Pewne zagadnienia ruchu obrotowego bryły sztywnej

a) ruch względem osi nieruchomej

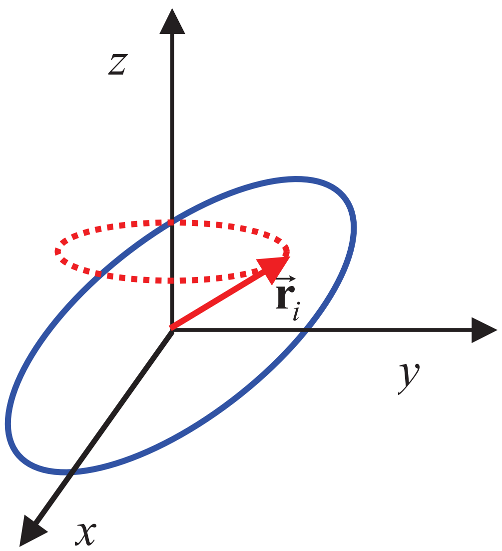
wybierzmy oś *z* jako oś nieruchomą

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega$$

$$L_x = I_{xz}\omega$$

$$L_y = I_{yz}\omega$$

$$L_z = I_{zz}\omega$$



r_{0i} **- rzut** $\vec{\mathbf{r}}_i$ **na płaszczyznę** xy

$$x_i = r_{0i}\cos(\omega t) \qquad I_{xz} = -\sum m_i r_{0i} z_i \cos(\omega t)$$

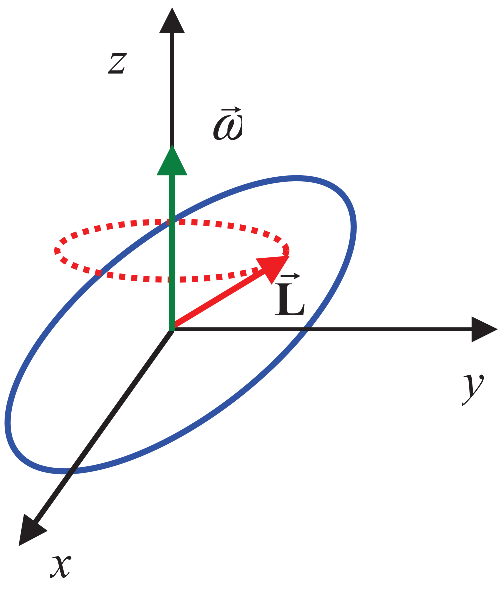
$$y_i = r_{0i}\sin(\omega t) \quad \Rightarrow I_{yz} = -\sum m_i r_{0i} z_i \sin(\omega t)$$

$$z_i = const \qquad I_{zz} = const$$

$$L_x = L_0\cos(\omega t)$$

$$L_y = L_0\sin(\omega t) \quad \Rightarrow$$ **precesja momentu pędu**

$$L_z = const$$



Problem „bicia osiowego”

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}}$$

Zmiana momentu pędu wymaga zewnętrznego momentu siły. Dostarcza go łożysko trzymające oś. Oś działa siłą reakcji na łożysko – tzw. „bicie osiowe”.

„Wyważanie” – przywracanie symetrii i redukcja „bicia osiowego”.

Uwaga: chociaż na ogół $L \neq I\omega$, to jednak $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$, gdzie I jest momentem bezwładności względem ustalonej osi obrotu.

b) ruch względem osi swobodnej

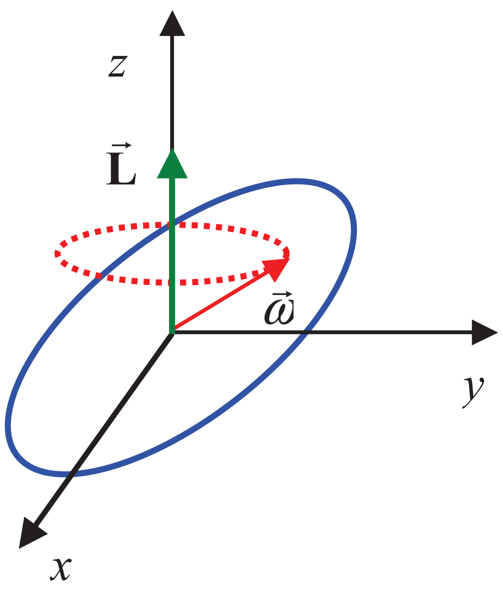
Osią swobodną może być tylko jedna z osi głównych.
Osią stabilną jest oś główna o największym momencie bezwładności.
W polu grawitacyjnym jednorodnym

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}} = 0$$

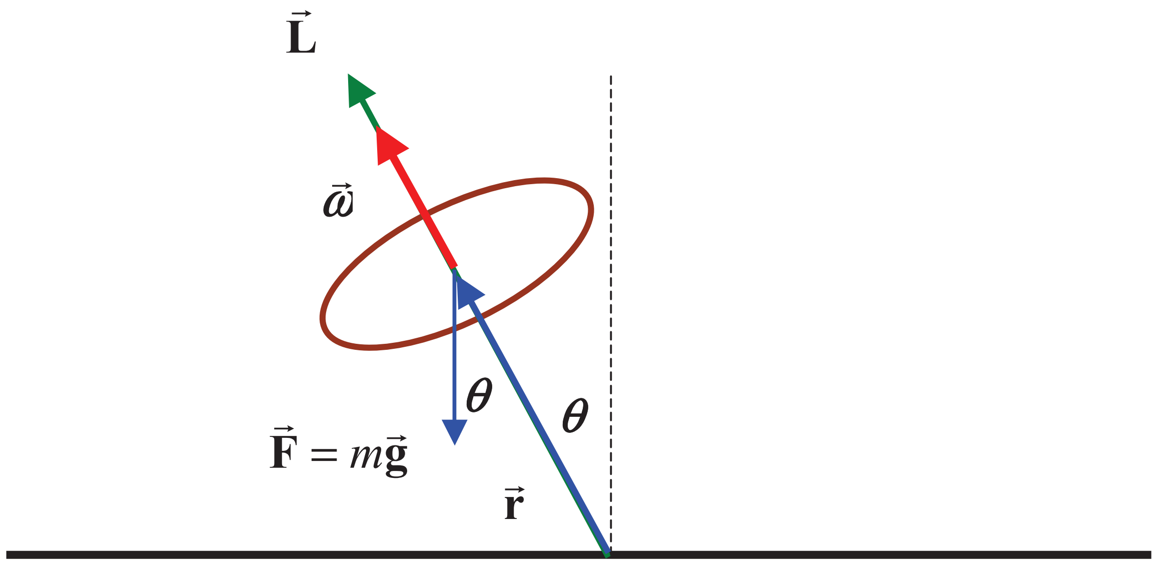
$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0$$

$$\vec{\mathbf{L}} = const$$

ale wedy $\vec{\omega}$ **ulega precesji (względność ruchu). Oś obrotu Ziemi ulega powolnej precesji.**



c) ruch bąka symetrycznego w polu sił o $\vec{\mathbf{M}} \neq 0$



moment sił grawitacji

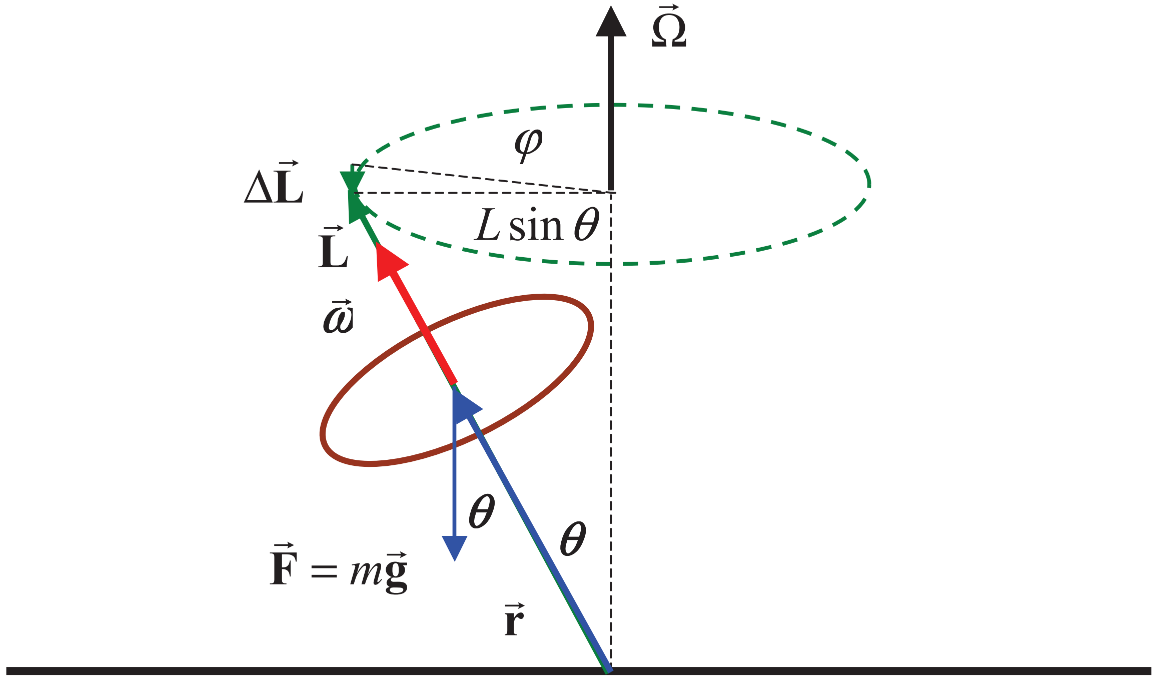
$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

$$M = mgr \sin\theta$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} \approx \vec{\mathbf{M}}\Delta t$$

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} \perp \vec{\mathbf{L}} \Rightarrow$$ **precesja momentu pędu**



$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{M\ \Delta t}{L\sin\theta} \qquad /\Delta t$$

$$\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgr\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$$

Prędkość kątowa precesji bąka jest odwrotnie proporcjonalna do prędkości kątowej obrotu bąka.

Jeżeli ktoś chciałby lepiej zrozumieć pojęcie tensora momentu bezwładności i ruch precesyjny bryły sztywnej, a woli korzystać z podręczników internetowych, to polecam: Stöcker H., „Nowoczesne kompendium fizyki", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010.

Książka jest dostępna na platformie http://libra.ibuk.pl/ bezpłatnie dla studentów i pracowników AGH. W razie kłopotów z rejestracją i korzystaniem proszę zwrócić się po pomoc do Oddziału Informacji Naukowej Biblioteki Głównej AGH.

Drgania

drganie = ruch drgający = ruch okresowy = ruch periodyczny

Ruch harmoniczny prosty (df. matematyczna) – taki ruch drgający, w którym położenie da się zapisać przy pomocy funkcji harmonicznej czasu

$x = \sin t$ **lub** $x = \cos t$

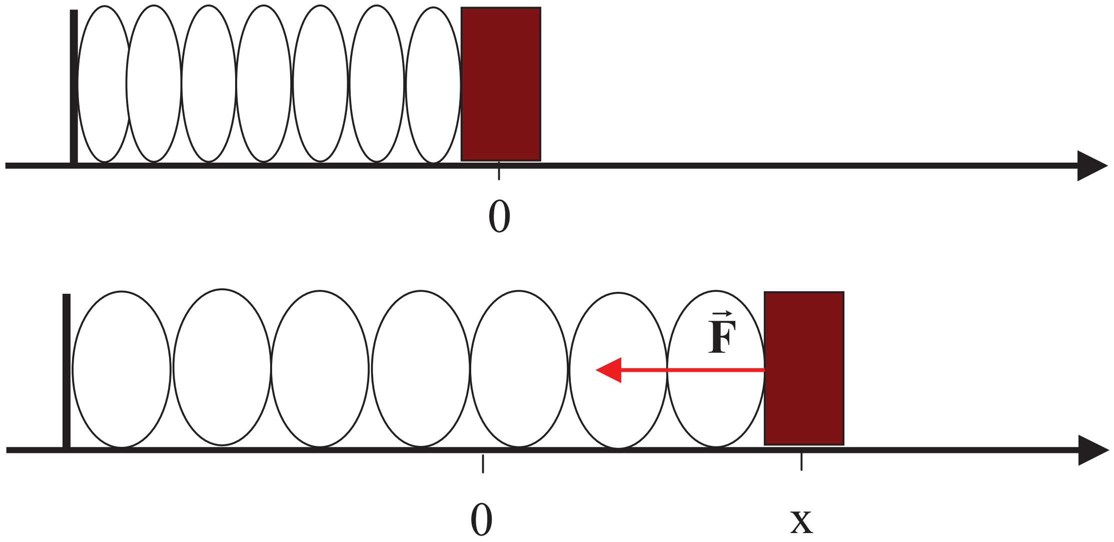
dopuszczalne jest złożenie z funkcją liniową

$x = \sin(\omega\, t + \varphi)$ **lub** $x = A \sin t + B$ **lub** $x = A \sin(\omega\, t + \varphi) + B$

Dowolny ruch drgający można przedstawić jako złożenie ruchów harmonicznych prostych.

Odkształcenie sprężyste – układ wraca do stanu początkowego po ustaniu oddziaływania.

Z doświadczenia: przy małych odkształceniach, siła działająca na układ i odkształcenie są do siebie proporcjonalne (prawo Hooke'a).



$$F = -k\ x$$

***k* – stała sprężysta**

$$F = ma$$

$$ma = -k\ x$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\ x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$ **równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach**

Rozwiązanie:

jeżeli $x = \sin t$**, to** $\frac{dx}{dt} = \cos t$**, a stąd** $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$

Spróbujmy ogólniejszej postaci funkcji harmonicznej $x = \sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{dx}{dt} = \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ **porównujemy z równaniem** $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

Ogólne rozwiązanie:

$x = A\sin(\omega t + \varphi)$, **gdzie** $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **- ruch harmoniczny**

definicje:

A **- amplituda**

ω **- częstość kołowa**

$\omega t + \varphi$ **- faza ruchu,** φ **- faza początkowa**

Inne (równoważne) definicje ruchu harmonicznego prostego

kinematyczna: jest to ruch, w którym przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do wychylenia i przeciwnie skierowane;

dynamiczna: jest to ruch, w którym siła jest wprost proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie skierowana.

Inne możliwe zapisy ruchu harmonicznego

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

lub

$$x = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$$

Równoważność powyższej sumy z zapisem $x = A\sin(\omega t + \varphi)$**:**

$$a_1 = A\cos\varphi$$
$$a_2 = A\sin\varphi$$

Energia w ruchu harmonicznym prostym

Obliczmy energię w jakimś położeniu x

$$E = E_k + E_p$$

$$E_p = W$$

$$W = \int_0^{x'} -F\,dx = \int_0^{x'} kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{x'} = \frac{1}{2}kx'^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E = const$$

Wniosek: oscylator harmoniczny nietłumiony jest układem zachowawczym.