczba (ewentualnie ważona) pozostawała stała. Jeżeli możliwe jest podanie wektora wag tylko dla pewnego podzbioru zbioru miejsc, to mówimy, że sieć jest *częściowo zachowawcza*.

Dodatkowo wśród stanów sieci wyróżnia się stany, do których zawsze można powrócić (*stany własne*). Często istotna jest również możliwość powrotu do stanu początkowego.

Definicja 2. Niech dana będzie sieć $\mathcal{N}$. Stan początkowy (M_0, S_0) nazywamy *odtwarzalnym*, jeżeli istnieje stan $(M,S) \in \mathcal{R}(M_0,S_0)$ różny od (M_0,S_0), z którego stan początkowy ponownie jest osiągalny. Sieć $\mathcal{N}$ nazywamy *odtwarzalną*, jeżeli stan początkowy jest odtwarzalny. Sieć $\mathcal{N}$ nazywamy *odwracalną*, jeżeli stan początkowy jest osiągalny z każdego stanu $(M,S) \in \mathcal{R}(M_0,S_0)$.

Rozdział 2

Analiza

Definicja 3. Węzeł (M, S) grafu osiągalności $\mathcal{G} = (V, A, \gamma)$ nazywamy *pełnym*, jeżeli dla każdego przejścia $t \in T$, istnieje droga prowadząca od węzła (M, S), zawierająca łuk z etykietą $((t, b), n)$, gdzie $b \in \mathcal{B}(t)$ i $n \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

Twierdzenie 2.1. Sieć $\mathcal{N}$ jest żywa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie węzły grafu $\mathcal{G}$ są pełne.

Dowód. Niech $(M, S) \in V$. Jeżeli sieć $\mathcal{N}$ jest żywa, to dla dowolnego przejścia $t \in T$, istnieje stan $(M', S') \in \mathcal{R}(M, S)$, przy którym przejście t jest aktywne. Stan (M', S') albo jest reprezentowany przez jeden z węzłów grafu $\mathcal{G}$, albo istnieje stan $(M', S'') \in V$ taki, że (M', S') jest osiągalny z (M', S'') w wyniku upływu czasu. Istnieje zatem droga prowadząca od węzła (M, S), która zawiera łuk z etykietą $((t, b), n)$, gdzie $b \in \mathcal{B}(t)$ i $n \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Wynika stąd, że węzeł (M, S) musi być węzłem pełnym. Z dowolności wyboru węzła (M, S) wynika, że wszystkie węzły grafu osiągalności są węzłami pełnymi.

Z drugiej strony, jeżeli wszystkie węzły grafu osiągalności są pełne, to wszystkie przejścia sieci są potencjalnie wykonalne dla każdego stanu $(M, S) \in \mathcal{R}(M_0, S_0)$, a zatem sieć jest żywa. $\square$

Lemat 2.2. Niech dane będą dwa stany (M_1, S_1), (M_2, S_2) sieci $\mathcal{N}$ takie, że $(M_1, S_1) \simeq (M_2, S_2)$. Jeżeli $(M_1, S_1) \xrightarrow{(t,b)} (M_1', S_1')$ i $(M_2, S_2) \xrightarrow{(t,b)} (M_2', S_2)'$, to $(M_1', S_1') \simeq (M_2', S_2')$.

Dowód. Jeżeli $(M_1, S_1) \simeq (M_2, S_2)$, to $M_1 = M_2$ oraz spełniony jest warunek (**??**). Ponieważ w obu stanach wykonywane jest to samo przejście t przy wiązaniu b, więc $M_1' = M_2'$. Jeżeli $p \in \mathit{In}(t) \cup \mathit{Out}(t)$, to zgodnie ze wzorem (**??**), $S_1'(p) = S_2'(p)$. Jeżeli $p \notin \mathit{In}(t) \cup \mathit{Out}(t)$, to $S_1'(p) = S_1(p)$ oraz $S_2'(p) = S_2(p)$. Z powyższych rozważań wynika, że stany (M_1', S_1') i (M_2', S_2') pokrywają się. $\square$

Twierdzenie 2.3. Niech dane będą stany (M_1, S_1) i (M_2, S_2) sieci $\mathcal{N}$ takie, że $(M_1, S_1) \simeq (M_2, S_2)$. Wówczas:

$$\mathcal{L}(M_1, S_1) = \mathcal{L}(M_2, S_2). \tag{2.1}$$

Dowód. Jeżeli $(M_1, S_1) \simeq (M_2, S_2)$, to $M_1 = M_2$ oraz spełniony jest warunek (**??**), a zatem dla dowolnego miejsca $p \in P$ znaczniki w tym miejscu są w stanach (M_1, S_1) i (M_2, S_2) dostępne dla tych samych przejść. W obu tych stanach aktywne są zatem dokładnie te same przejścia, przy tych samych wiązaniach.

Stąd, jeżeli dla pewnego przejścia t i wiązania $b \in \mathcal{B}(t)$, $(M_1, S_1) \xrightarrow{(t,b)} (M_1', S_1')$, to również istnieje stan (M_2', S_2') taki, że $(M_2, S_2) \xrightarrow{(t,b)} (M_2', S_2)'$. Ponadto, na podstawie lematu 2.2 $(M_1', S_1') \simeq (M_2', S_2')$. Z powyższych rozważań, na podstawie zasady indukcji matematycznej, wynika teza twierdzenia. □