Inercjalne układy odniesienia

I i II zasada dynamiki Newtona są spełnione tylko w pewnej klasie układów odniesienia. Nazywamy je inercjalnymi układami odniesienia.

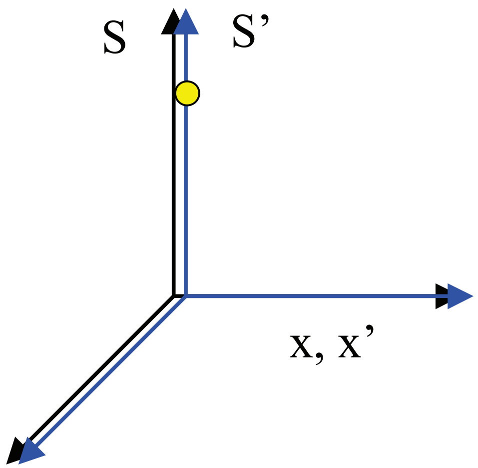
Kryterium układu inercjalnego: I zasada

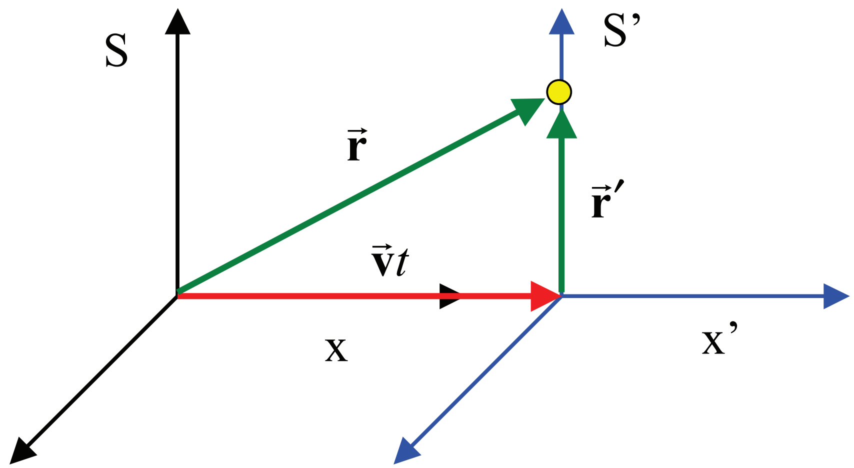
$$\text{jeżeli } \vec{F} = 0, \text{ to } \vec{a} = 0.$$

Jeżeli istnieje chociaż jeden układ inercjalny, to każdy układ poruszający się względem niego ruchem jednostajnym prostoliniowym jest również inercjalny.

Galileo Galilei (1564-1642)
(źródło: Internet)

Transformacja Galileusza





$$\begin{cases} \vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{v}}t \\ t' = t \end{cases}$$

<u>Zasada względności Galileusza</u>: prawa mechaniki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Dowód:

$$dt' = dt$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt'} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} - \vec{\mathbf{v}}$$

$$\vec{\mathbf{u}}' = \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$$

Uwaga: stąd wynika newtonowskie dodawanie prędkości: $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}' + \vec{\mathbf{v}}$

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}'}{dt'} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}$$

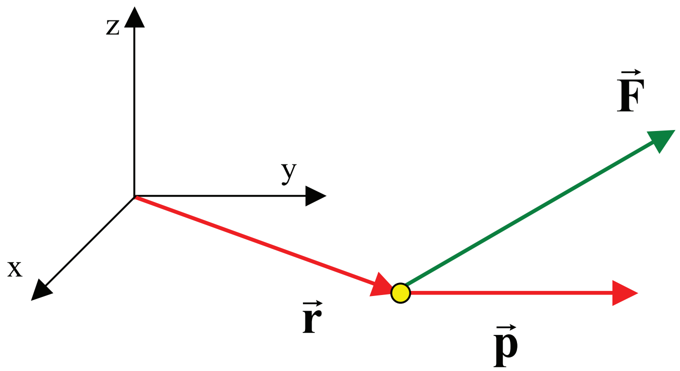
$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}' = \vec{\mathbf{F}}$$

cbdo

Prawo zachowania momentu pędu

Rozważmy ruch punktu materialnego pod wpływem siły $\vec{\mathbf{F}}$ względem początku układu odniesienia



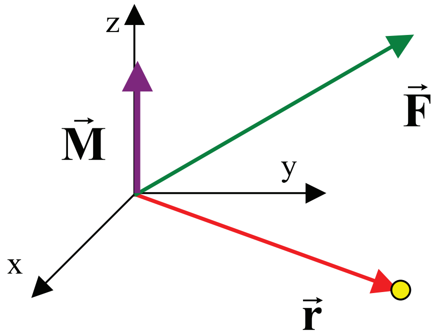
Z drugiej zasady dynamiki

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

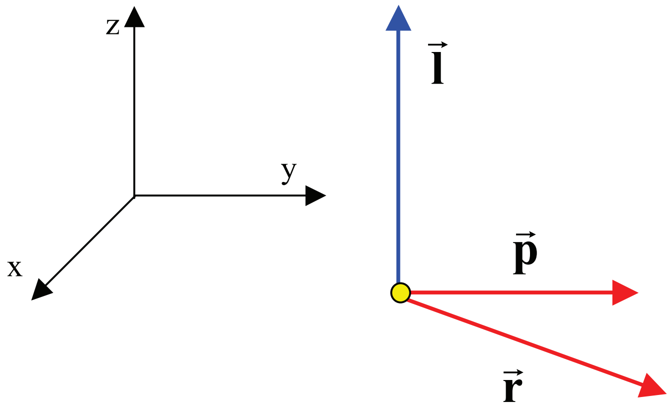
moment siły (definicja):

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$



moment pędu (definicja):

$$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$



obliczmy $\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt}$

$$\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\times\vec{\mathbf{p}}=\vec{\mathbf{v}}\times(m\vec{\mathbf{v}})=\mathbf{0}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt}=\vec{\mathbf{r}}\times\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}=\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}=\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt}}$$

Prawo zachowania momentu pędu:

jeżeli moment siły działający na punkt materialny jest równy zeru, to moment pędu pozostaje stały.

Dowód:

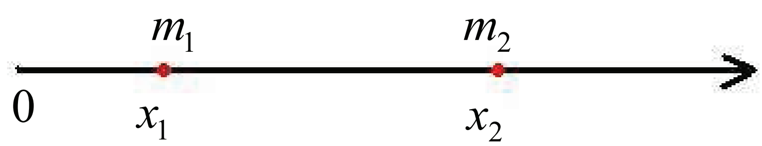
$$\vec{\mathbf{M}}=0 \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt}=0 \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{l}}=\mathbf{const}$$

Ruch układu punktów materialnych
definicja środka masy

Ruch dowolnego układu punktów materialnych (a także dowolnej bryły sztywnej) można opisać jako złożenie

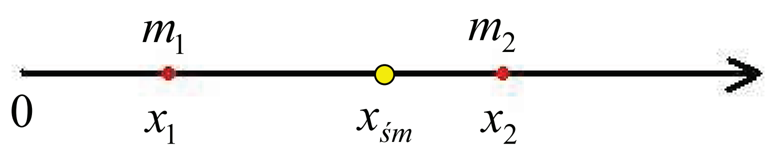
- **ruchu postępowego pewnego punktu materialnego**
- **ruchu obrotowego względem tego punktu.**

Położenie tego punktu nazywamy środkiem masy.



definicja:

$$x_{śm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



ogólnie:

$$\vec{\mathbf{r}}_{śm} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \qquad\qquad m = \sum_i m_i$$

II zasada dynamiki dla układu punktów materialnych - wyprowadzenie

$$\vec{\mathbf{r}}_{\acute{s}m} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \qquad\qquad m = \sum_i m_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{r}}_{\acute{s}m} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left\{m\,\vec{\mathbf{r}}_{\acute{s}m} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i\right\}$$

$$m\,\vec{\mathbf{v}}_{\acute{s}m} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left\{m\,\vec{\mathbf{v}}_{\acute{s}m} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i\right\}$$

$$m\,\vec{\mathbf{a}}_{\acute{s}m} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

$$m\,\vec{\mathbf{a}}_{\acute{s}m} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$$

każda $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_{i\,\mathbf{oddz}} + \vec{\mathbf{F}}_{i\,\mathbf{zewn}}$

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_i \left(\vec{\mathbf{F}}_{i\,\mathbf{oddz}} + \vec{\mathbf{F}}_{i\,\mathbf{zewn}}\right) = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_{i\,\mathbf{oddz}} + \sum_i \vec{\mathbf{F}}_{i\,\mathbf{zewn}}$$

oddziaływania wzajemne mają znaki przeciwne (z III zasady dynamiki)

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_{i\,\mathbf{oddz}} = 0$$

$$\boxed{m\,\vec{\mathbf{a}}_{\acute{s}m} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}}}$$

pęd środka masy:

$$\vec{\mathbf{P}} \equiv m\,\vec{\mathbf{v}}_{\acute{s}m}$$

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{P}}}{dt} = m\,\vec{\mathbf{a}}_{\acute{s}m}$$

a stąd

$$\boxed{\frac{d\,\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}}}$$

Zasada zachowania pędu dla układu punktów materialnych

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = \mathbf{0} \longrightarrow \frac{d\,\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \mathbf{0} \longrightarrow \vec{\mathbf{P}} = \mathbf{const}$$

Jeżeli całkowita siła zewnętrzna działająca na układ jest równa zeru, to pęd układu pozostaje stały.

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego układu punktów materialnych:

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}}} \qquad \textbf{gdzie} \quad \vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{l}}_i$$

Zasada zachowania momentu pędu dla układu punktów materialnych

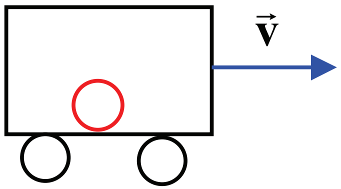
$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}} = \mathbf{0} \longrightarrow \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \mathbf{0} \longrightarrow \vec{\mathbf{L}} = \mathbf{const}$$

Jeżeli całkowity moment sił zewnętrznych działający na układ jest równy zeru, to moment pędu układu pozostaje stały.

Siły w układach nieinercjalnych
(siły bezwładności)

Są to siły pozorne, ale powodujące rzeczywiste skutki.

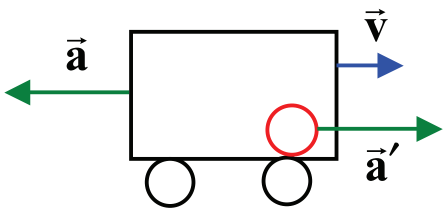
1. Siła bezwładności w ruchu niejednostajnym prostoliniowym – siła d'Alemberta



ruch jednostajny

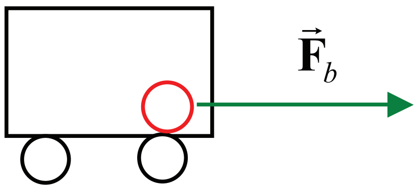
$\vec{v}$ **- w układzie inercjalnym**

hamowanie



$\vec{a}$ **- w układzie inercjalnym**

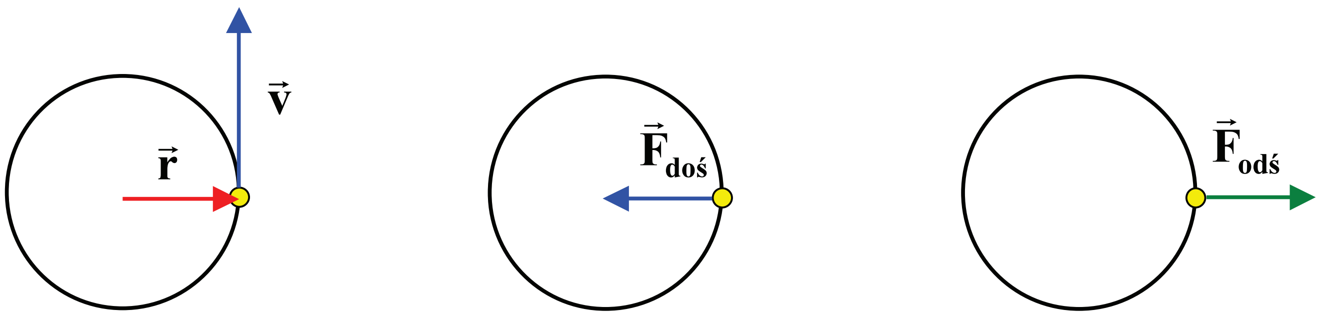
$\vec{a}'$ **- w układzie nieinercjalnym**



$\vec{F}_b$ **- siła bezwładności układzie nieinercjalnym**

$\vec{F}_b = m\vec{a}'$ **lub** $\vec{F}_b = -m\vec{a}$

2. Siła bezwładności w ruchu po okręgu – siła odśrodkowa



$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{doś}} = -\frac{mv^2}{r}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{odś}} = \frac{mv^2}{r}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$$

co widzi obserwator w układzie inercjalnym

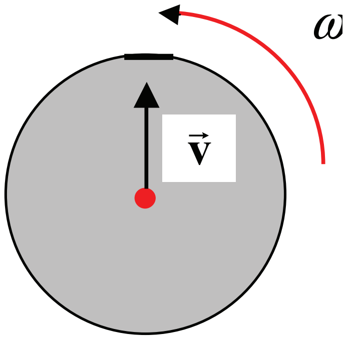
co widzi obserwator w układzie nieinercjalnym

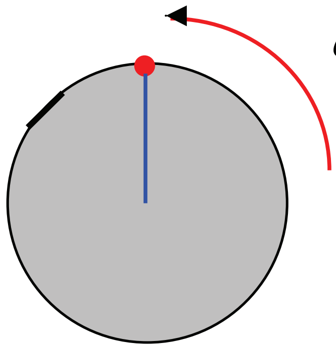
$$v = \omega\, r$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{doś}} = -m\omega^2\vec{\mathbf{r}}$$

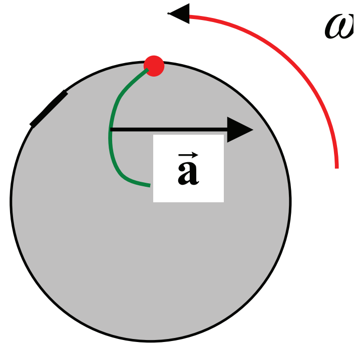
$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{odś}} = m\omega^2\vec{\mathbf{r}}$$

3. Siła bezwładności występująca podczas ruchu ciała w układzie obracającym się – siła Coriolisa





co widzi obserwator w układzie inercjalnym



co widzi obserwator w układzie nieinercjalnym

tajemnicze przyspieszenie:

$$\vec{\mathbf{a}} \propto \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\omega}$$

to właśnie przyspieszenie Coriolisa

$$\vec{\mathbf{a}}_C = 2\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\omega}$$

a związana z nim siła

$$\vec{\mathbf{F}}_C = m\,\vec{\mathbf{a}}_C$$

to siła Coriolisa

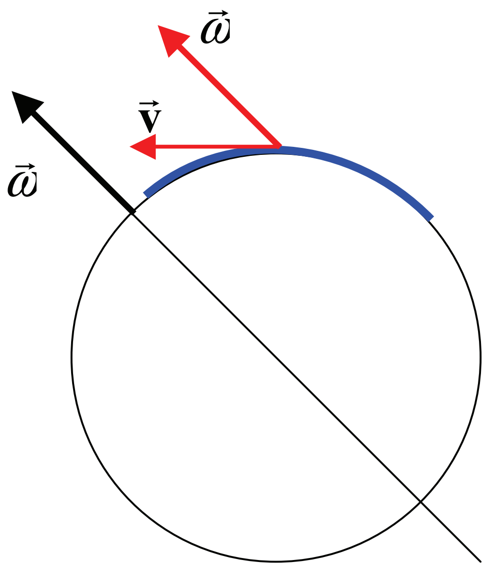
$$\vec{\mathbf{F}}_C = 2m\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\omega}$$

Przejawy siły Coriolisa

Planeta Ziemia jest taką wirującą platformą. Jest to szczególnie widoczne, jeżeli spojrzymy na nią „z góry”, od strony bieguna.

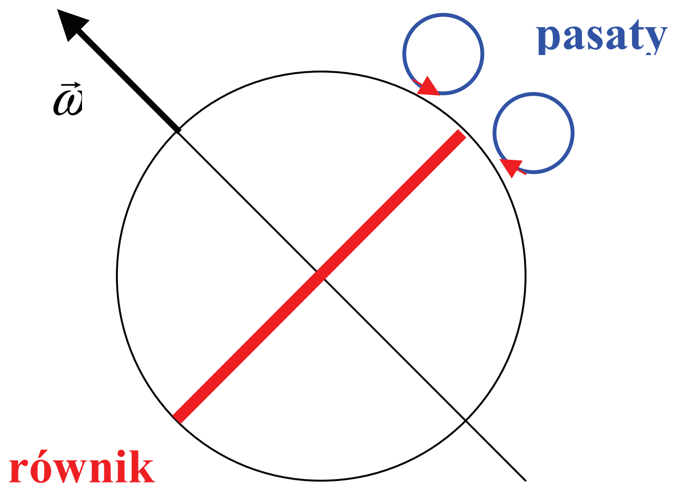
- **Efekty militarne**
  I wojna światowa: ostrzał artyleryjski Paryża z odległości 110 km – znoszenie pocisków na wschód o 1,6 km
  II wojna światowa: bombardowanie Londynu rakietami V2 z odległości ok. 300 km – odchylenie torów rakiet na wschód o 3,7 km

- **Zjawiska przyrodnicze**
  - **podmywanie prawych brzegów rzek syberyjskich**



Siła Coriolisa $\vec{F}_C = 2m\,\vec{v}\times\vec{\omega}$ skierowana jest na wschód

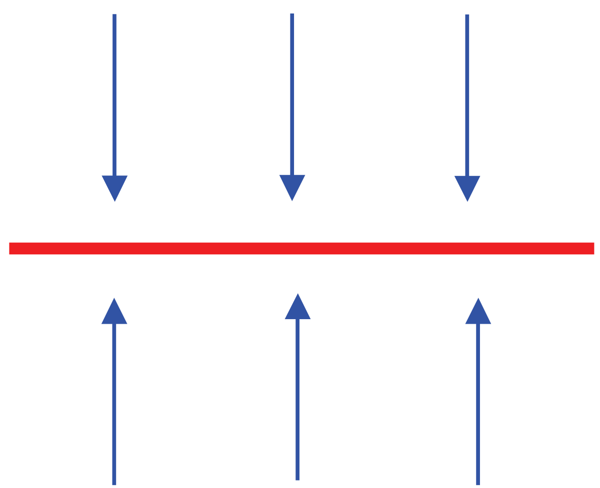
- **skręcanie pasatów (w prawo na półkuli północnej, w lewo – na południowej)**



na półkuli północnej $\vec{F}_C$ skierowana jest na zachód

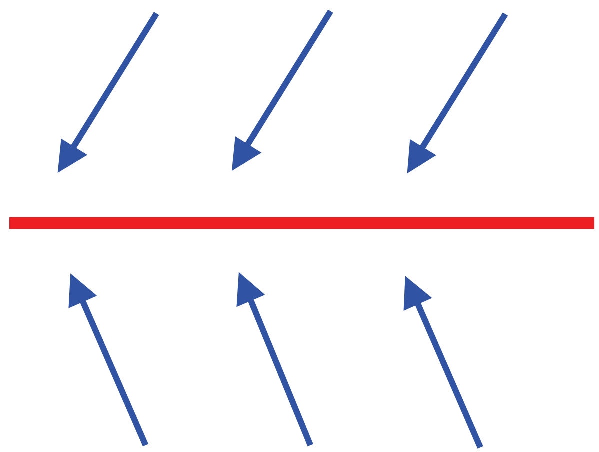
widok z góry:

wirtualnie



(bez obrotu Ziemi)

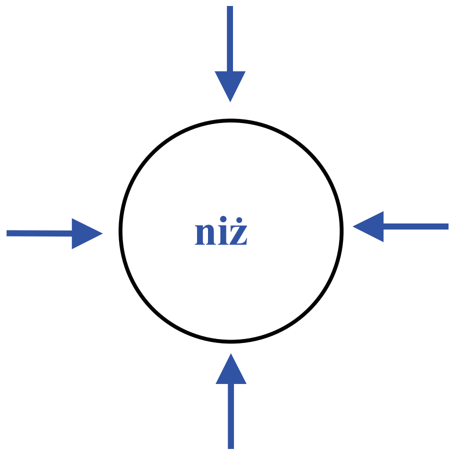
rzeczywiście



(na obracającej się Ziemi)

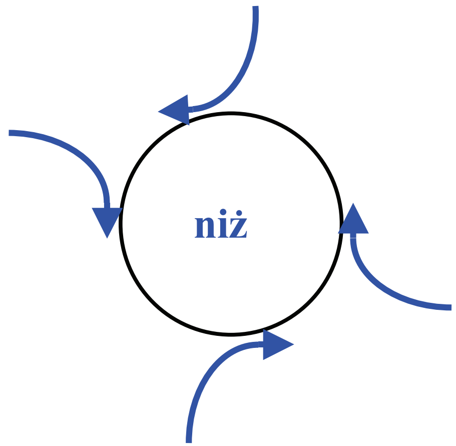
- **cyklony (sytuacja na półkuli północnej)**

wirtualnie



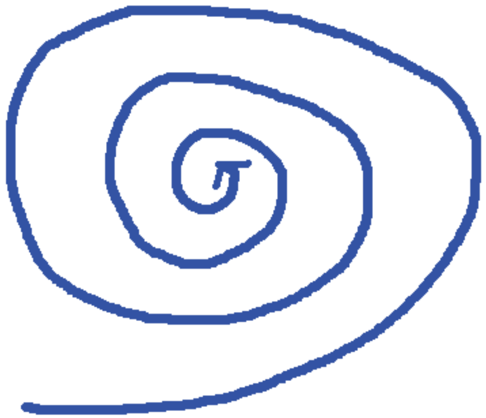
(bez obrotu Ziemi)

rzeczywiście



(na obracającej się Ziemi)

efekt końcowy:

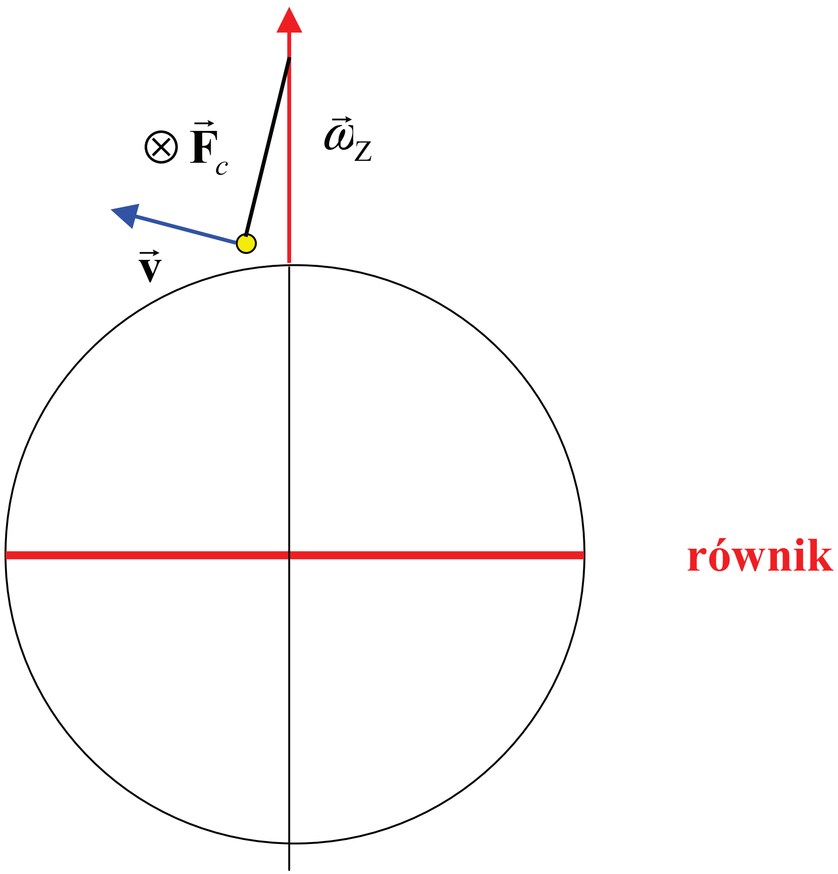


- **Zjawiska fizyczne**
  - **odchylenie swobodnie spadających ciał od pionu (niewielkie)**
  - **wahadło Foucault (czyt. „fu<u>ko</u>”)**

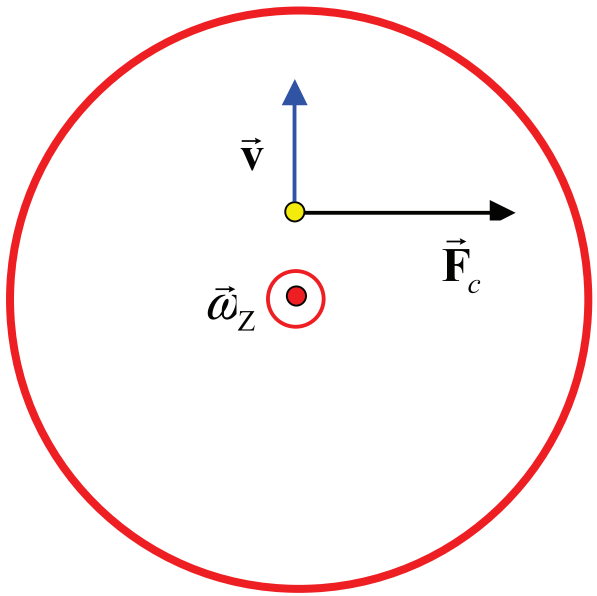
Jeżeli uruchomimy wahadło na biegunie północnym, to przy każdym wahnięciu kulka odchyli się w prawo dla obserwatora związanego z Ziemią (dochodząc do bieguna – na wschód, po minięciu bieguna – na zachód). Dla niego płaszczyzna wahań będzie obracać się względem podłoża z prędkością kątową Ziemi, tylko, że w przeciwnym kierunku

$$\omega_Z = \frac{2\pi}{24\ godziny} = \frac{\pi}{12} godz^{-1} = 15^0 / godz$$

widok z boku:

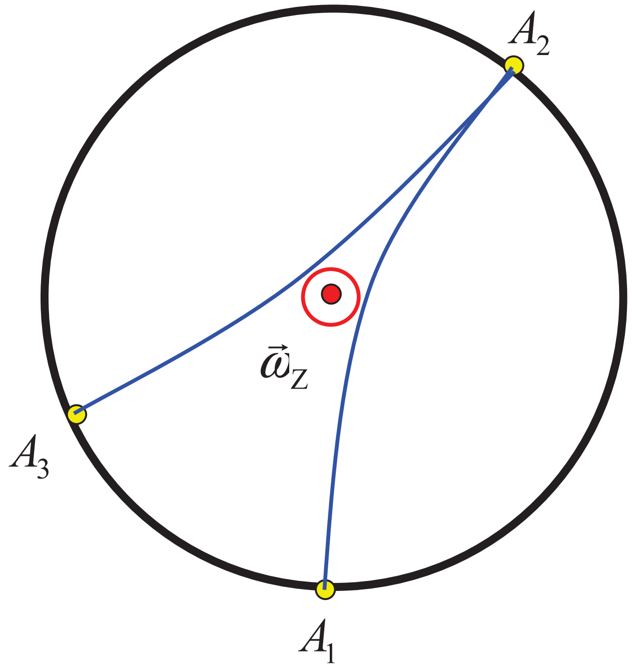


widok z góry:



Trajektoria kulki wahadła na biegunie północnym:

wahadło będzie skręcało w prawo, omijając biegun

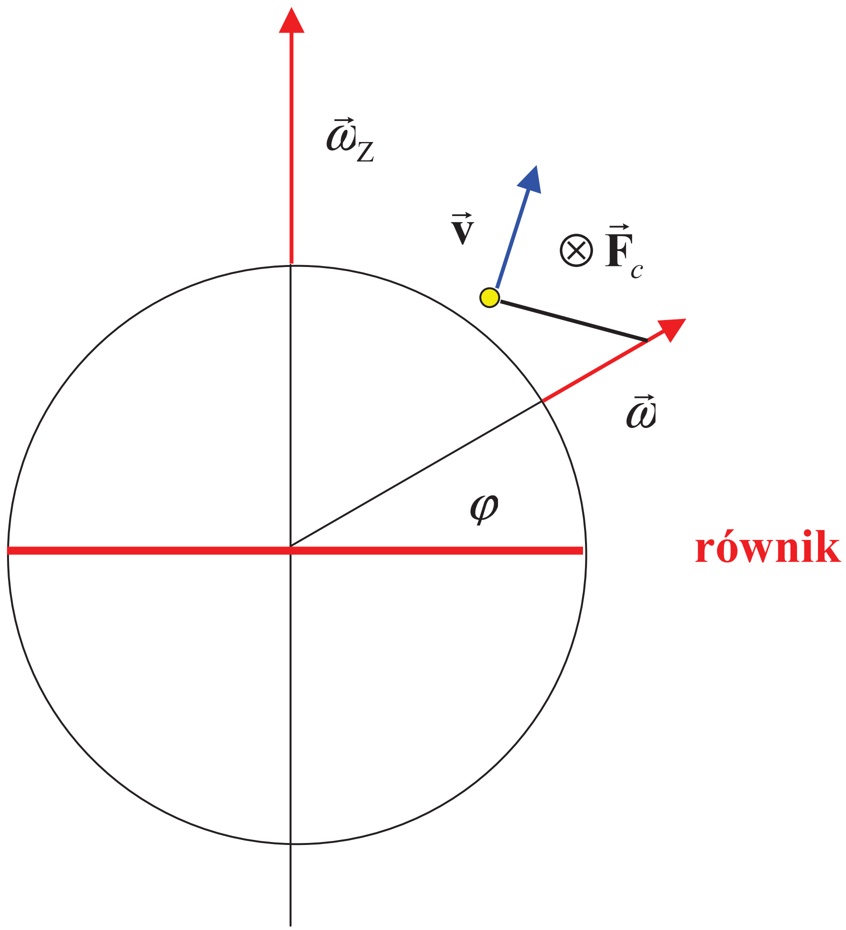


A_1, A_2, A_3 – kolejne skrajne położenia kulki wahadła podczas jednego „okresu” wahań.

Dla obserwatora stojącego na Ziemi płaszczyzna wahań wykonuje obrót ze wschodu na zachód.

Jest to dowód, że Ziemia obraca się z zachodu na wschód.

Na innych szerokościach geograficznych zjawisko też jest widoczne



- składowa $\vec{\omega}_Z$ na kierunek pionu

$$\omega = \omega_Z \cos(90^\circ - \phi) = \omega_Z \sin\phi$$

dla Krakowa i Paryża $\omega = 12^\circ\ /\ godz$

Foucault pokazał to w Paryżu, w Panteonie.

W Krakowie można to zobaczyć w kościele św. Piotra i Pawła.