

Ruch falowy w przestrzeni 3-wymiarowej

wektor falowy:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \text{ gdzie } \vec{n} \text{ jest wektorem jednostkowym, normalnym do powierzchni falowej}$$

równanie fali kulistej

$$u(\vec{\mathbf{R}}, t) = A(\vec{\mathbf{R}}) \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{R}})$$

w szczególności, gdy fala rozchodzi się z punktu $\vec{0}$

$$u(R, t) = \frac{A}{R} \cos(\omega t - kR).$$

Gdy źródło fali jest liniowe (nieskończenie długa struna lub szczelina)

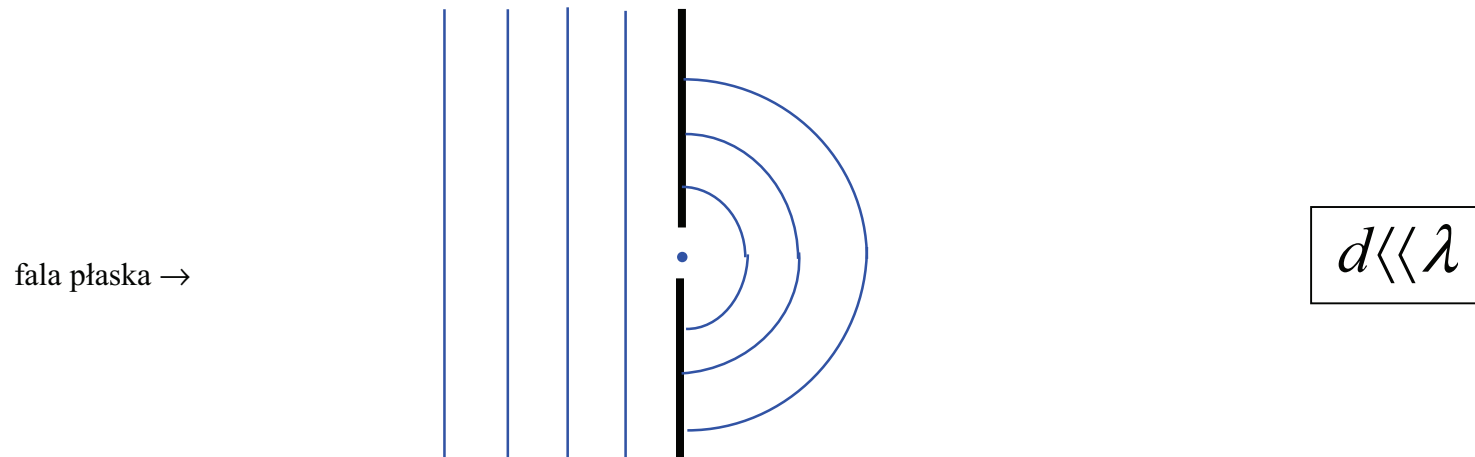
$$u(R, t) = \frac{A}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR)$$

– jest to równanie fali cylindrycznej.

Zasady rządzące rozchodzeniem się fal

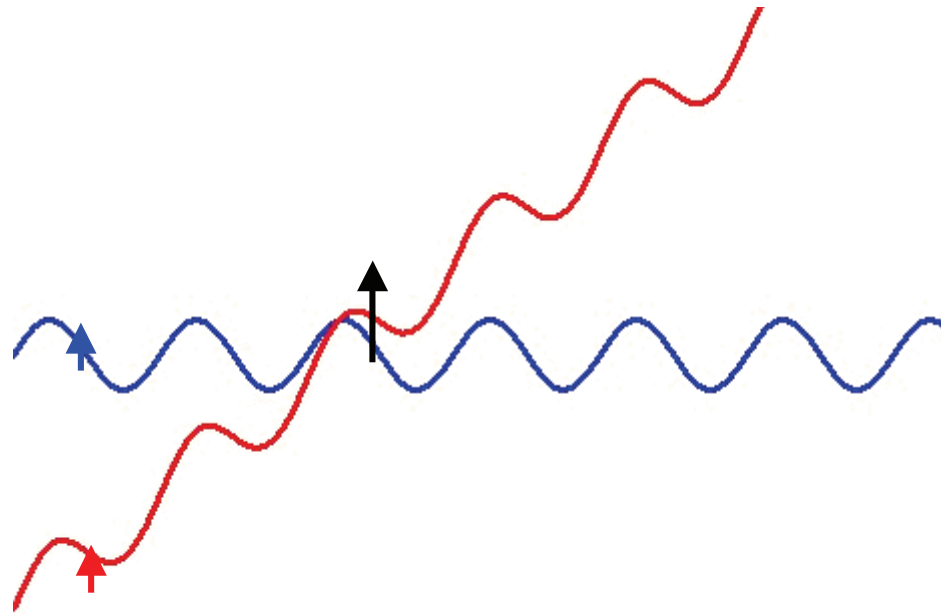
- **Zasada Huygensa**

obserwacja:



Każdy punkt ośrodka, do którego dotarła fala, staje się źródłem nowej fali kulistej.

- **Zasada superpozycji**

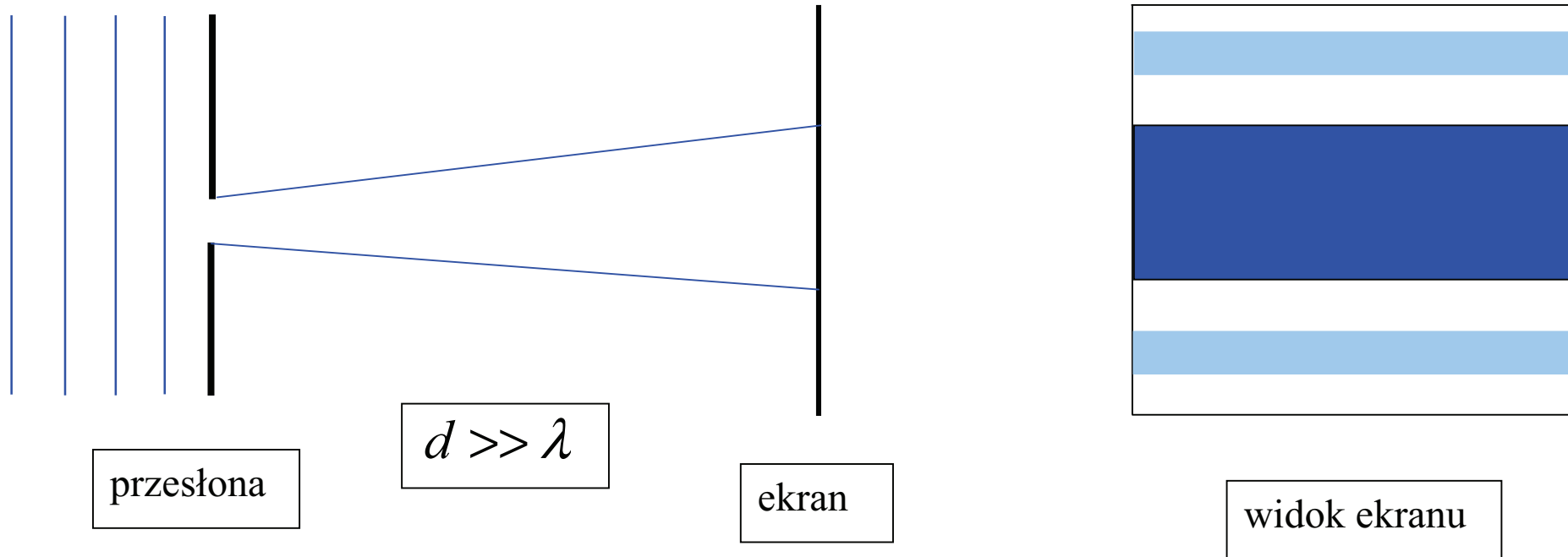


1. **Zaburzenia falowe rozchodzą się niezależnie (tzn. nie oddziałują na siebie wzajemnie).**
 2. **Wychylenie cząstki drgającej w danym punkcie i w danej chwili czasu jest sumą wektorową poszczególnych wychyleń.**
- (jest to tzw. przybliżenie liniowe, które może nie być spełnione, np. dla dużych energii fal)**

Stosując te zasady, można skonstruować kształt powierzchni falowej po przejściu przez różne otwory i przesłony. Można przewidzieć i opisać zjawiska dyfrakcji i interferencji.

Dyfrakcja

**obserwacja: obraz otworu jest zawsze większy od samego otworu;
wniosek: fala ugina się na przeszkodzie (dyfrakcja = ugięcie)**



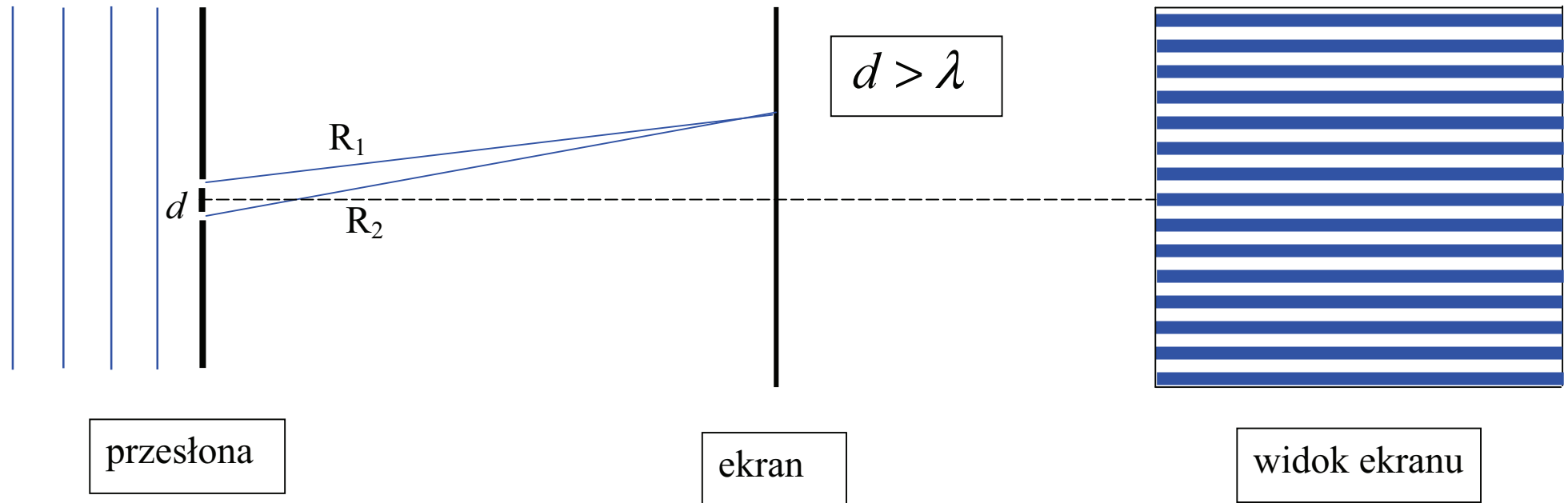
Matematyczna teoria dyfrakcji jest skomplikowana.

Obraz na ekranie zależy od stosunku d/λ oraz od odległości ekranu od przesłony.

Obraz powstaje wskutek interferencji bardzo wielu promieni.

Interferencja

obserwacja: obraz z dwóch otworów składa się z naprzemiennych maksimum i minimum;
wniosek: zachodzi superpozycja fal



R_1 i R_2 to są wybrane promienie (schodzące się w tym samym punkcie).

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t - kR_1) + A \cos(\omega t - kR_2) = 2A \cos \frac{k(R_1 - R_2)}{2} \cos \left(\omega t - k \frac{R_1 + R_2}{2} \right)$$

Amplituda fali wypadkowej zależy od różnicy faz $\Delta\varphi = k(R_1 - R_2)$

Jeżeli $\Delta\varphi = 0$ lub $\pm 2n\pi$ to mamy maksimum amplitudy.

Jeżeli $\Delta\varphi = \pi$ lub $\pm (2n+1)\pi$ to mamy minimum amplitudy

Doświadczenie Younga (ok. 1800 r.)

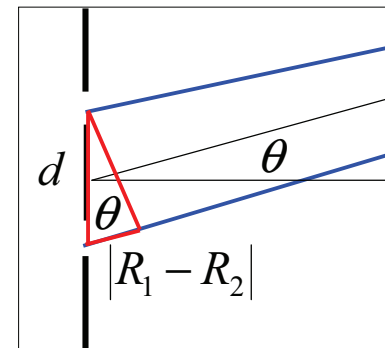
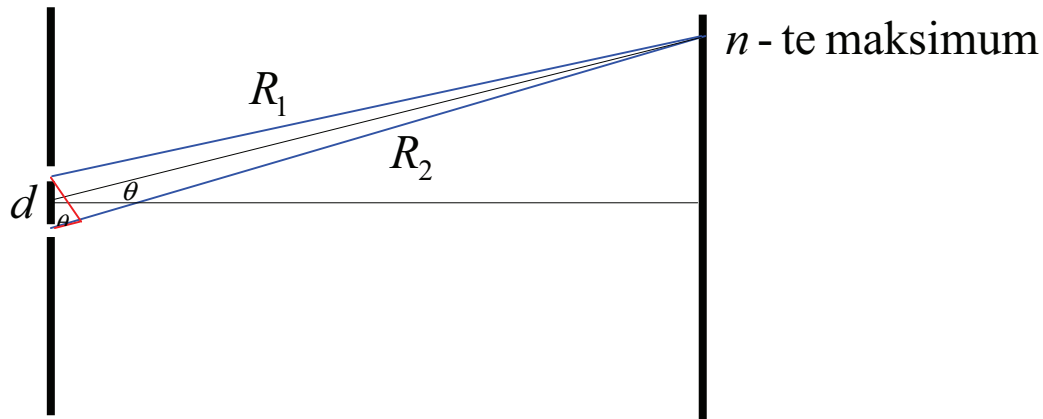
wyznaczenie długości fali świetlnej

Różnica faz jest równoważna odpowiedniej różnicy dróg:

$$\Delta\varphi = k(R_1 - R_2)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(R_1 - R_2)$$

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{R_1 - R_2}{\lambda} \Rightarrow \text{maksimum amplitudy gdy } |R_1 - R_2| = n\lambda$$



$$|R_1 - R_2| = d \sin \theta$$

$$d \sin \theta = n\lambda$$

Dowód, że światło jest falą i jednocześnie metoda wyznaczenia długości fali: $0,38 \div 0,76 \mu\text{m}$.

Ważne: obraz jest stabilny, jeżeli światło jest spójne, tzn. ma tę samą częstość i stałą różnicę faz.

Fala stojąca

powstaje wskutek interferencji 2 fal płaskich o tych samych ω i A , biegnących wzdłuż tej samej prostej, ale w przeciwnych kierunkach

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

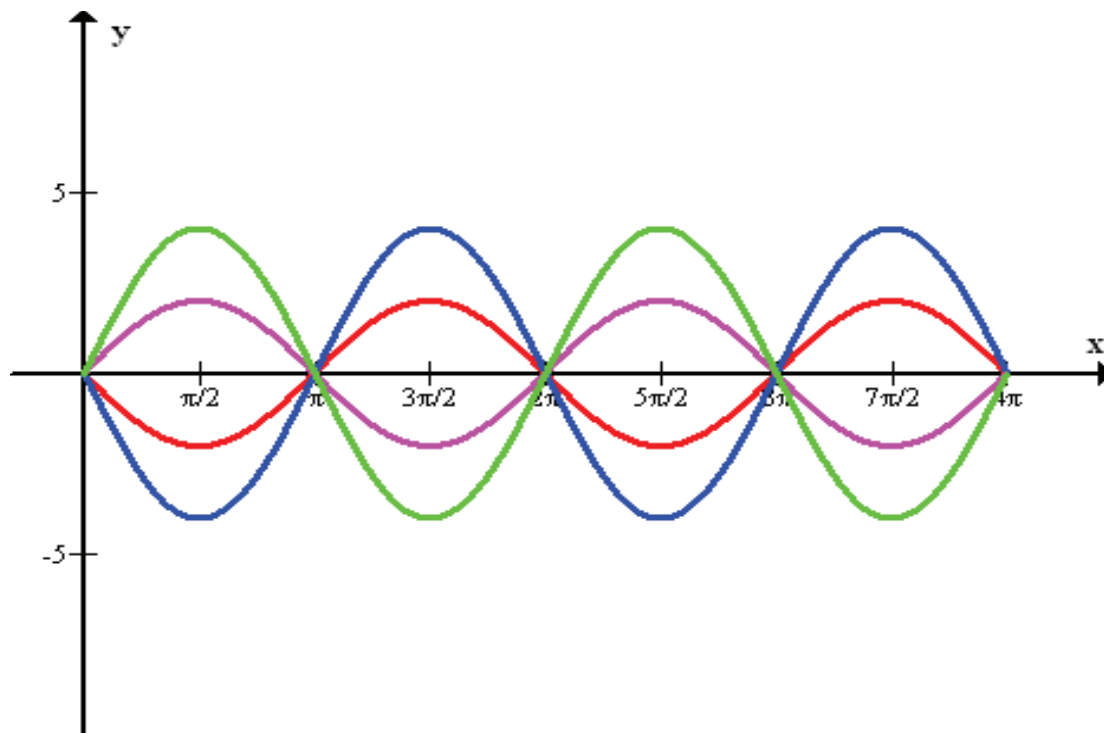
Lokalnie jest to drganie harmoniczne

$$y = A_w \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{z amplitudą } A_w = 2A \left| \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \right|$$

węzły: miejsca, gdzie $A_w = 0$

strzałki: miejsca, gdzie $A_w = 2A$

Przykładowy obraz fali stojącej ($k = 1$, $\varphi = \pi$):



Fala stojąca najczęściej powstaje wskutek interferencji fali padającej z falą odbitą.

Zmiany fazy przy odbiciu:

$\varphi = 0$ odbicie od końca swobodnego - w miejscu odbicia powstaje strzałka

$\varphi = \pi$ odbicie od końca nieswobodnego - w miejscu odbicia powstaje węzeł

Odległości między sąsiednimi strzałkami lub sąsiednimi węzłami: $\frac{1}{2} \lambda$

Odległość od strzałki do najbliższego węzła: $\frac{1}{4} \lambda$

Transport energii w ruchu falowym

Równanie fali płaskiej

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

Rozważmy element objętości ośrodka ΔV o masie $m = \rho \Delta V$ gdzie ρ - gęstość ośrodka

Energia całkowita takiego elementu

$$E_c = E_k + E_p$$

Energia kinetyczna - związana jest z ruchem środka masy rozpatrywanego elementu ΔV .

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$m = \rho \Delta V$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = -A \omega \sin(\omega t - kx)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

Energia potencjalna - związana jest z odkształceniem rozpatrywanego elementu ΔV .

Wynik jest identyczny

$$E_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

czyli

$$E_k = E_p$$

a stąd

$$E_c = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

Energia w wybranym dowolnie elemencie objętości nie jest stała – mamy przepływ energii.

Gęstość energii:

$$\varepsilon = \frac{E_c}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

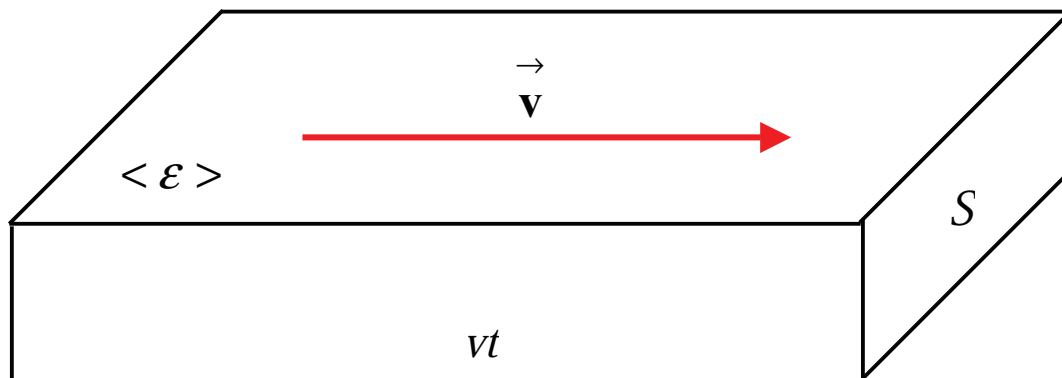
Średnia gęstość energii:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

ponieważ

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Rozważmy strumień energii – energię przepływającą przez powierzchnię S prostopadłą do promienia fali w jednostce czasu



jej średnia wartość: $\langle E \rangle = \langle \epsilon \rangle (vt) S$

moc średnia: $\langle P \rangle = \frac{\langle E \rangle}{t} = \langle \epsilon \rangle v S$

natężenie to strumień na jednostkę powierzchni: $I = \frac{\langle P \rangle}{S} = \langle \epsilon \rangle v$

jednostka: $1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Definiujemy wektor Poyntinga:

$$\vec{\Pi} = \langle \epsilon \rangle \vec{v}$$

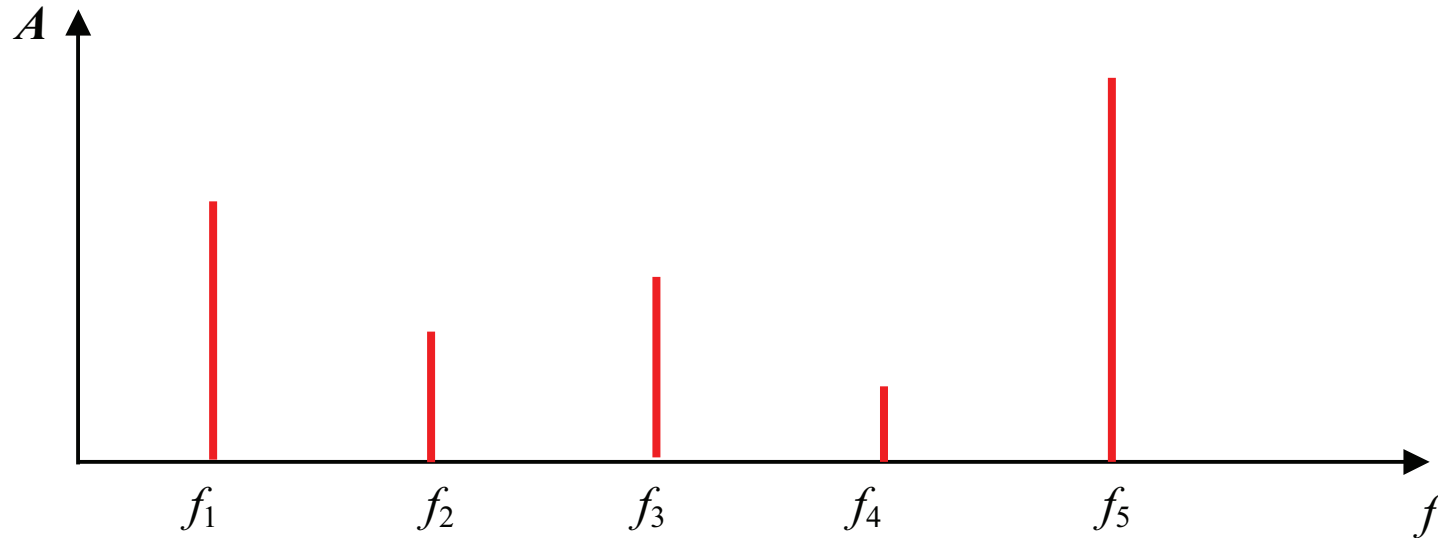
Charakteryzuje on szybkość przepływu energii w polu falowym, ponieważ

$$|\vec{\Pi}| = I$$

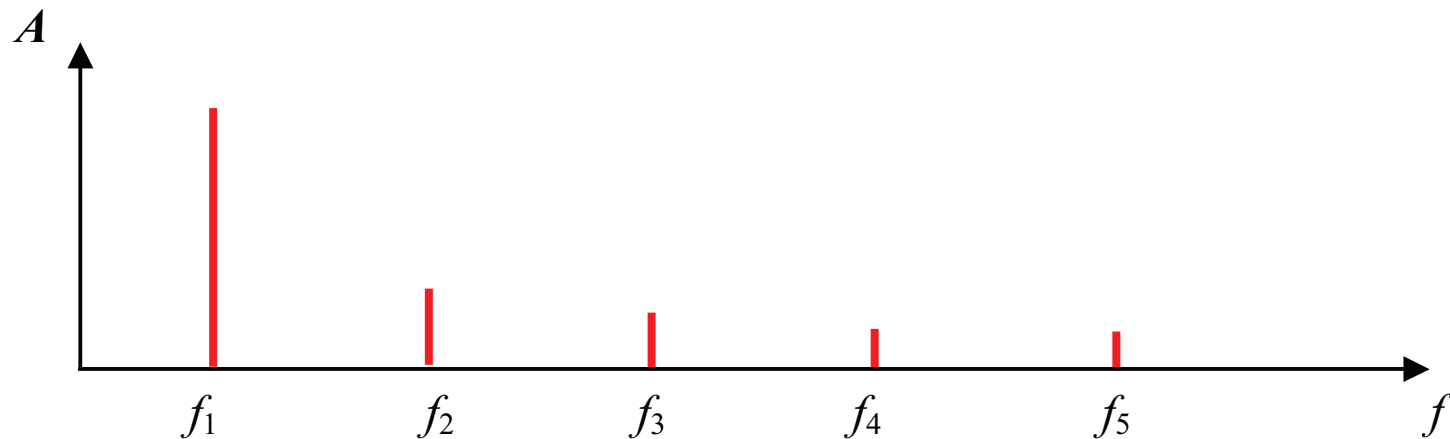
Widmo (spektrum)

jest to zbiór składowych harmonicznnych fali złożonej.

Widmem nazywamy też graficzne przedstawienie tego zbioru (zależność amplitudy od częstotliwości)



widmo dźwięku emitowanego przez strunę skrzypiec



widmo dźwięku emitowanego przez strunę fortepianu

Twierdzenie Fouriera (rozkład Fouriera)



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
(źródło: Internet)

Jeżeli dana jest funkcja $g(t)$, ciągła i okresowa o okresie T , to można przedstawić ją w postaci szeregu Fouriera

$$s_N(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega t),$$

który jest do niej zbieżny, tzn.

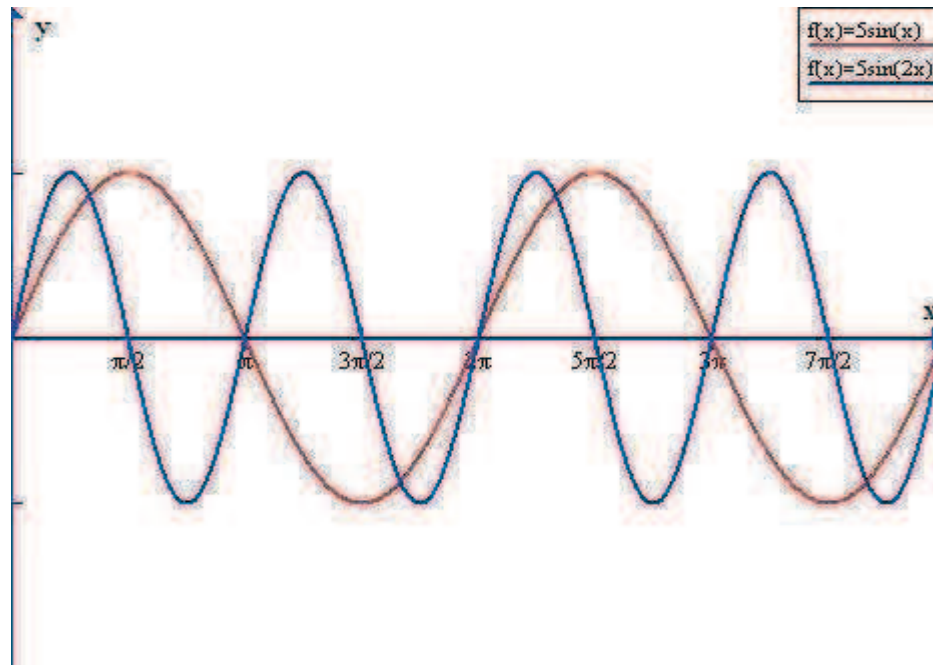
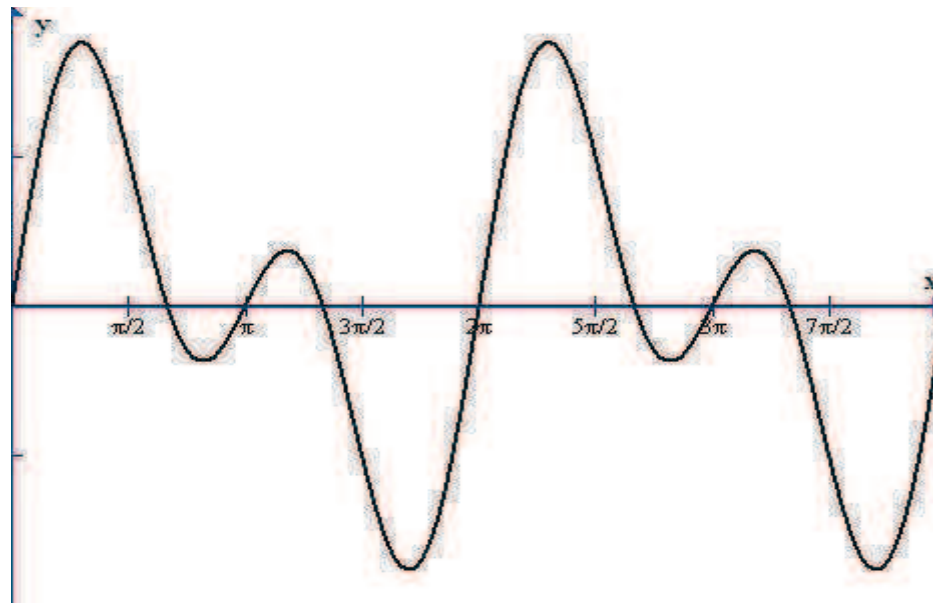
$$s_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(t),$$

przy czym współczynniki Fouriera:

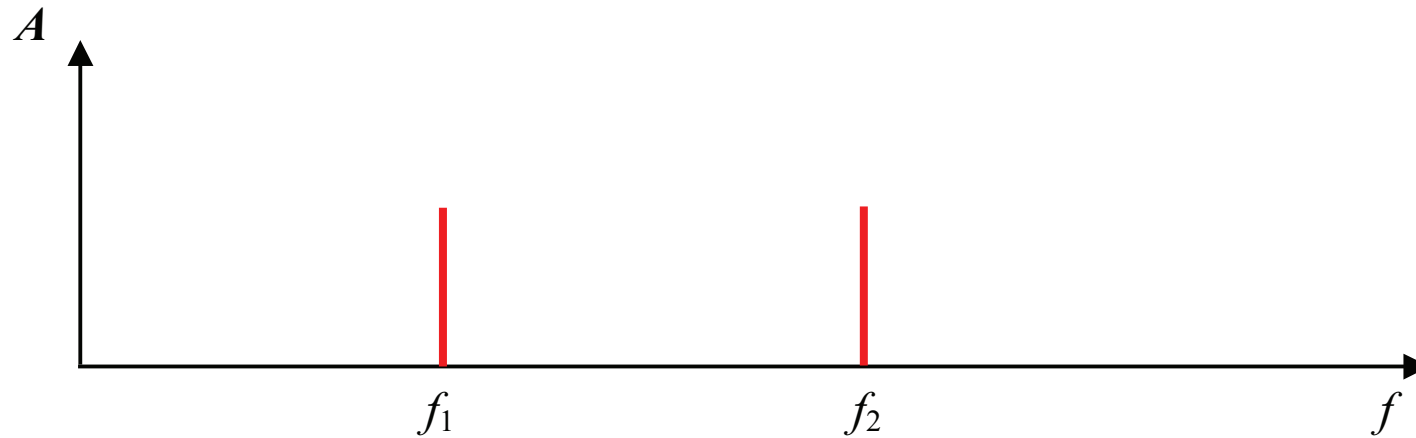
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(n\omega t) dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Współczynniki Fouriera wyznaczają widmo (analiza fourierowska).

Przykład



stąd widmo:



Twierdzenie Fouriera ma duże znaczenie poznawcze:

- **rozumiemy dlaczego ucho ludzkie rozpoznaje znajome głosy**
- **możemy stosować naszą wiedzę o falach i drganiach harmonicznym do wszelkich drgań i fal**

Twierdzenie Fouriera ma również ważne zastosowania techniczne:

- **telefon komórkowa**
- **technologia MP3**