Drgania tłumione

Siły oporu w gazach i cieczach (dla małych prędkości)

$$\vec{\mathbf{F}} = -\gamma\, \vec{\mathbf{v}}$$

Równanie ruchu harmonicznego z tłumieniem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}$$

definiujemy

częstość drgań własnych nietłumionych $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

współczynnik tłumienia $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu, zwyczajne, o stałych współczynnikach

Szkic rozwiązania

podstawiamy $x = e^{\alpha t}$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\beta\alpha\, e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$ **równanie charakterystyczne**

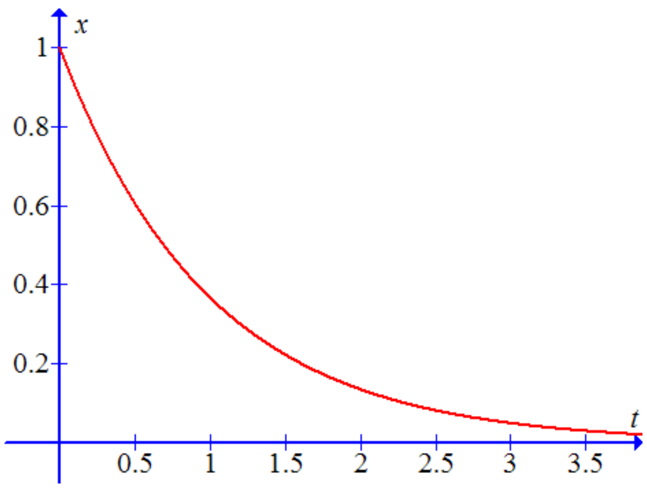
$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$

I. $\Delta \rangle 0$

$$\alpha_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

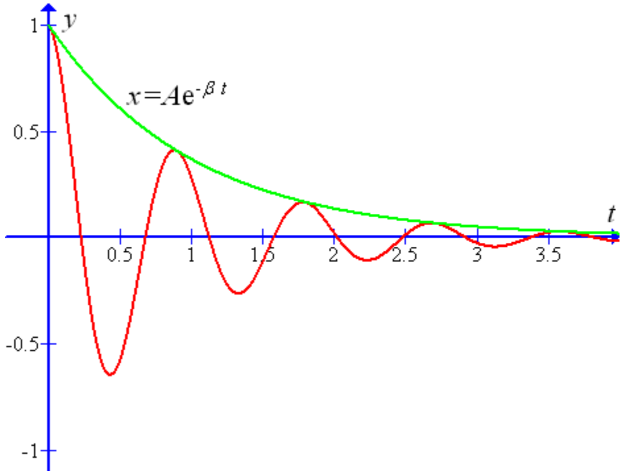


ruch aperiodyczny

II. $\Delta \langle 0$ **- procedura rozwiązania wymaga liczb zespolonych**

definiujemy $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$**, a stąd** $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta)$$



ruch pseudoperiodyczny (pseudookresowy)

pseudookres $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

logarytmiczny dekrement tłumienia – logarytm naturalny stosunku dwóch amplitud w czasach t **i** $t + T$

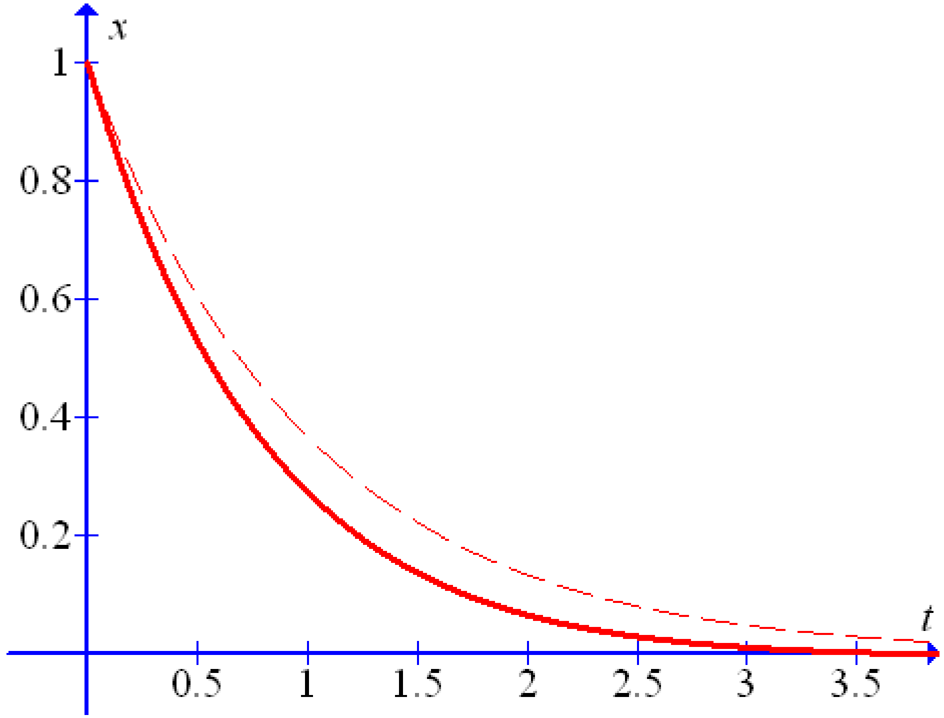
$$\lambda = \ln \frac{A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta)}{A\mathrm{e}^{-\beta (t+T)}\cos(\omega t + \delta)} = \ln \mathrm{e}^{\beta T} = \beta T$$

dobroć $Q = 2\pi \dfrac{\textit{energia zmagazynowana}}{\textit{średnia energia tracona w 1 okresie}} = \dfrac{\omega}{2\beta} = \dfrac{2\pi}{2\beta T} = \dfrac{\pi}{\lambda}$

III. $\Delta = 0$

wtedy $\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta$

$$x(t) = (A_1 + A_2\, t)\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}$$



ruch krytyczny jest przypadkiem granicznym – jest najszybciej gasnącym ruchem aperiodycznym, jest ważny dla techniki

Drgania wymuszone

Równanie ruchu harmonicznego z tłumieniem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

uzupełniamy dodając siłę zewnętrzną zależną od czasu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + f(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Rozważmy siłę harmoniczną

$$f(t) = F\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a\cos\omega t$$

równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu, zwyczajne, o stałych współczynnikach, niejednorodne

Szkic rozwiązania

Twierdzenie: kompletne rozwiązanie takiego równania jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

to

$$x_j(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \quad \textbf{lub} \quad x_j(t) = A e^{-\beta t}\cos(\omega_j t + \delta) \quad \textbf{lub} \quad x_j(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t};$$

Szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego poszukujemy w postaci

$$x_{nj} = A_0\cos(\omega t + \delta)$$

Po wstawieniu, wykonaniu działań i porównaniu obu stron, otrzymujemy

$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego zmierza wykładniczo do zera.

Zostaje tylko

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Wnioski:

1. **Ruch wymuszony przez siłę harmoniczną jest ruchem harmonicznym prostym o tej samej częstości kołowej ω**
2. **Amplituda i przesunięcie fazowe są jednoznacznie określone przez parametry siły wymuszającej i właściwości układu drgającego.**

Zbadajmy zależność A_0 i δ od ω.

Można pokazać, że $f(\omega)$ pod pierwiastkiem ma minimum ⇒ A_0 ma maksimum w tym punkcie

$$f(\omega) = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

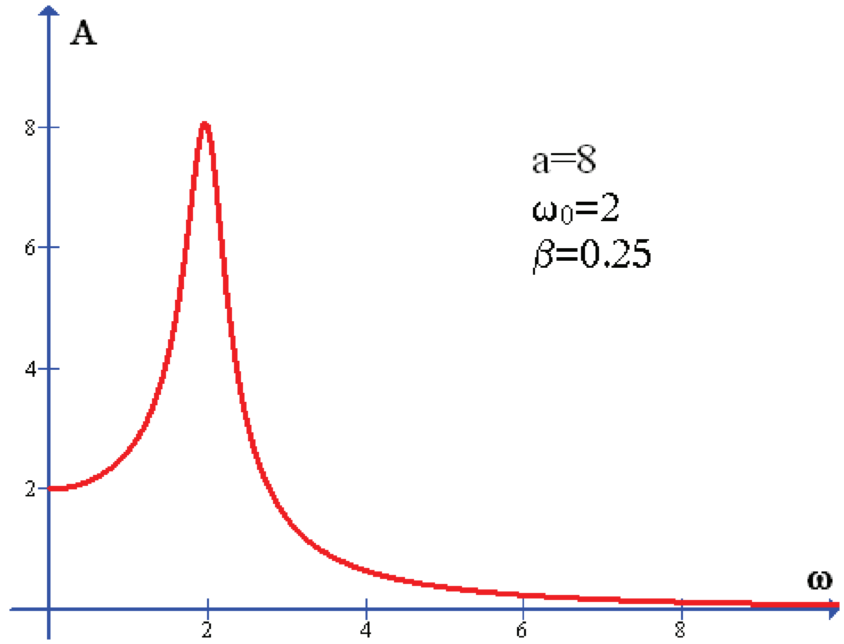
$$f'(\omega) = -2\omega \cdot 2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\beta^2\omega$$

$$f'(\omega) = 0$$

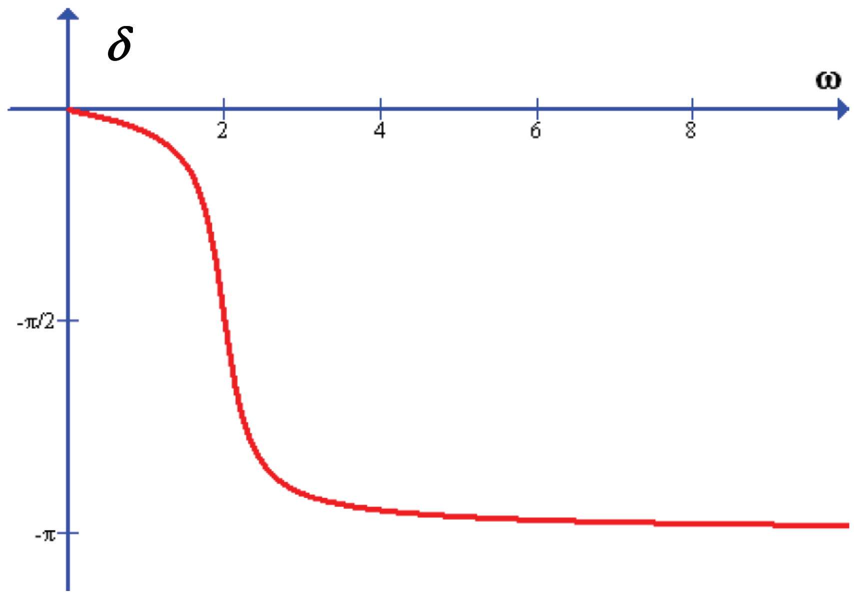
$\omega = 0$ **odrzucamy**

$\omega_{\mathrm{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ **częstość rezonansowa**

Jeżeli $\omega_0^2 < 2\beta^2$ to funkcja $A_0(\omega)$ istnieje, ale nie ma maksimum (poza $\omega=0$).

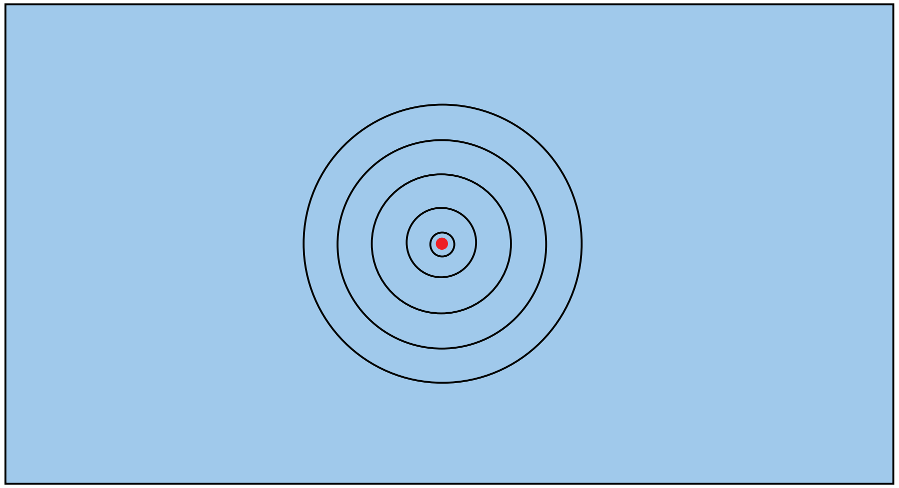


rezonans amplitudy

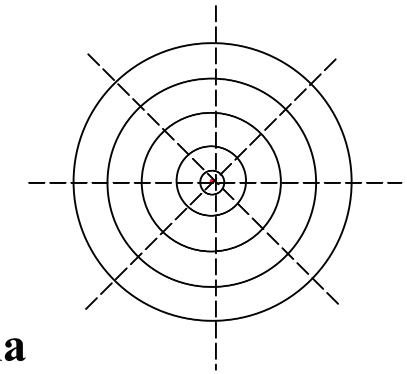


przesunięcie fazowe

Ruch falowy



Fala – zaburzenie wywołane w jednym punkcie ośrodka, które rozchodzi się w każdym dopuszczalnym kierunku.



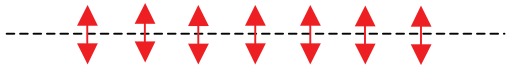
Definicje:

- **promień fali – kierunek rozchodzenia się fali**
- **powierzchnia falowa – powierzchnia, na której cząstki zaburzonego ośrodka są w tym samym stanie**
- **czoło fali – miejsce geometryczne punktów, do których właśnie dotarła fala**

Jeżeli pierwotne zaburzenie jest drganiem harmonicznym $\Rightarrow$ fala harmoniczna.

Podział fal:

- poprzeczne – drgania prostopadłe do promienia fali (w ośrodkach wykazujących sztywność)



- podłużne – drgania równoległe do promienia fali (możliwe w każdym ośrodku)

Inny podział fal:

- płaskie – powierzchnie falowe są płaszczyznami
- kuliste – powierzchnie falowe są sferami (powierzchniami kul)

Znane pojęcia z ruchu harmonicznego przenoszą się na fale harmoniczne:

- A – amplituda
- ω - częstość kołowa
- f – częstość (ilość drgań na sekundę)
- T – okres
- δ - faza początkowa
- $\omega t+\delta$ - faza fali

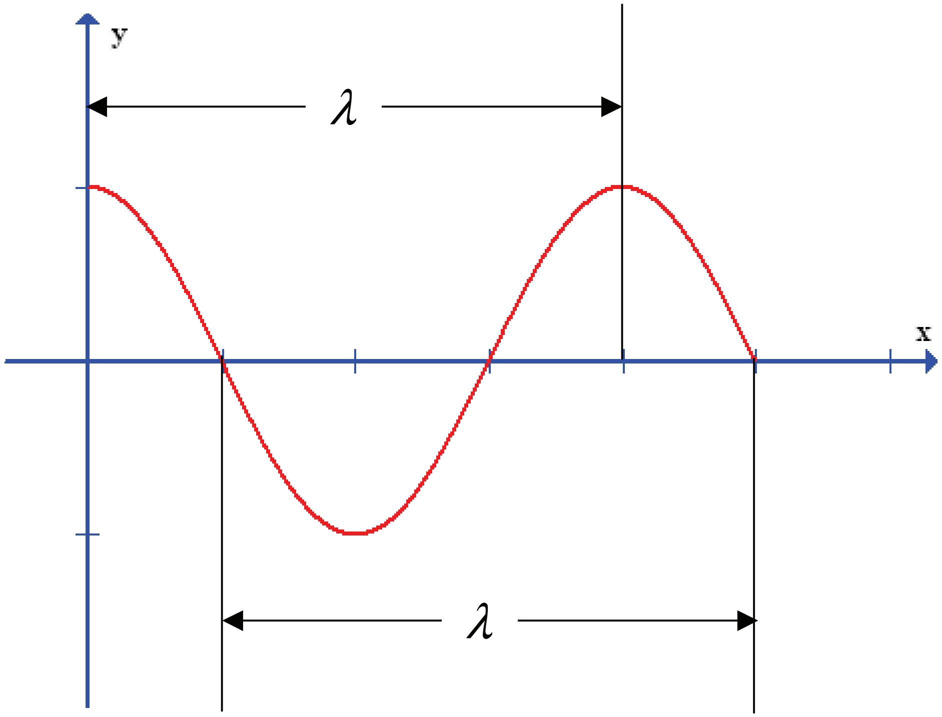
Nowe pojęcia:

- λ – długość fali: najmniejsza odległość między dwoma punktami o tej samej fazie;
- v – prędkość fali: prędkość przemieszczania się powierzchni falowej;

Uwaga: tak zdefiniowana prędkość nosi nazwę prędkości fazowej, v_f , jest to prędkość przemieszczania się powierzchni stałej fazy.

Równanie fali płaskiej harmonicznej

Rozważmy zaburzenie harmoniczne $y = A\cos\omega\, t$ **w punkcie** $x = 0$**.**
Załóżmy możliwość rozchodzenia się zaburzenia tylko wzdłuż osi x**.**



Zaburzenie dociera do punktu x **z opóźnieniem** $\Delta t = \dfrac{x}{v}$**, gdzie** $v = \dfrac{\lambda}{T}$**.**

W punkcie x **mamy:** $y = A\cos\omega\, t'$**, gdzie** $t' = t - \Delta t$

$$y = A\cos\omega\left(t - \Delta t\right)$$

$$y = A\cos\left(\omega\, t - \omega\, \Delta t\right)$$

$$y = A\cos\left(\omega\, t - \omega\frac{x}{v}\right)$$

$$y = A\cos\left(\omega\, t - \frac{\omega}{v}x\right)$$

$$y = A\cos\left(\omega\, t - \frac{\omega T}{\lambda}x\right)$$

$$y = A\cos\left(\omega\, t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

definicja: liczba falowa $k = \frac{2\pi}{\lambda}$**;**

pożyteczne wzory: $k = \frac{\omega}{v}$, $v = \frac{\omega}{k}$, $\omega = k\, v$

$y = A\cos\left(\omega\, t - k\, x\right)$ **- równanie fali płaskiej, biegnącej w kierunku dodatnim osi** x

$y = A\cos\left(\omega\, t + k\, x\right)$ **- równanie fali płaskiej, biegnącej w kierunku ujemnym osi** x

inna postać:

$$y = A\cos\left(\omega\, t - k\, x\right) = A\cos\left(k\, x - \omega\, t\right) = A\cos\left(k\, x - kv\, t\right) = A\cos k\left(x - v\, t\right)$$

ogólne równanie fali płaskiej

$y(x,t) = f(x - v\, t) + g(x + v\, t)$, **gdzie** f, g **- dowolne funkcje**