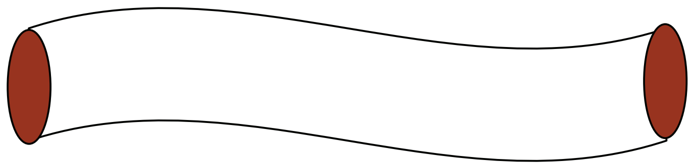
Elementy mechaniki bryły sztywnej

bryła sztywna = układ punktów materialnych o stałych odległościach wzajemnych

ruch bryły sztywnej – złożenie ruchu postępowego i obrotowego

Czysty ruch postępowy – trajektorie równoległe



Wystarczy opis ruchu środka masy

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = m\,\vec{\mathbf{a}}_{\acute{s}m}$$

lub, jeśli zdefiniujemy

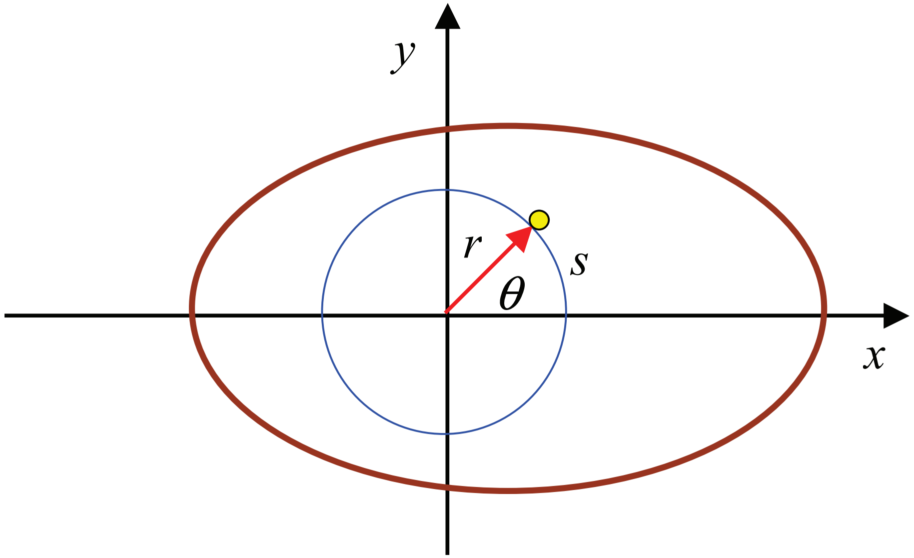
$$\vec{\mathbf{P}} = m\,\vec{\mathbf{v}}_{\acute{s}m}$$

to

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{P}}}{dt}$$

Czysty ruch obrotowy – jeżeli każdy punkt bryły porusza się po okręgu, a środki wszystkich okręgów leżą na linii prostej, zwanej osią obrotu.

Wybieramy dowolny punkt i przenosimy pojęcia z kinematyki punktu materialnego



droga kątowa

$$\theta = \frac{s}{r}$$

prędkość kątowa

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$ **wektor** $\vec{\omega}$ **jest** $\perp$ **do płaszczyzny obrotu**

przyspieszenie kątowe

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Dynamika bryły sztywnej

Równanie ruchu postępowego (II zasada dynamiki):

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{P}}}{dt}$$

zapisane w układzie inercjalnym.

Równanie ruchu obrotowego (II zasada dynamiki):

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

również w układzie inercjalnym, ale ponadto wektory:

$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}}$ **- całkowity moment siły**

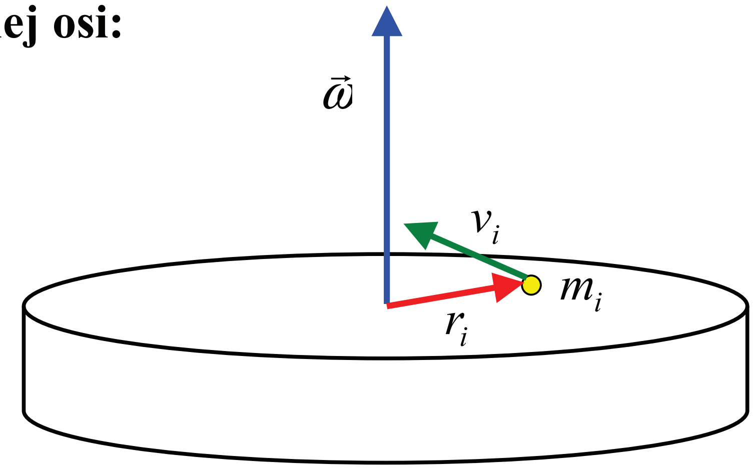
$\vec{\mathbf{L}}$ **- całkowity moment pędu**

powinny być mierzone względem <u>początku</u> inercjalnego układu odniesienia.

Ważna uwaga: drugie równanie pozostaje słuszne <u>także</u> wtedy, gdy $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}}$ **i** $\vec{\mathbf{L}}$ **mierzymy względem <u>środka masy</u>.**

Dynamika bryły sztywnej zależy od rozkładu masy.

Rozważmy obrót bryły wokół ustalonej nieruchomej osi:



energia kinetyczna punktu m_i

$$E_{k(i)} = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i (\omega\, r_i)^2 = \tfrac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

energia kinetyczna bryły

$$E_k = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots + \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 + \ldots + \tfrac{1}{2} m_n v_n^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}^2 = \tfrac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}^2$$

Zdefiniujmy moment bezwładności bryły względem osi

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

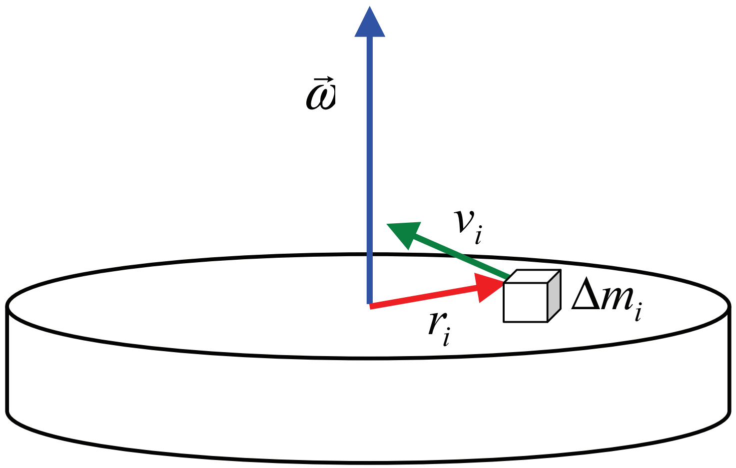
wtedy

$$E_k = \tfrac{1}{2} I \boldsymbol{\omega}^2$$

1. **Wynik jest ważny również dla osi przechodzącej przez środek masy i zachowującej ustalony kierunek w przestrzeni.**
2. **Energia kinetyczna całkowita:**

$$E_k = \frac{1}{2} m\, v_{śm}^2 + \frac{1}{2} I_{śm} \omega^2$$

3. **Moment bezwładności można zdefiniować dla ciągłego rozkładu masy**



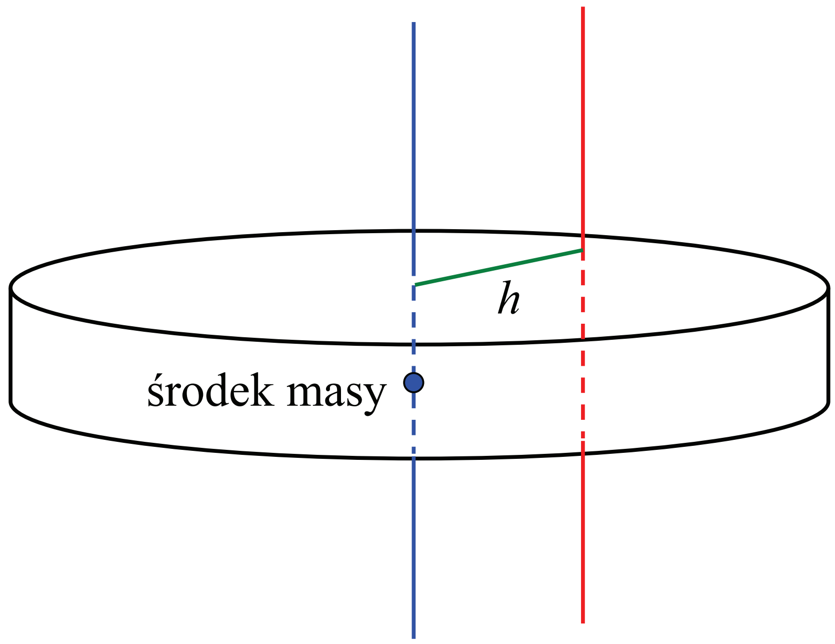
$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i) r_i^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 (\Delta m_i) = \int_V r^2 dm$$

Element całkowania dm **trzeba przedstawić jako** $\rho(r)\, dV$**, gdzie** $\rho(r)$ **- gęstość** $\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$

$$I = \int_V r^2 \rho(r) dV$$

Bryła niekoniecznie musi obracać się wokół osi symetrii. Stosujemy wtedy

Twierdzenie Steinera



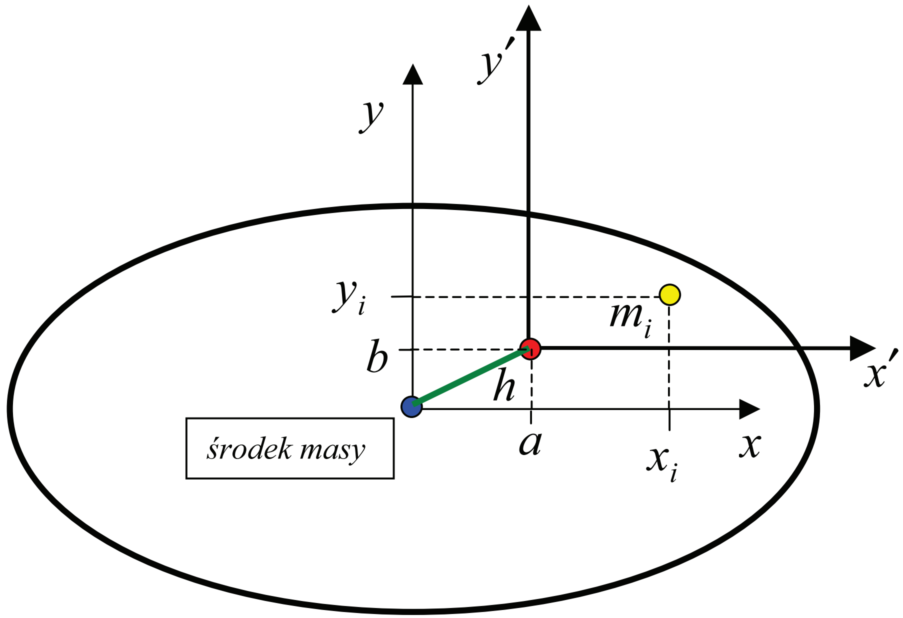
Jeżeli moment bezwładności danego ciała względem osi przechodzącej przez środek masy wynosi I_0, to moment bezwładności I względem innej osi <u>równoległej do niej</u> wynosi

$$I = I_0 + mh^2$$

gdzie m jest masą całej bryły, a h jest odległością między osiami.

Dowód:

(widok z góry, osie obrotu prostopadłe do rysunku)



$$I_0 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$I = \sum_i m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right) = \sum_i m_i \left[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\right] = \sum_i m_i \left(x_i^2 - 2ax_i + a^2 + y_i^2 - 2by_i + b^2\right) =$$

$$= \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + \sum_i m_i \left(a^2 + b^2\right) = I_0 - 0 - 0 + m\left(a^2 + b^2\right) = I_0 + mh^2$$

dwa człony się zerują, ponieważ $x_{śm} = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i$ **,** $y_{śm} = \frac{1}{m}\sum_i m_i y_i$

a w układzie środka masy $x_{śm} = 0$ **i** $y_{śm} = 0$**.**

Moment pędu bryły sztywnej
(Kittel, Knight, Ruderman: "Mechanika")

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum \vec{\mathbf{l}}_i = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times (m_i \vec{\mathbf{v}}_i) = \sum m_i \vec{\mathbf{r}}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_i)$$

przypomnienie

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{B}} - (\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_i) = (\vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i)\vec{\omega} - (\vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\omega})\vec{\mathbf{r}}_i$$

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)\vec{\mathbf{r}}_i \right]$$

jak widać $\vec{\mathbf{L}}$ na ogół nie jest równoległe do $\vec{\omega}$ (człon z $\vec{\mathbf{r}}_i$ psuje równoległość).

Po prostych przekształceniach można otrzymać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}$$

Moment pędu wyraża się liniowo przez składowe wektora prędkości kątowej.

Skrótowy symboliczny zapis:

$$\vec{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{I}}\,\vec{\omega}$$

gdzie $\hat{\mathbf{I}}$ jest tensorem momentu bezwładności.

Tensor (w przestrzeni 3-wymiarowej) = (macierz 3×3) + (przepis jak się ona zmienia przy zmianie układu współrzędnych).

W tym przypadku

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Ważne uwagi:

Zapis $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$, gdzie I jest liczbą, <u>na ogół</u> jest niepoprawny.
W pewnych przypadkach jest poprawny:

1. **jeżeli bryła symetryczna (kula, walec) obraca się wokół osi symetrii np. dla kuli $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$, a pozostałe są =0.**
2. **dla każdej bryły można znaleźć taki układ współrzędnych (związany z tą bryłą), że tensor $\hat{\mathbf{I}}$ jest macierzą diagonalną, tzn.**

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

osie tego układu = osie główne; jeżeli wybierzemy oś główną jako oś obrotu, np. oś z, to $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$,

$$\vec{\mathbf{L}} = (0, 0, I_{zz}\omega_z) \Rightarrow \vec{\mathbf{L}} = I_{zz}\vec{\omega}$$

Momenty bezwładności podane w tablicach są właśnie dla osi głównych.