Elementy rachunku całkowego

Całka oznaczona

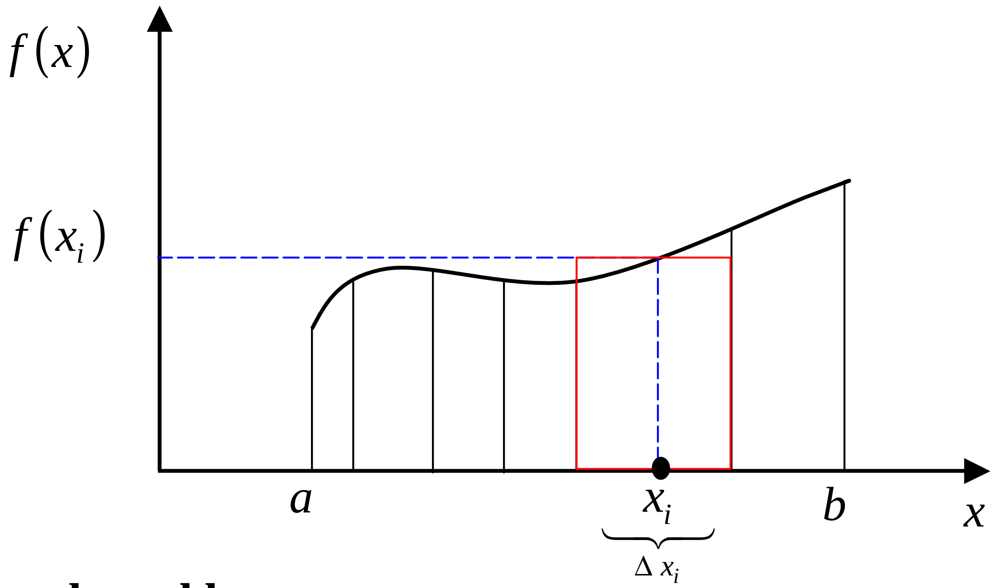
Dana jest $f(x)$**,** $\quad x \in [a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \equiv \int_a^b f(x)dx$$

$$n \to \infty$$

$$\sup(\Delta x_i) \to 0$$

Interpretacja geometryczna:



Dla $f(x) \geq 0$ **jest to pole pod krzywą.**

Inne rodzaje całek oznaczonych

całka krzywoliniowa

dana jest funkcja $\vec{F}(\vec{r})$, określona na łuku krzywej K, od punktu A do punktu B

$$\int_K \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \equiv \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_i$$

całka powierzchniowa

dana jest funkcja $\vec{F}(\vec{r})$, określona na powierzchni S

$$\int_S \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} \equiv \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \cdot \Delta\vec{\mathbf{S}}_i$$

całka objętościowa

dana jest funkcja $\vec{F}(\vec{r})$, określona w obszarze V

$$\int_V \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) dV \equiv \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \Delta V_i$$

Całka nieoznaczona

$$(\sin x)' = \cos x$$

funkcja pierwotna **pochodna**

Jeżeli $F'(x) = f(x)$**, to** $\int f(x)dx \equiv F(x)$

całka nieoznaczona **funkcja pierwotna**

ale

$$[F(x) + const]' = f(x)$$

więc

$$\int f(x)dx = F(x) + const$$

Całka nieoznaczona jest symbolem operacji matematycznej odwrotnej do różniczkowania. Wynik tej operacji nie jest jednoznaczny. Wynikiem jest cała rodzina funkcji pierwotnych, różniących się o dowolną stałą.
Źródło informacji o całkach nieoznaczonych – tablice.

Zastosowania

1. Rozwiązywanie równań różniczkowych

przykład:

$\frac{dv}{dt} = a$, **inaczej** $v'(t) = a$, **więc** $v(t) = \int a\,dt = at + const$

nieznaną stałą *const* **wyznaczamy z warunków początkowych, np. dla** $t = 0$, $v(t) = v_0$
i otrzymujemy znane równanie $v(t) = v_0 + at$

2. Obliczanie całek oznaczonych

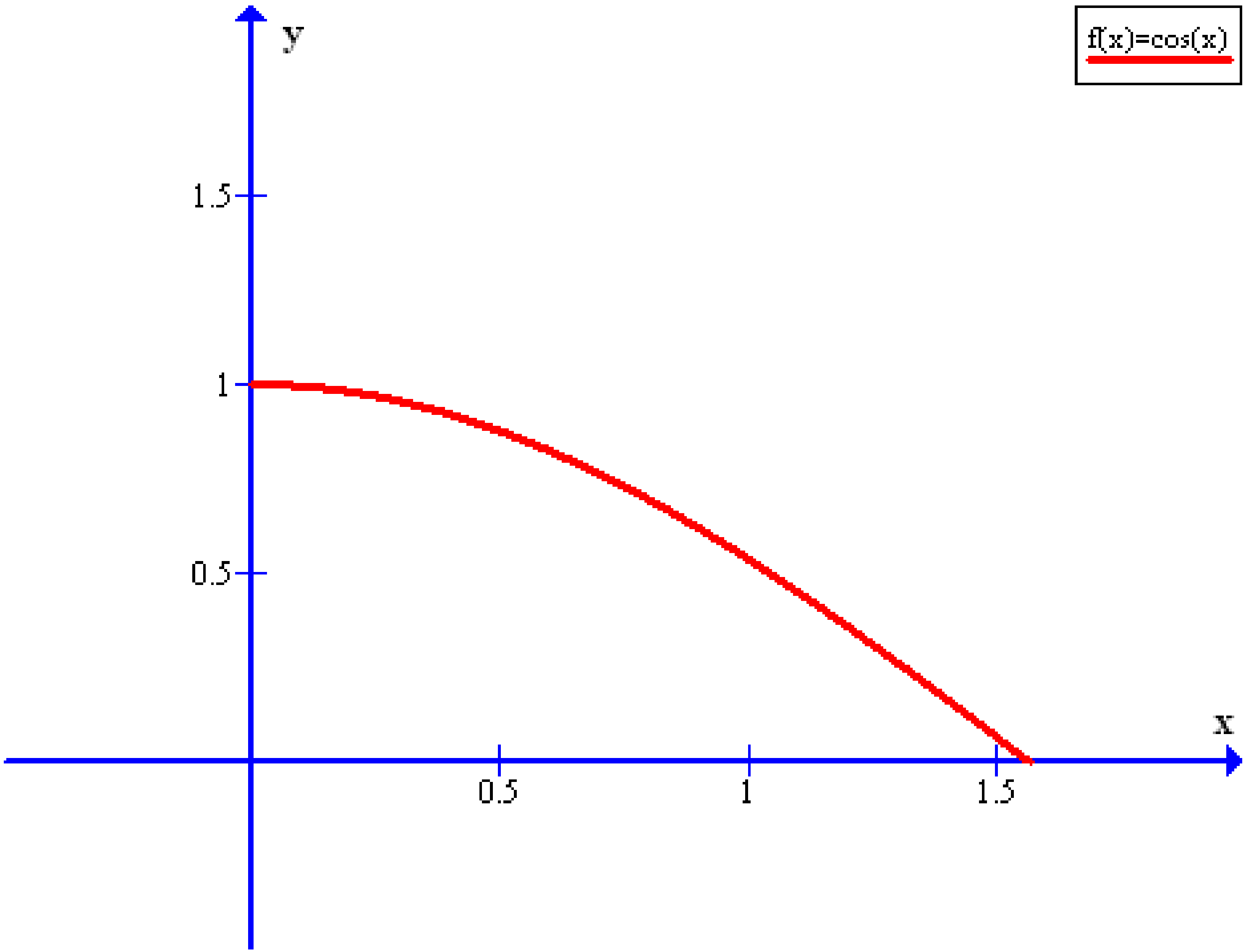
Twierdzenie o związku między całką oznaczoną i nieoznaczoną

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a)$$

przykład:

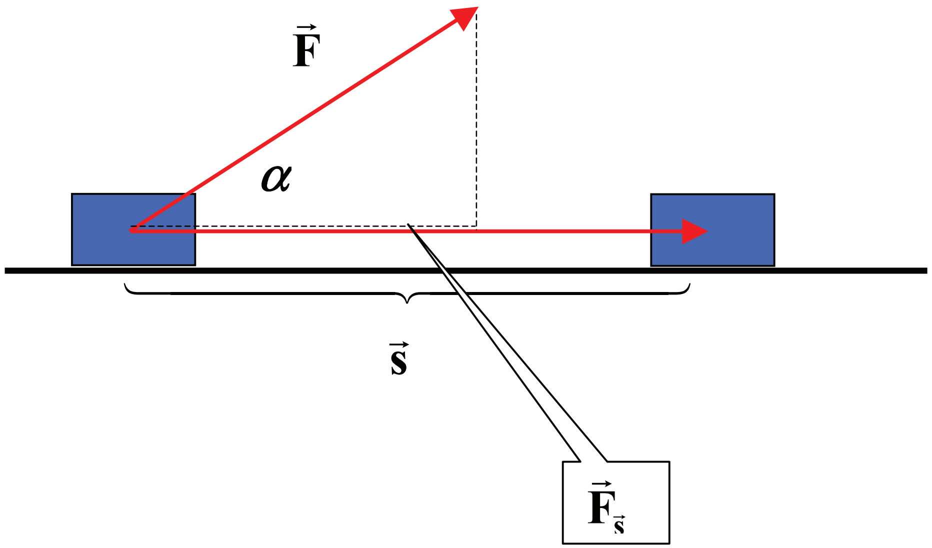
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

To pozwala obliczyć pole pod krzywą $f(x) = \cos x$ w tym przedziale:



Praca, energia, moc

definicja pracy



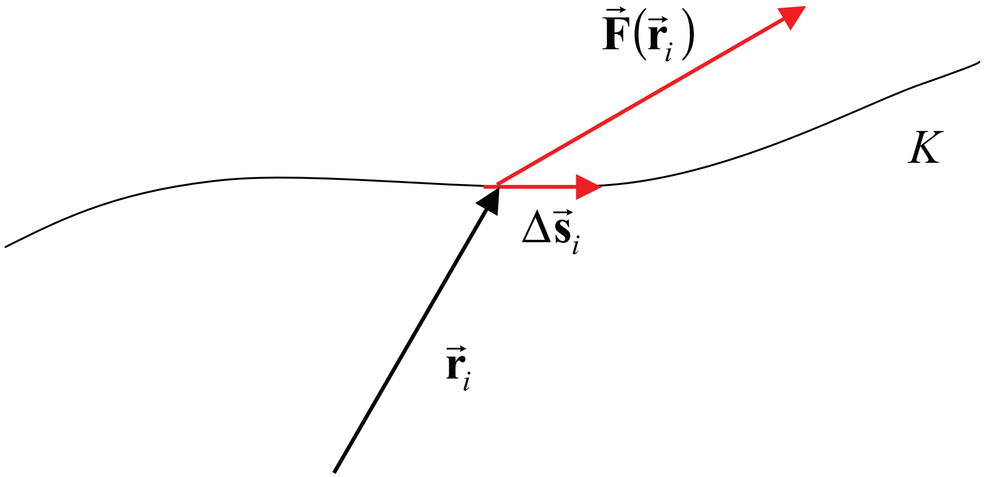
$$W = \vec{\mathbf{F}}_{\vec{\mathbf{s}}}\, s = (F\cos\alpha)s = Fs\cos\alpha$$

$$\boxed{W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{s}}}$$

jednostka: 1 J (dżul)

$$\mathbf{1\,J = 1\,N \cdot 1\,m}$$

Uogólnienie: siła zmienna (zależna od położenia), przesunięcie po dowolnej krzywej:



$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_i)\cdot\Delta\vec{\mathbf{s}}_i \equiv \int_K \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Związek między pracą a energią kinetyczną
lemat (twierdzenie pomocnicze):

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\cdot\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = 2\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$W = \int_{\vec{\mathbf{r}}_1}^{\vec{\mathbf{r}}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

$$W = \int_{\vec{\mathbf{r}}_1}^{\vec{\mathbf{r}}_2} m\vec{\mathbf{a}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, dt$$

tu korzystamy z lematu

$$W = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\ v^2}{dt} dt$$

$$W = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

energia kinetyczna:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

jednostka: 1 J

moc średnia:

$$P = \frac{W}{t}$$

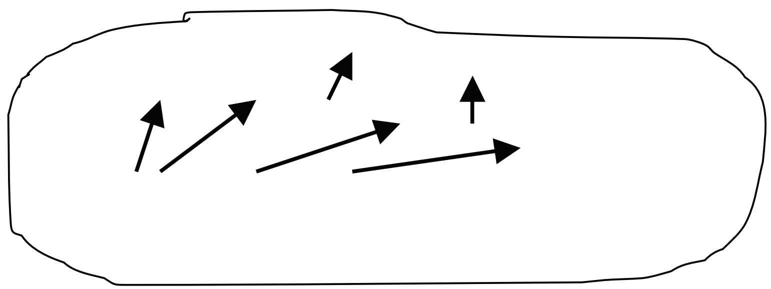
moc chwilowa:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

jednostka: 1 W (wat)

Pole sił

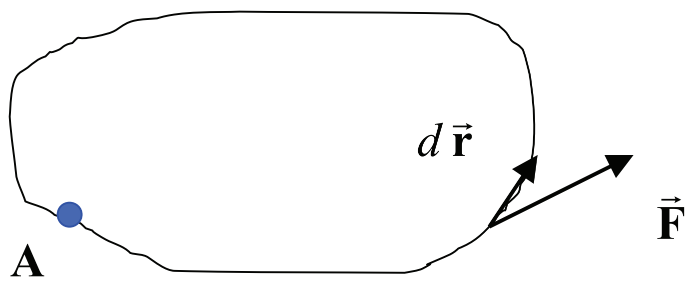
Jeżeli dany jest obszar przestrzeni taki, że w każdym punkcie określony jest wektor siły, to mówimy, że mamy w tym obszarze pole sił.



Mówimy, że w obszarze, w którym ciało po wykonaniu jakiegoś ruchu i powrocie do punktu początkowego zachowuje poprzednią zdolność do wykonania pracy, działają siły zachowawcze, a obszar ten nazywamy polem zachowawczym.

Przykłady występowania sił zachowawczych: ściskana i rozciągana sprężyna, wahadło.

Definicja: jeżeli praca wykonana wzdłuż drogi zamkniętej jest równa zeru, to mówimy, że pole jest zachowawcze.



$$\boxed{\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0}$$

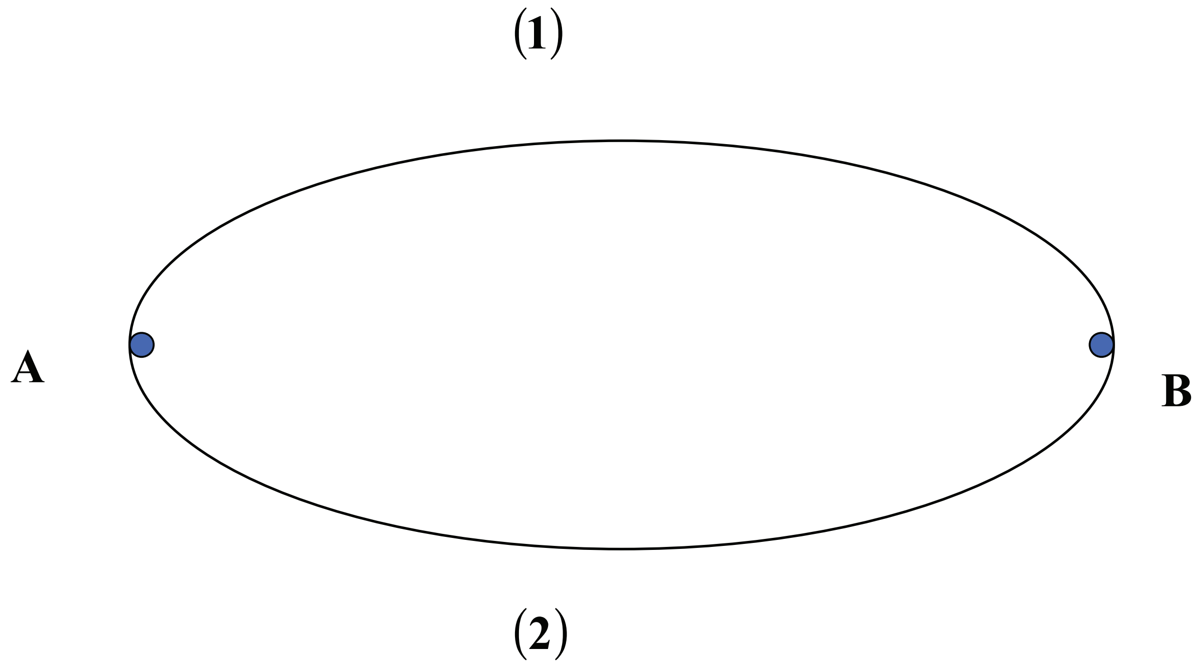
Twierdzenie: w polu zachowawczym praca jest niezależna od drogi, zależy tylko od punktów początkowego i końcowego.

Dowód:

$$\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0$$

$$\underset{(1)}{\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} + \underset{(2)}{\int_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0$$

$$\underset{(1)}{\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} - \underset{(2)}{\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0$$



$$\underset{(1)}{\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = \underset{(2)}{\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}}$$

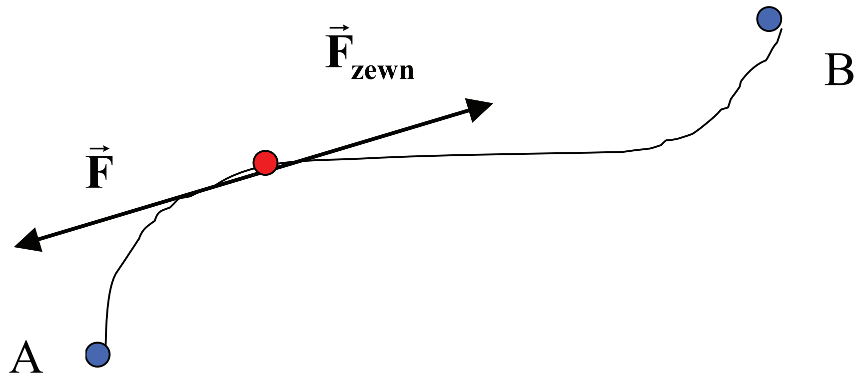
cbdo.

Przykłady pól zachowawczych: pole sił sprężystości, pole sił grawitacji.

Energia potencjalna i potencjał

W polu zachowawczym można wprowadzić funkcję, zależną tylko od współrzędnych, taką że różnica wartości tej funkcji w dwóch punktach daje pracę na drodze łączącej te punkty.

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$$



$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = -\vec{\mathbf{F}}$$

E_p – **energia potencjalna**

Jeżeli rozważymy przesuwanie ciała o masie jednostkowej, to otrzymamy funkcję charakteryzującą pole – potencjał.

$$\int_A^B -\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = E_p(B) - E_p(A) \qquad /\boldsymbol{m}$$

$$\int_A^B -\vec{\gamma} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U(B) - U(A),$$

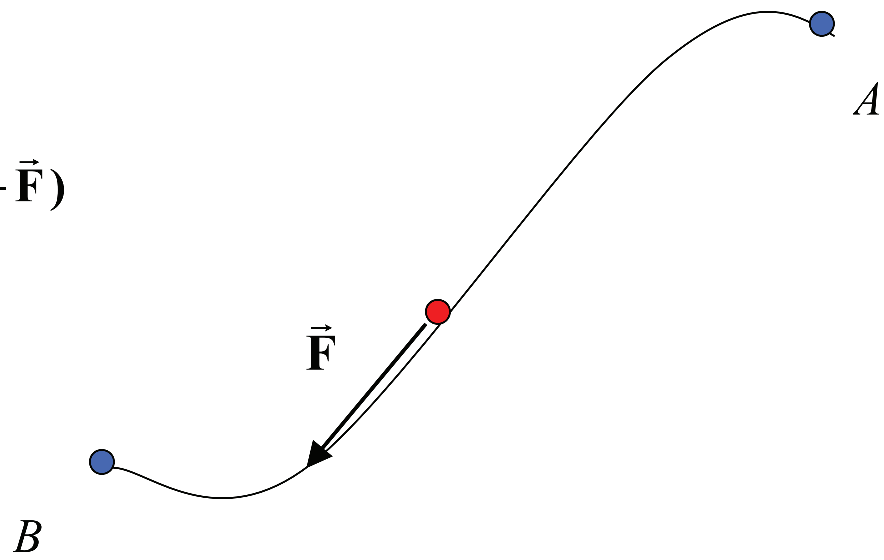
$U = \dfrac{E_p}{m} \Leftrightarrow$ **potencjał,** $\quad \vec{\gamma} = \dfrac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \Leftrightarrow$ **natężenie pola**

$\gamma = -\mathrm{grad}\, U$, $\quad \mathrm{grad}\, U \equiv \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z} \right)$ $\quad$ „grad” **czytamy „gradient”**

Prawo zachowania energii mechanicznej

Rozważmy samorzutny ruch ciała o masie m w polu sił zachowawczych

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = E_k(B) - E_k(A)$$



a teraz ruch jednostajny (hamowany siłą $-\vec{\mathbf{F}}$)

$$-\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = E_p(B) - E_p(A)$$

$$E_k(B) - E_k(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)$$

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A)$$

W polu sił zachowawczych całkowita energia mechaniczna jest stała.

$$\boxed{E_k + E_p = const}$$