Równanie fali elektromagnetycznej

Z równań Maxwella w postaci różniczkowej wynika znane z mechaniki równanie falowe
Zakładamy próżnię bez ładunków i prądów:

$$\rho = 0, \quad \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}\right) = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\right)$$

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}\right) = -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$$

$$\nabla^2 \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

Biorąc rotację z czwartego równania

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\ \vec{\mathbf{B}}\right) = \mathrm{rot}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right)$$

i wykonując podobne przekształcenia otrzymujemy analogiczny wynik dla $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$

W mechanice ruchu falowego równanie

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

jest ogólnym równaniem fali rozchodzącej się w przestrzeni 3-wymiarowej z prędkością v .

Oznacza to, że zmiany wektorów $\vec{\mathrm{E}}$ i $\vec{\mathrm{B}}$ rozchodzą się w przestrzeni jako fale z prędkością

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A\ m}} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}}} = 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Jest to dokładnie prędkość światła.

Z równań Maxwella (i z doświadczeń) wynika, że zmiany wektorów $\vec{\mathbf{E}}$ i $\vec{\mathbf{B}}$ są ze sobą ściśle powiązane:

jeżeli gdzieś zachodzi lokalna zmiana pola $\vec{\mathbf{E}}$ $\left(\dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \neq 0\right)$, **to w jej otoczeniu powstaje wirowe pole magnetyczne** $\left(\mathrm{rot}\, \vec{\mathbf{B}} \neq 0\right)$**;**

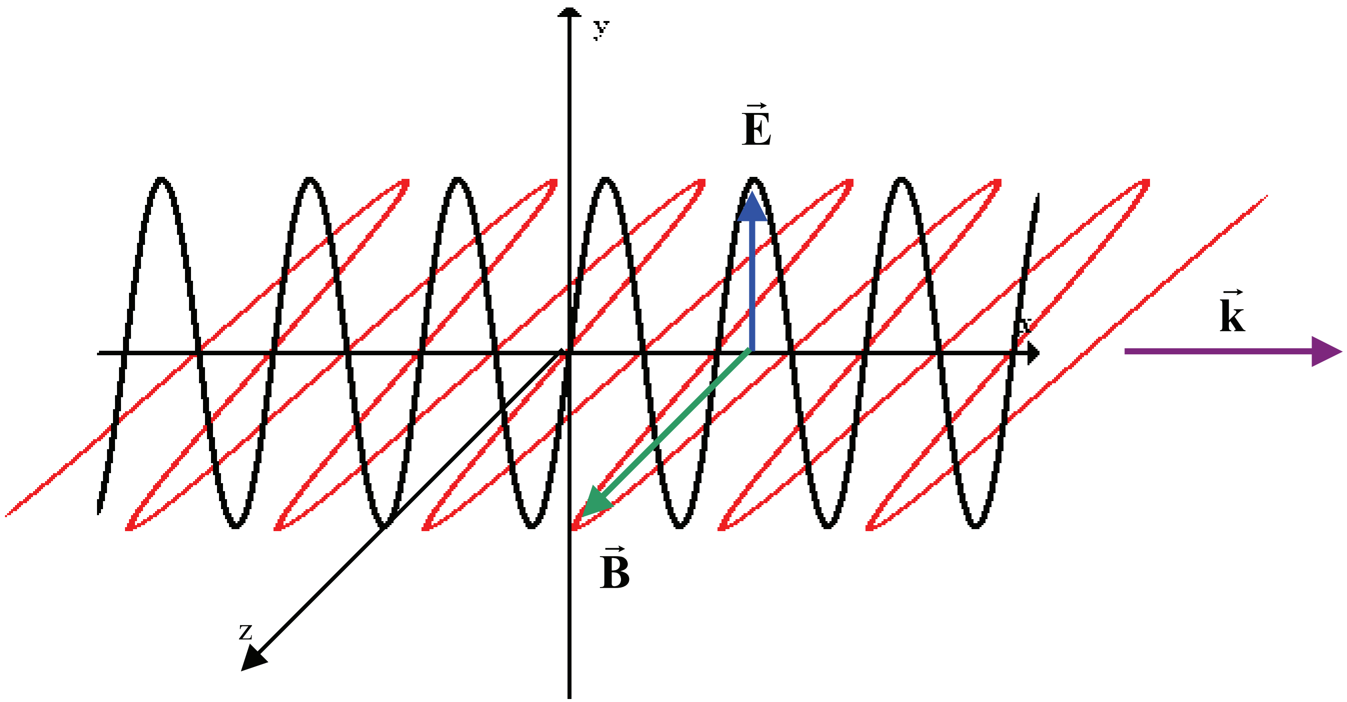
jeżeli to pole $\vec{\mathbf{B}}$ jest zmienne w czasie $\left(\dfrac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \neq 0\right)$**, to w otoczeniu tego punktu powstaje wirowe pole elektryczne** $\left(\mathrm{rot}\, \vec{\mathbf{E}} \neq 0\right)$**.**

Jeżeli rozważymy falę płaską, rozchodzącą się w kierunku wektora $\vec{\mathbf{k}}$, to można ściśle pokazać, że

1. **wektory $\vec{\mathbf{E}}$ i $\vec{\mathbf{B}}$ są prostopadłe do $\vec{\mathbf{k}}$**
2. **wektory $\vec{\mathbf{E}}$ i $\vec{\mathbf{B}}$ są prostopadłe do siebie nawzajem**

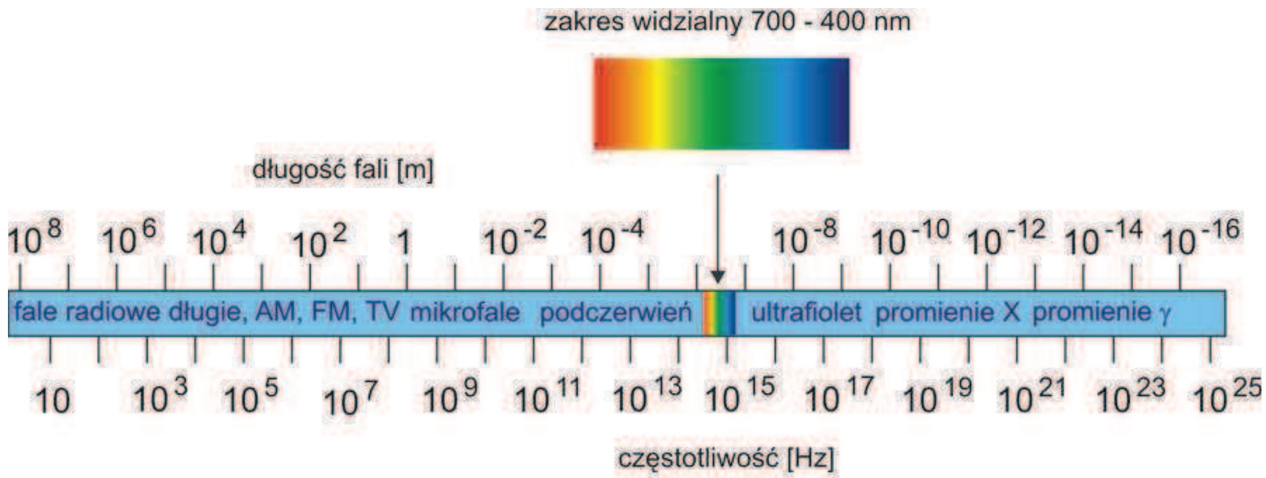
   (wektory $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ tworzą trójkę prawoskrętną, wektor Poyntinga $\vec{\mathbf{S}} = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}\right)$**)**

Wektory $\vec{\mathbf{E}}$ i $\vec{\mathbf{B}}$ tworzą razem falę elektromagnetyczną poprzeczną (podłużna nie istnieje).



Hipoteza Maxwella: światło jest falą elektromagnetyczną.

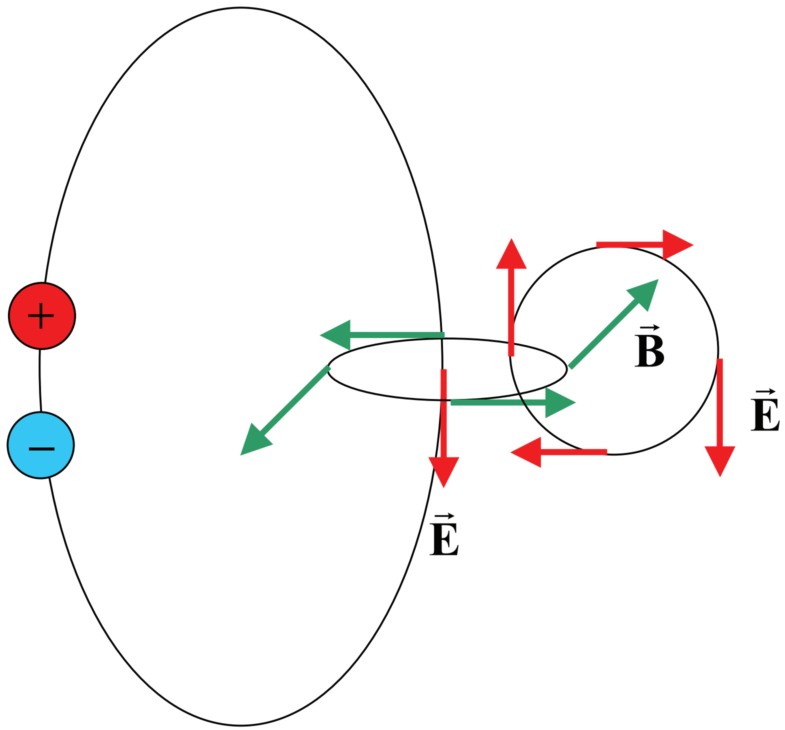
Okazało się, że bardzo wiele innych rodzajów promieniowania, to także fale elektromagnetyczne.



(źródło: http://galaxy.uci.agh.edu.pl/~kakol/wyklady/Fizyka_modul_08.pdf - za zgodą autora)

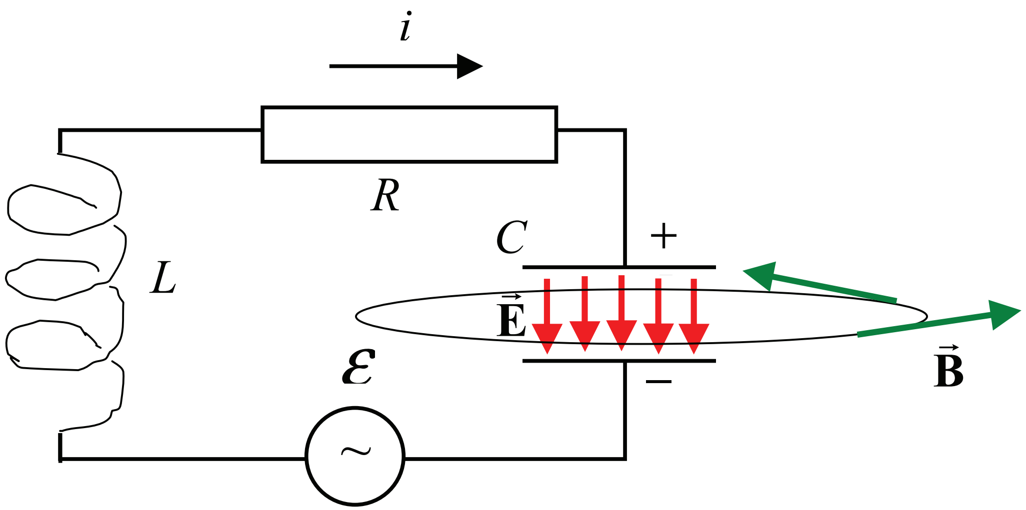
Wytwarzanie fal elektromagnetycznych

Najprostsze źródło fal elektromagnetycznych: drgający dipol elektryczny



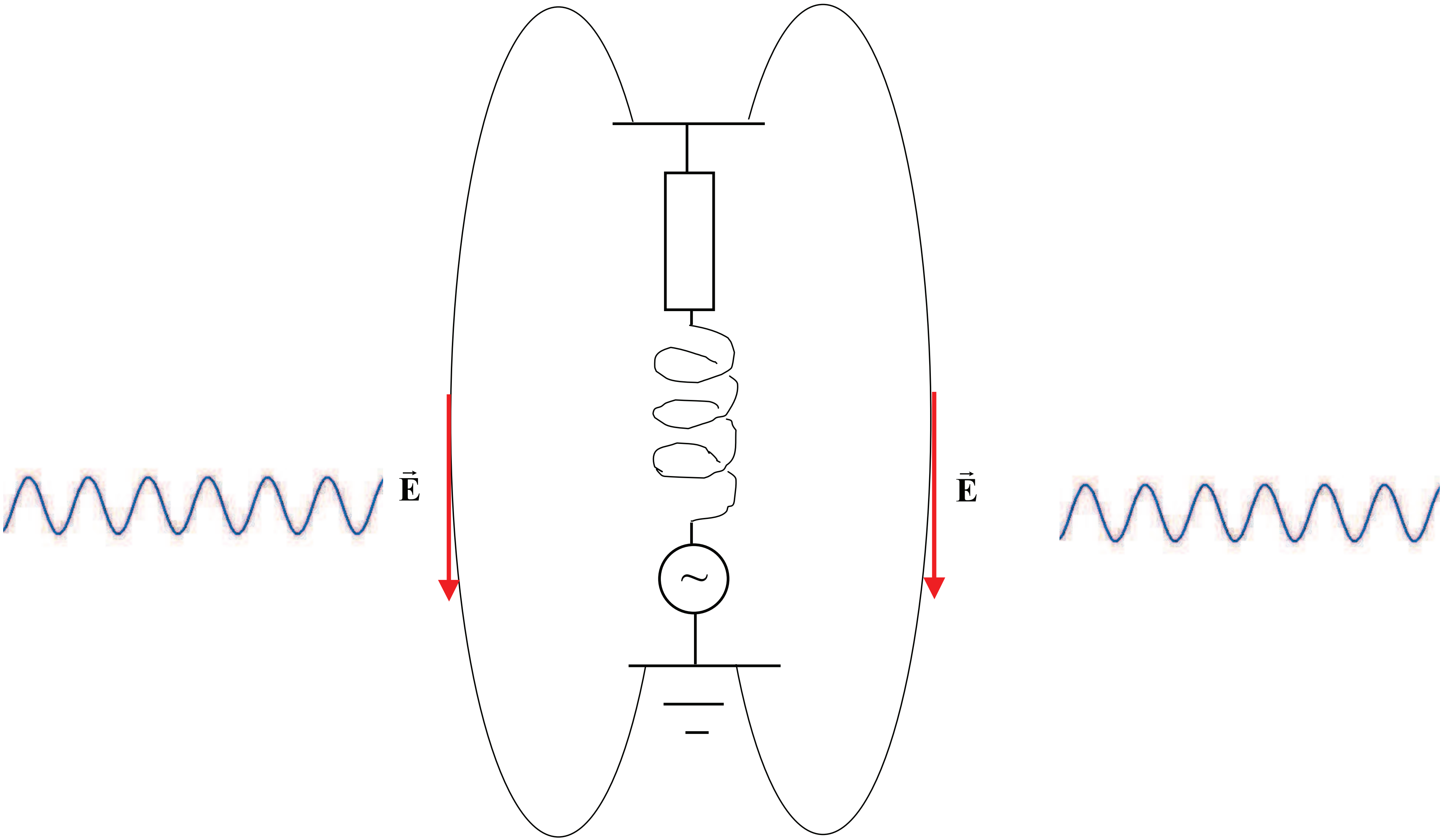
itd.

Realizacja praktyczna: obwód RLC z zasilaniem



Energia skupiona w kondensatorze, słaba emisja.

Lepsza realizacja: otwarty obwód RLC z zasilaniem



zasada działania anteny radiowej

Optyka geometryczna i falowa

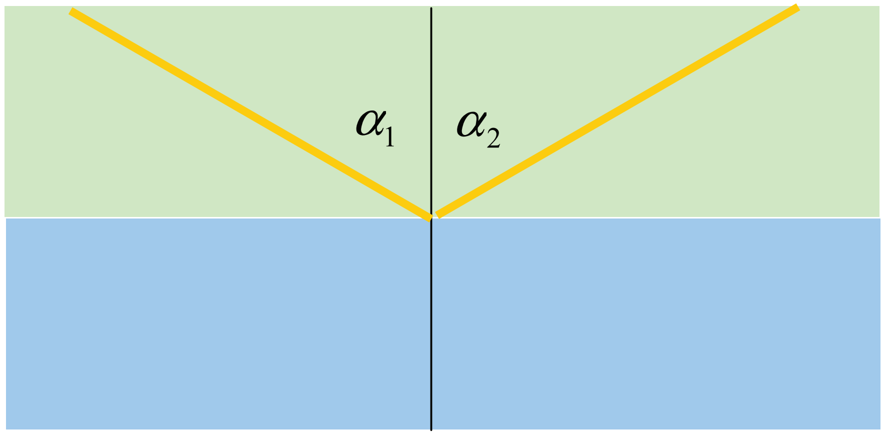
Pojęcie podstawowe: promień świetlny.

Podstawowa obserwacja: jeżeli promień świetlny pada na granicę dwóch ośrodków to:

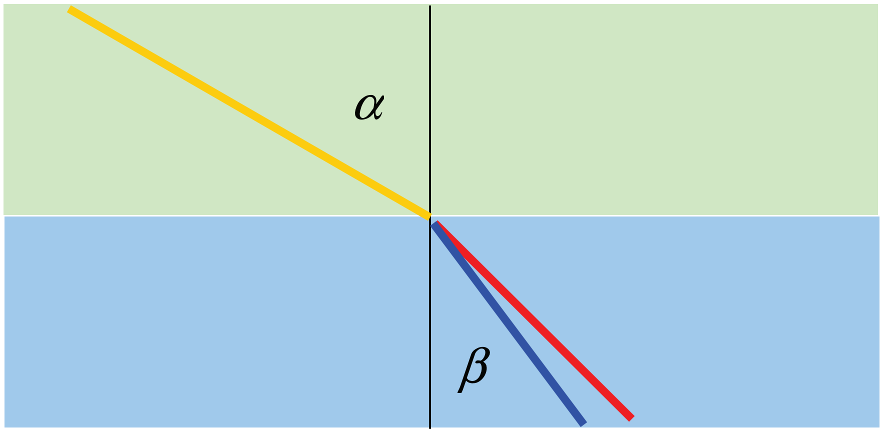
- **ulega odbiciu na powierzchni granicznej**
- **załamaniu przy przejściu z jednego do drugiego ośrodka.**

Prawo odbicia: promień padający, promień odbity i normalna do powierzchni granicznej wystawiona w punkcie padania promienia leżą w jednej płaszczyźnie i kąt padania równa się kątowi odbicia

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$$



Kolejna obserwacja: promień światła białego (słonecznego) przy załamaniu rozszczepia się na promienie o różnych barwach.



Przyczyna: falowa natura światła.
Barwa zależy od częstotliwości ν.
W próżni fale świetlne rozchodzą się z prędkością c.
W próżni długość fali

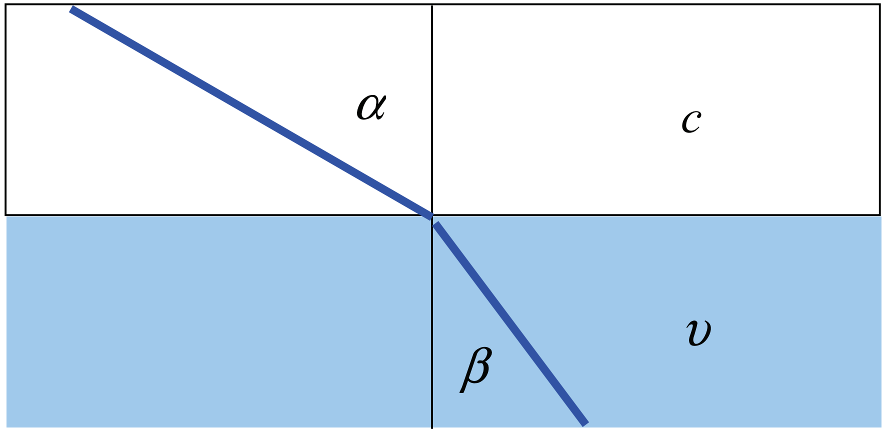
$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

W innych ośrodkach prędkość światła

$$\upsilon < c$$

Częstotliwość ν nie zmienia się.
Zmienia się długość fali λ.
Zmienia się kierunek czoła fali.

Rozważmy przejście promienia świetlnego o danej λ z próżni do jakiegoś ośrodka



Definiujemy bezwzględny współczynnik załamania

$$n = \frac{c}{\upsilon}$$

$$n > 1$$

Przykłady:

dla wody $n = 1.33$

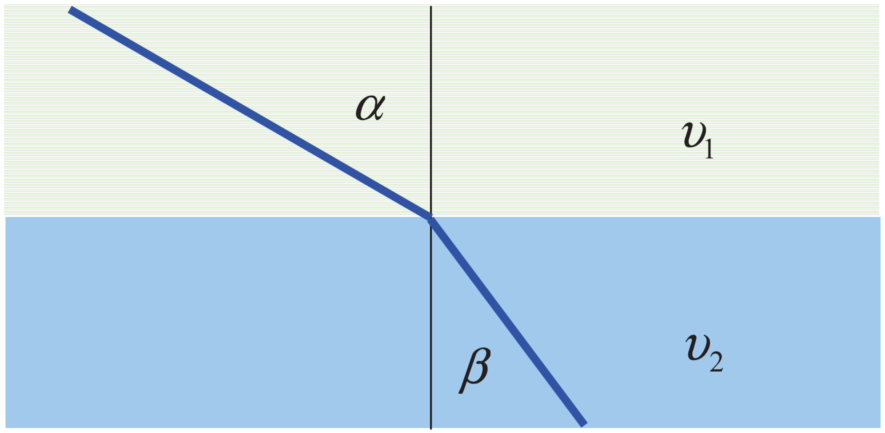
dla szkła $n \approx 1.5$

n **zależy od materiału i od barwy światła.**

Prawo załamania (na granicy z próżnią): stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest równy bezwzględnemu współczynnikowi załamania danego ośrodka

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n}$$

Na granicy dwóch ośrodków



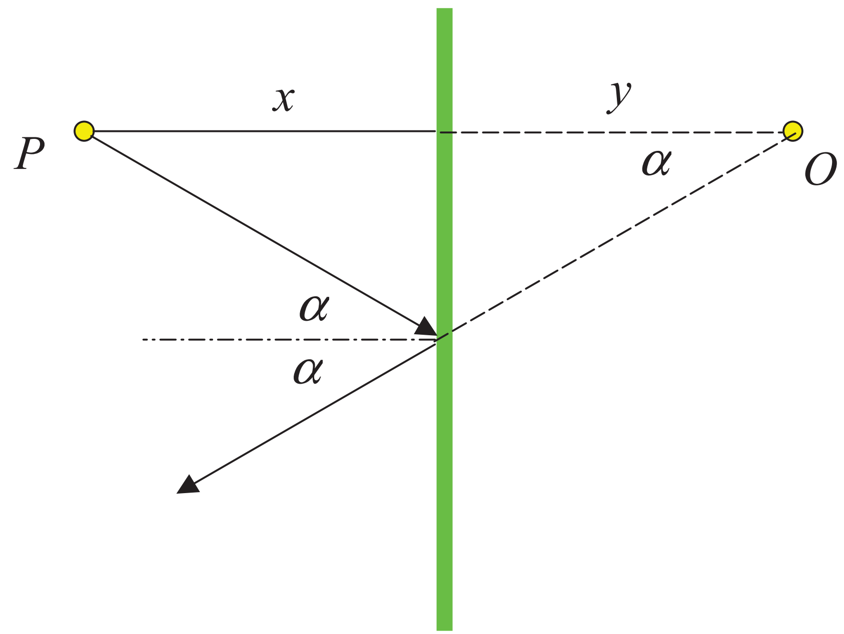
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{c}{\upsilon_2}\Big/\frac{c}{\upsilon_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$$

Prawo załamania (dla przejścia światła przez granicę dwóch ośrodków materialnych): stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest równy względnemu współczynnikowi załamania światła ośrodka drugiego względem pierwszego $n_{2,1}$**.**

Optyka geometryczna – zwierciadła

Zwierciadło płaskie

Dla konstrukcji obrazu wykorzystywane jest tylko prawo odbicia.

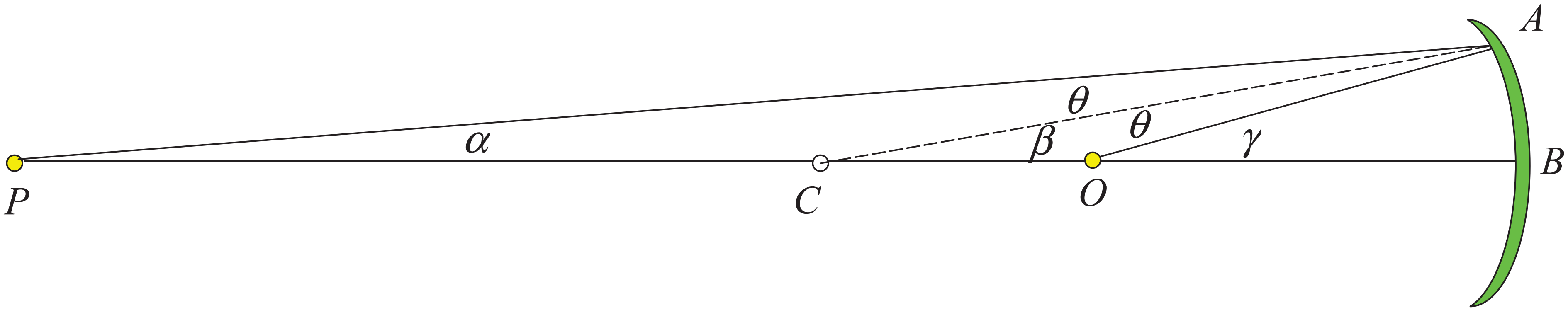


Obraz *O* punktu *P* jest pozorny (urojony), ponieważ tylko stwarza wrażenie, że wychodzą z niego promienie świetlne. Naprawdę przecinają się tam przedłużenia promieni.
Umownie

$$y = -x$$

$$x > 0$$

Zwierciadło kuliste



Oznaczenia:
C **– środek krzywizny**
AC **=*BC*** **– promień krzywizny *r***
Zależności kątowe:

$$\beta = \alpha + \theta$$

$$\gamma = \alpha + 2\theta$$

stąd

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

W mierze łukowej

$$\alpha \approx \frac{AB}{PB} = \frac{AB}{x} \qquad \beta = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{r} \qquad \gamma \approx \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{y}$$

stąd

$$\frac{AB}{x} + \frac{AB}{y} = 2\frac{AB}{r}$$

i otrzymujemy równanie zwierciadła kulistego

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{r}$$

Równanie to jest przybliżone. Przybliżenie to jest dobre dla promieni przyosiowych.

W opisanym przypadku wszystkie wielkości *x*, *y*, *r* są dodatnie. Równanie może być stosowane dla zwierciadła kulistego wypukłego, ale wtedy należy przyjąć $r<0$**.**

Wynik $y<0$ **należy rozumieć jako obraz pozorny.**

Jeżeli na zwierciadło pada wiązka równoległa, to promienie skupiają się praktycznie w jednym punkcie, który nazywamy ogniskiem. Odległość tego punktu od zwierciadła nazywamy ogniskową *f*. Wtedy

$$x\to\infty \qquad\qquad y=f$$

stąd

$$\frac{1}{f}=\frac{2}{r}$$

$$f=\frac{r}{2}$$

i możemy napisać równanie zwierciadła kulistego w postaci

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}$$