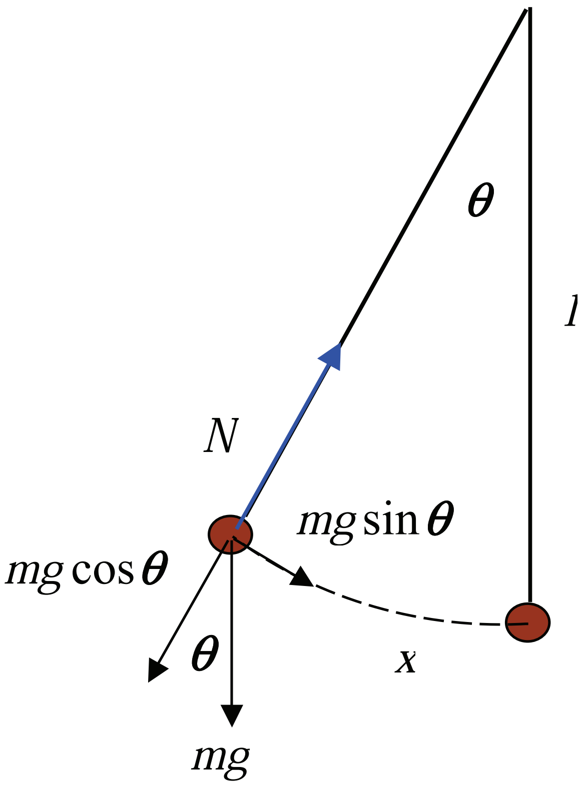
Przykład: wahadło proste (matematyczne)



Uwaga: $N \neq mg\cos\theta$

$$N = mg\cos\theta + F_{\text{doś}}$$

równanie ruchu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$x = l\theta$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$ **równanie nieliniowe**

przybliżenie małych wychyleń: $\sin\theta \approx \theta$

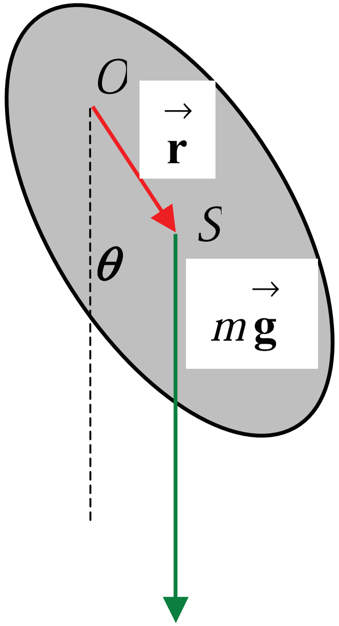
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

$\theta = \theta_{\max}\sin(\omega t + \varphi)$ **gdzie** $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, **stąd okres ruchu:** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

ponieważ $\sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = \sin(\omega t + 2\pi + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi)$.

Wahadło fizyczne

bryła sztywna zawieszona na poziomej osi, powyżej swojego środka ciężkości



$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{g}}$$

$$M_z = -mgr\sin\theta$$

(minus, ponieważ oś Ox skierowana jest w dół, oś Oy w prawo, oś Oz do nas, a moment siły ciężkości za płaszczyznę rysunku)

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$$

I **- moment bezwładności względem osi obrotu, tj osi Oz**

(w tym przypadku moment siły jest równoległy do osi obrotu, więc nie działa na oś, nie ma problemu tzw. „bicia osiowego" wektory $\vec{\mathbf{L}}$ i $\vec{\omega}$ są równoległe).

$$L_z = I\omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Równanie ruchu dla kierunku z:

$$-mgr\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\sin\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}$ **przybliżenie małych wychyleń**

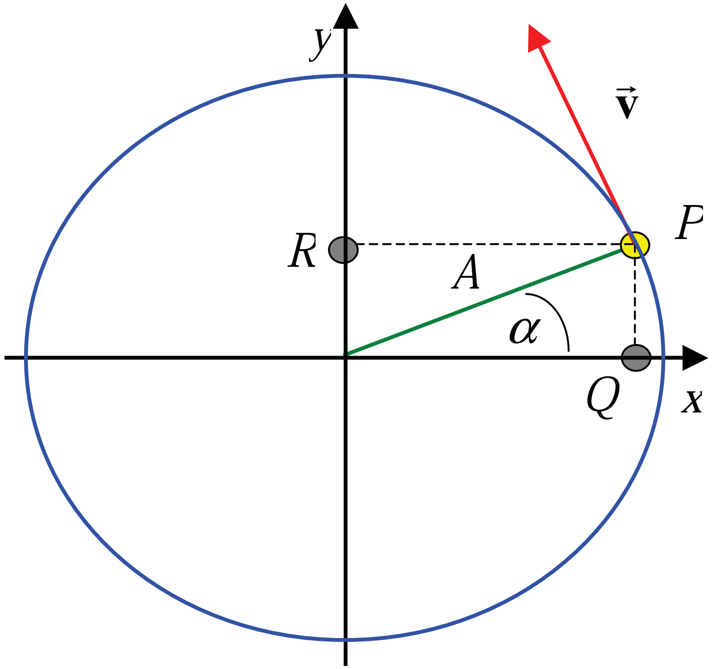
$\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2} = -\frac{mgr}{I}\boldsymbol{\theta}$ **równanie ruchu harmonicznego prostego**

$\omega^2 = \frac{D}{I}$ **(*D=mgr,* moment kierujący)**

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

Związek między ruchem harmonicznym a ruchem jednostajnym po okręgu

Rozważmy rzuty Q i R punktu P na osie x i y:



$$x_Q = A\cos\alpha$$

$$y_R = A\sin\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \delta$$

$$x_Q = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$y_R = A\sin(\omega t + \delta)$$

Jeżeli punkt P porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to jego rzuty na osie układu współrzędnych poruszają się wzdłuż tych osi ruchem harmonicznym prostym.

Ruchy te mają tę samą amplitudę i częstość kołową, natomiast są przesunięte w fazie o $\pi/2$:

$$y_R = A\sin(\omega t + \delta) = A\cos(\pi/2 - (\omega t + \delta)) = A\cos(\omega t + \delta - \pi/2)$$

Składanie drgań

Złożenie dwóch ruchów harmonicznych prostych, w kierunkach prostopadłych, o tych samych A i ω, przesuniętych w fazie o $\pi/2$, daje ruch po okręgu.

Jeżeli A są różne

$$x = A_x \cos(\omega t + \delta)$$

$$y = A_y \sin(\omega t + \delta)$$

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1$$

otrzymujemy ruch po elipsie.

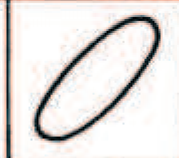
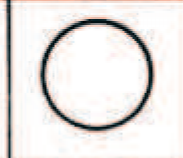
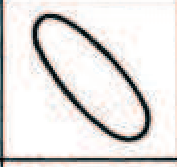
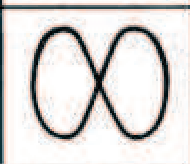
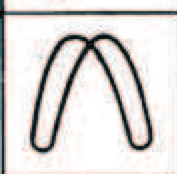
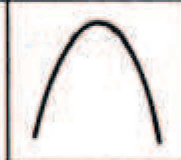
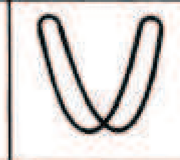
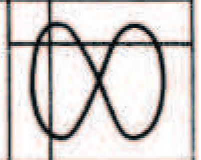
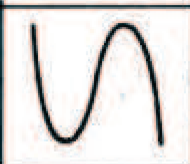
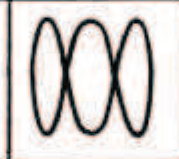
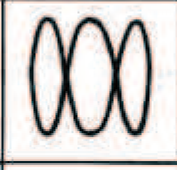
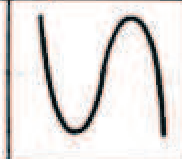
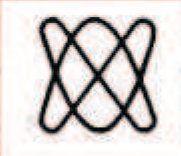
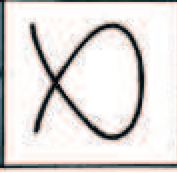
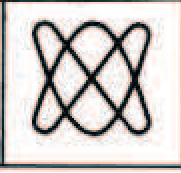
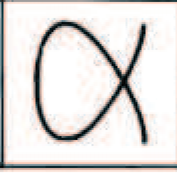
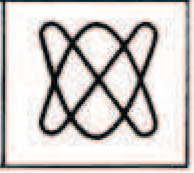
Przypadek ogólny: złożenie dwóch ruchów harmonicznych prostych, w kierunkach prostopadłych, o różnych A i ω, przesuniętych w fazie o δ

$$x = A_x \cos(\omega_x t)$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \delta)$$

daje tzw. figury Lissajous.

Figury Lissajous

różnica faz / stosunek częstotliwości	0°	45°	90°	135°	180°
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=1$					
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{1}{2}$					
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{1}{3}$					
$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{2}{3}$					

stosunek częstotliwości = odwrotnemu stosunkowi ilości przecięć figury z osiami układu współrzędnych

Składanie drgań równoległych, dudnienia

$$y_1 = A\cos\omega_1 t$$
$$y_2 = A\cos\omega_2 t$$
$$y = y_1 + y_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Drganie o częstości $\omega_{\text{śr}} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ **, o zmiennej amplitudzie** $2A\cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$**.**

Częstość modulacji amplitudy: $\omega_A = \left|\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right|$.

Jeżeli różnica częstości $|\omega_1 - \omega_2|$ **jest mała, to można zaobserwować powolne narastanie i zmniejszanie się amplitudy – są to dudnienia.**

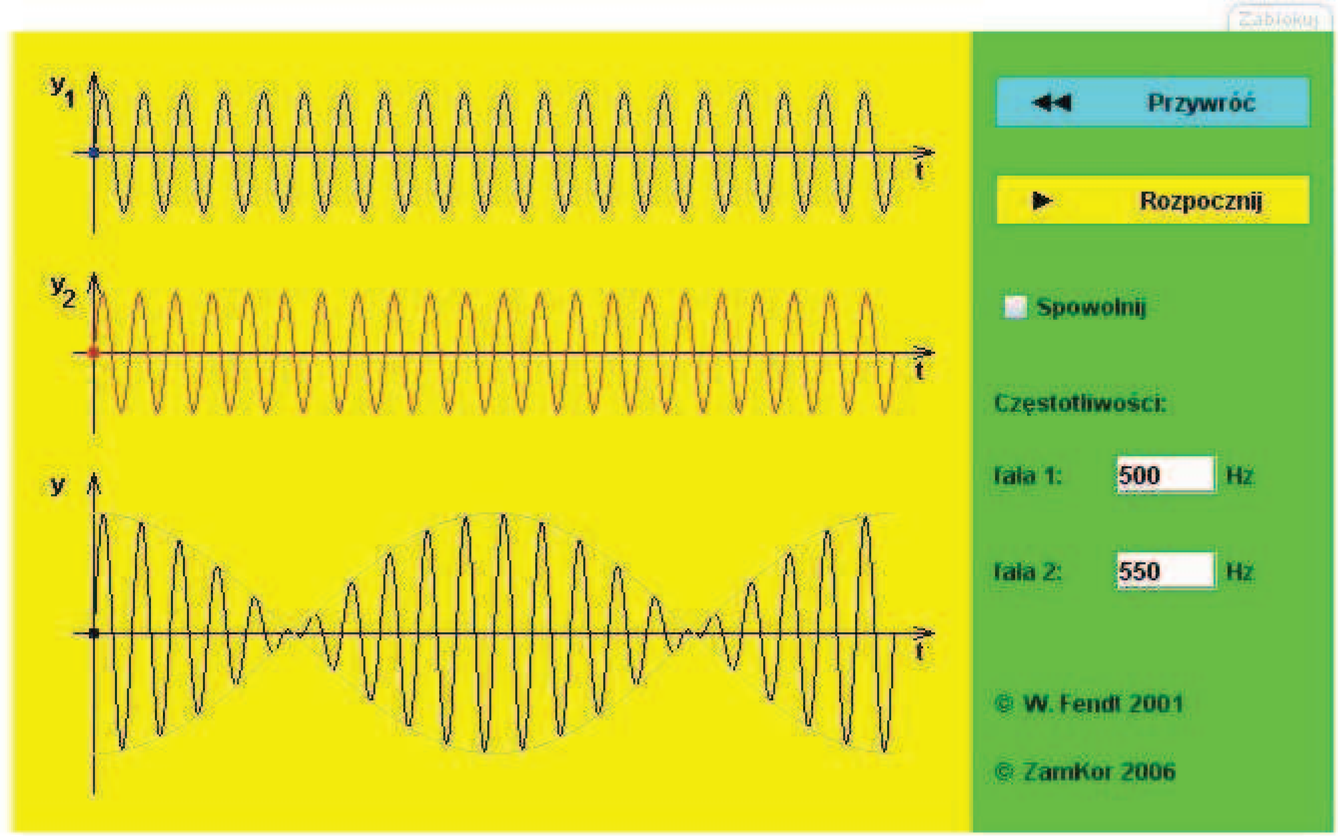
Okres modulacji amplitudy: $T_A = \dfrac{2\pi}{\omega_A}$**.**

Odbiór sygnału jest związany z przekazem energii: $E \propto A^2$

W okresie czasu T_A **moduł amplitudy 2 razy osiąga maksimum.**

Okres dudnień: $T_D = \frac{1}{2}T_A$ **.**

Słyszalność dudnień: $f_D = \dfrac{1}{T_D} \leq 7$ **Hz**



http://www.walter-fendt.de/ph14pl/beats_pl.htm