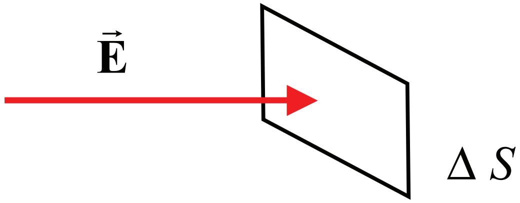
Strumień pola elektrycznego

definicja

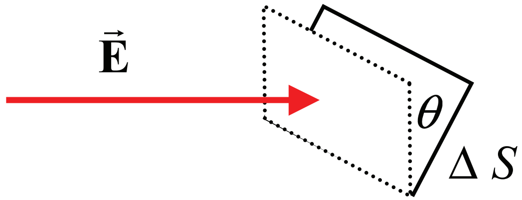
I.

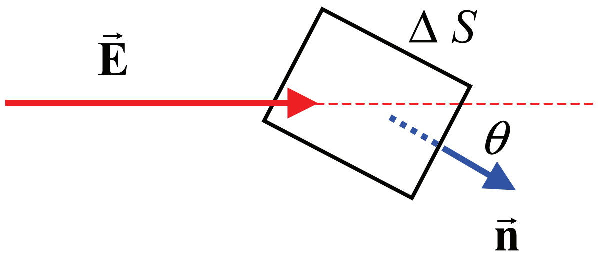


$$\Delta\Phi = E\,\Delta S\,, \qquad \vec{\mathbf{E}} \perp \Delta S$$

II.

$$\Delta\Phi = E\,\Delta S\cos\theta$$





$$|\,\vec{\mathbf{n}}\,| = 1$$

$$\Delta\vec{\mathbf{S}} \equiv \vec{\mathbf{n}}\,\Delta S$$

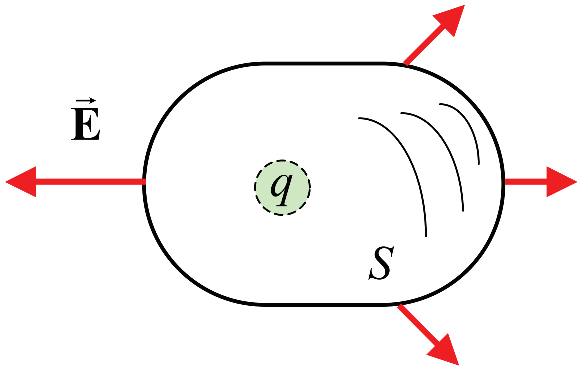
$$\Delta\Phi = \vec{\mathbf{E}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{S}}$$

III. dla dowolnej, np. zakrzywionej powierzchni:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \vec{\mathbf{E}}_i\cdot\Delta\vec{\mathbf{S}}_i \rightarrow \int_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{S}}, \text{ a więc}$$

$$\boxed{\Phi_{\mathbf{E}} = \int_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{S}}}$$

Prawo Gaussa



$$\boxed{\varepsilon_0 \oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = q}$$

lub równoważnie

$$\boxed{\varepsilon_0 \Phi_{\mathbf{E}} = q}$$

Strumień natężenia pola elektrycznego, przechodzący przez dowolną powierzchnię <u>zamkniętą</u> (pomnożony przez ε_0), jest równy całkowitemu ładunkowi zawartemu wewnątrz tej powierzchni.

$q = \sum_i q_i$ **, gdzie** q_i **- ładunki z ich znakami**

lub

$q = \iiint_V \rho(x,y,z)\, dV$ **, gdzie** ρ **- gęstość ładunku,** V **- objętość wewnątrz powierzchni** S **.**

<u>Prawo Gaussa jest jednym z czterech podstawowych praw elektromagnetyzmu.</u>

Postać różniczkowa prawa Gaussa

$$\varepsilon_0 \oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = q$$

$$\varepsilon_0 \oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \rho \, dV$$

twierdzenie rachunku całkowego:

$$\oint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} \, dV$$

definicja dywergencji:

$$\mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

podstawienie:

$$\varepsilon_0 \int_V \mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} \, dV = \int_V \rho \, dV$$

$$\int_V \varepsilon_0 \, \mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} \, dV = \int_V \rho \, dV$$

$$\int_V \left(\varepsilon_0 \, \mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} - \rho \right) dV = 0$$ **<u>dla każdego V</u>, a stąd**

$$\varepsilon_0 \, \mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} - \rho = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Można wykazać, że

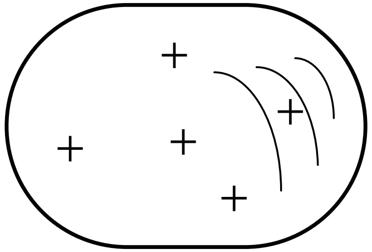
prawo Gaussa i prawo Coulomba są równoważne

(dowód pomijamy).

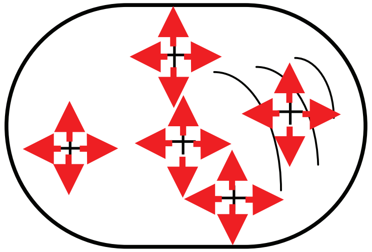
Natomiast udowodnimy, że

ładunek wprowadzony na izolowany przewodnik rozmieszcza się wyłącznie na jego powierzchni.

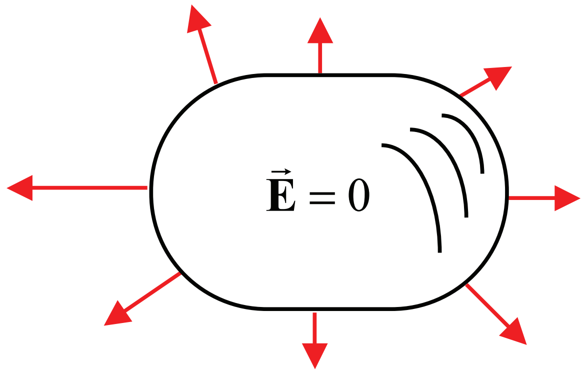
Załóżmy, że najpierw ładunek rozmieszcza się przypadkowo w całej objętości:



Wewnątrz powstaje pole elektryczne



Pole to przesuwa ładunki, aż osiągnięty zostanie stan równowagi (warunki elektrostatyczne).
W takim stanie pola wewnątrz nie ma (E=0). Pole może być co najwyżej na powierzchni i nie może mieć składowej stycznej do powierzchni (bo ta składowa przesuwałaby ładunki).



$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = 0$$

cbdo.

Ten wynik pozwala na doświadczalne potwierdzenie prawa Gaussa, a przez to prawa Coulomba.

Prawo Gaussa pozwala też obliczyć pole $\vec{\mathrm{E}}$ na powierzchni przewodnika:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad E_n \equiv \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$$ **- składowa normalna**

gdzie σ jest gęstością powierzchniową ładunku

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}.$$

Kondensatory

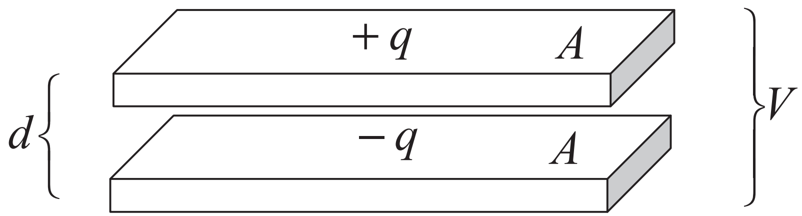
Definicja pojemności przewodnika:

$$C = \frac{q}{V}$$

stosunek ładunku wprowadzonego na przewodnik do wytworzonego potencjału.

Jednostka: 1 farad, $1\ \mathbf{F} = \frac{1\ \mathbf{C}}{1\ \mathbf{V}}$, $1\ \mu\mathbf{F} = 10^{-6}\ \mathbf{F}$, $1\ \mathbf{pF} = 10^{-12}\ \mathbf{F}$

Kondensator: układ co najmniej dwóch przewodników, przedzielonych izolatorem.
Najprostszy kondensator płaski: dwie płytki metalowe, przedzielone izolatorem:



pojemność kondensatora:

$$C = \frac{+q}{V}$$

pojemność kondensatora płaskiego z próżnią (ew. powietrzem) między okładkami:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Fakt doświadczalny: jeżeli między okładkami znajduje się dielektryk (=izolator), to pojemność ulega zwiększeniu

$$C > C_0$$

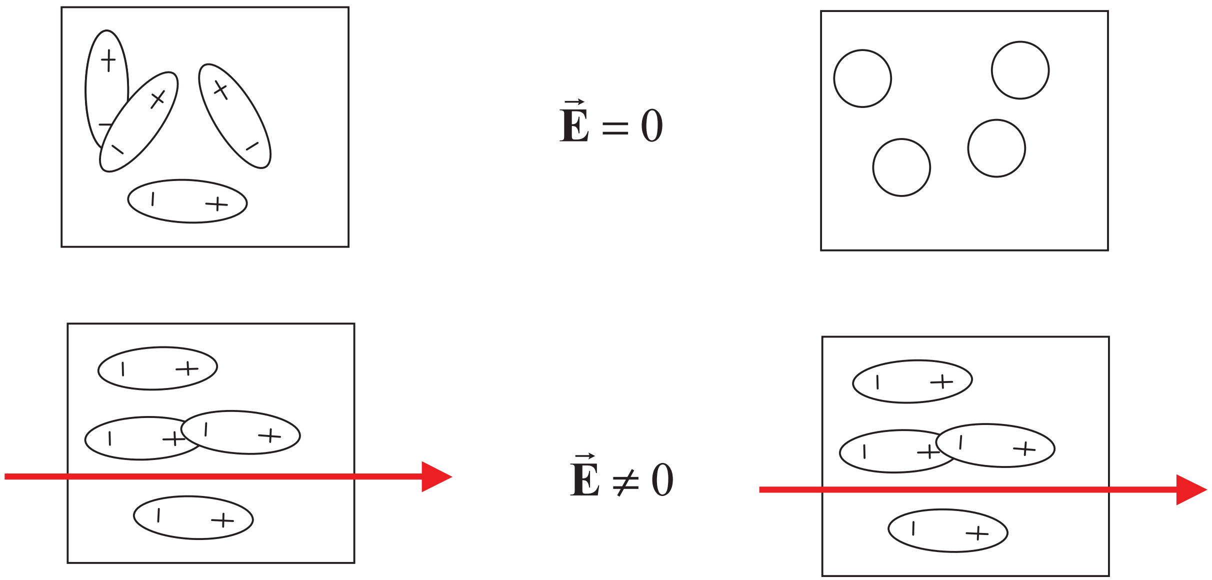
stosunek

$$\kappa = \frac{C}{C_0}$$

nazywamy stałą dielektryczną.
Inne oznaczenie:

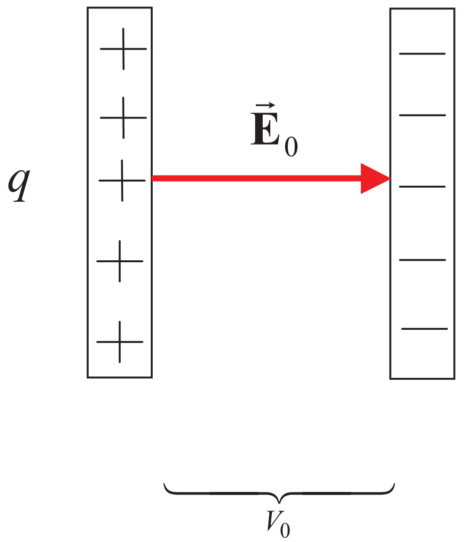
$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

i nazwa: przenikalność elektryczna względna.
Dwa rodzaje dielektryków: polarne i niepolarne

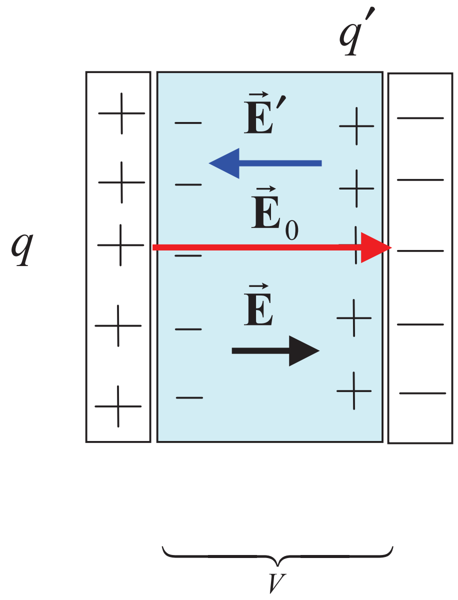


Wyjaśnienie wzrostu pojemności

kondensator próżniowy



kondensator z dielektrykiem



$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 + \vec{\mathbf{E}}'$$

$$E = E_0 - E'$$

$$\kappa = \frac{C}{C_0} = \frac{q}{V} \Big/ \frac{q}{V_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{V_0/d}{V/d} = \frac{E_0}{E}$$

$$E_0 > E \quad \Rightarrow \quad \kappa > 1$$

Prawo Gaussa dla dielektryków

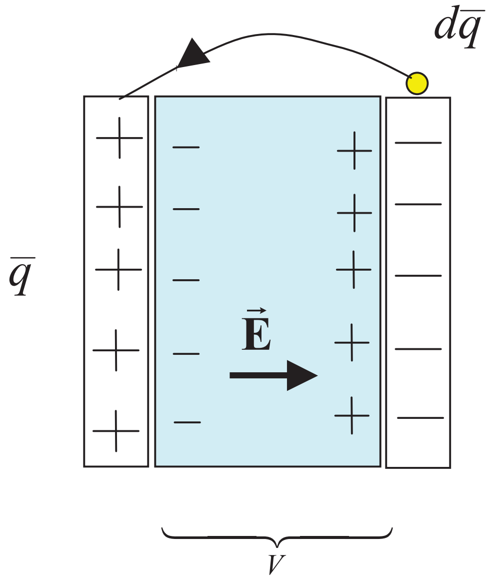
$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = q - q'$$

albo równoważnie

$$\varepsilon_0 \oint_S \kappa\, \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = q$$

Energia pola elektrycznego

Obliczmy pracę ładowania kondensatora



przenosimy ładunek $d\overline{q}$ **z ujemnej okładki na dodatnią, pokonując różnicę potencjałów** V

$dW = V\ d\overline{q}$

$$dW = \frac{\overline{q}}{C}\,d\overline{q}$$

$$W = \int_0^q dW = \int_0^q \frac{\overline{q}}{C}\,d\overline{q} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(CV)^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

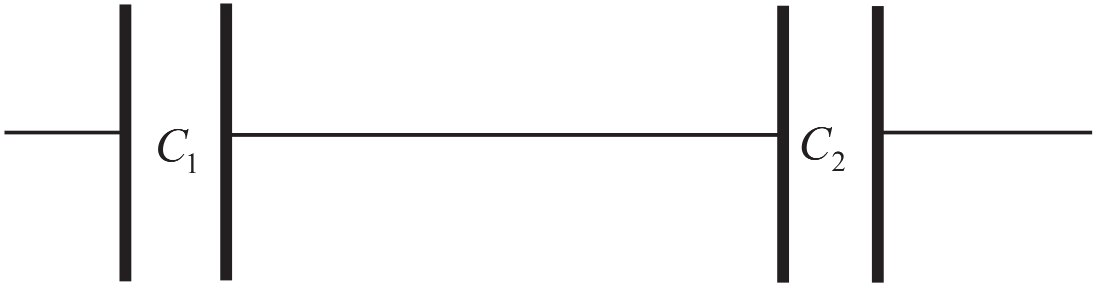
$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

gęstość energii

$$u = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}V^2}{Ad} = \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0 E^2$$

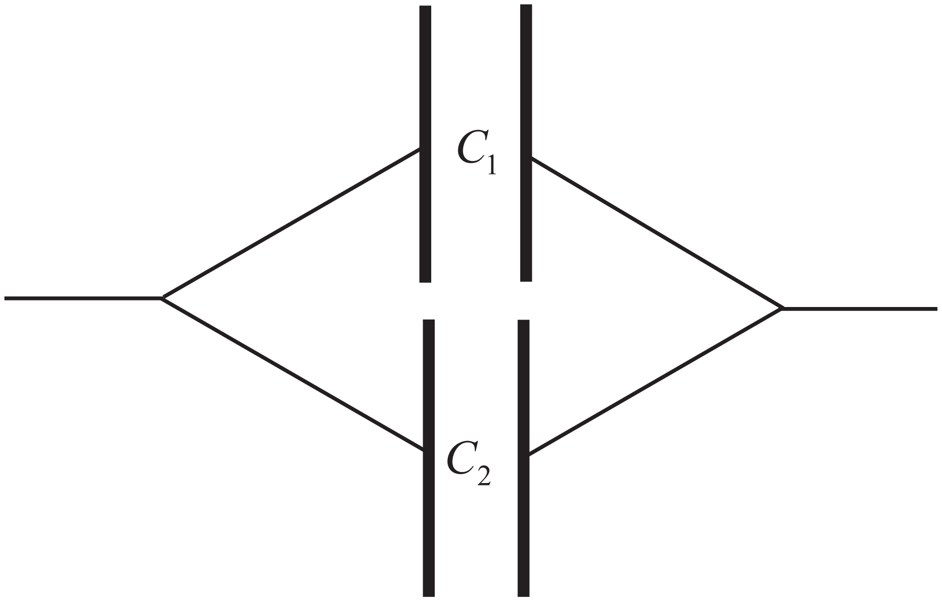
Przypomnienie: łączenie kondensatorów

- **połączenie szeregowe**



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- **połączenie równoległe**



$$C = C_1 + C_2$$