Wstęp matematyczny

Algebra wektorów

Wektor: uporządkowana para punktów

A (A_1, A_2, A_3), **B** (B_1, B_2, B_3)

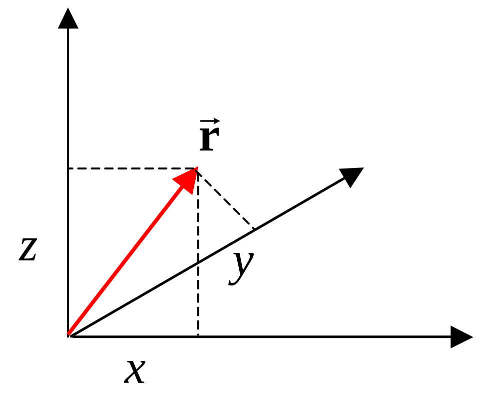
$$\mathbf{AB} = \left(B_1 - A_1,\ B_2 - A_2,\ B_3 - A_3\right)$$

Wektor wodzący

$$\mathbf{r} = \left(x,\ y,\ z\right)$$

W pisowni ręcznej należy używać strzałek nad wektorami

$$\vec{\mathbf{r}} = \left(x,\ y,\ z\right)$$



x, y, z - **współrzędne wektora**

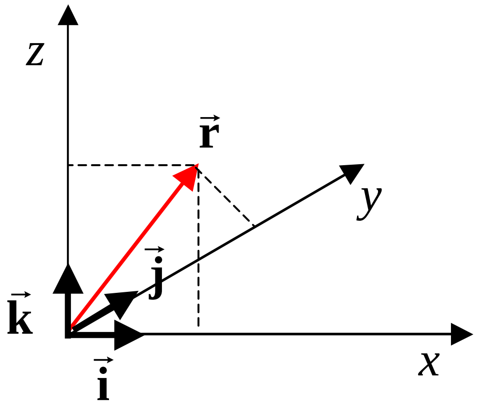
Długość wektora

$$\boxed{r = \left|\,\vec{\mathbf{r}}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Rozkład wektora na składowe:

$$\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$$

gdzie $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ **są wektorami jednostkowymi wzdłuż osi** *x*, *y*, *z*, **odpowiednio.**



Współrzędne wektora można wyrazić przez kąty, jakie wektor tworzy z osiami:

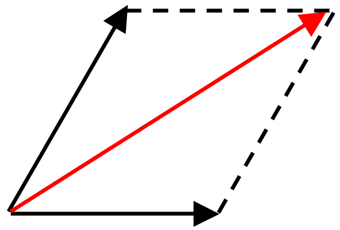
$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma$$

Cosinusy kierunkowe:

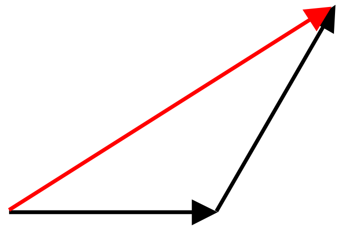
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

Dodawanie wektorów

a) graficzne



lub

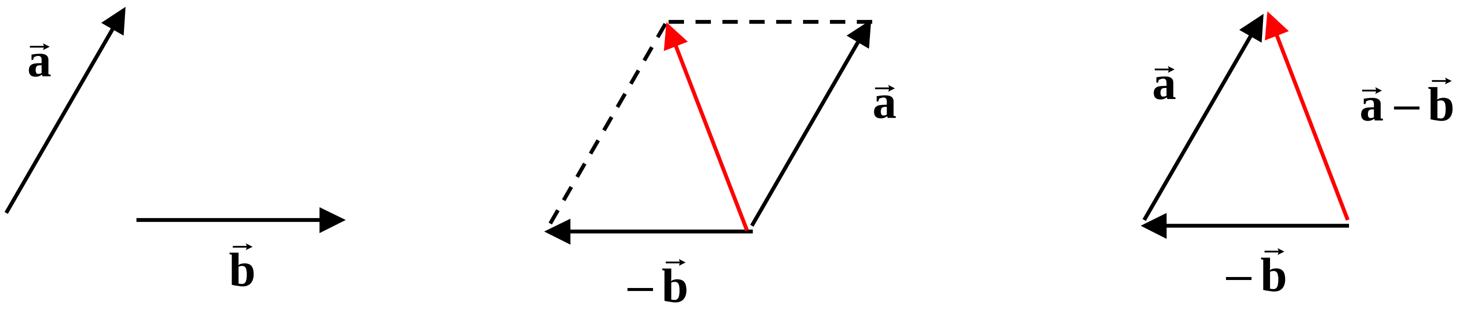


b) algebraiczne

$$\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{r}}_2 = \left(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2,\, z_1 + z_2\right)$$

Odejmowanie polega na dodawaniu wektora przeciwnego

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + \left(-\vec{\mathbf{b}}\right)$$



$$\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2 = \left(x_1 - x_2,\, y_1 - y_2,\, z_1 - z_2\right)$$

Iloczyny wektorów

iloczyn skalarny

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

inna forma zapisu

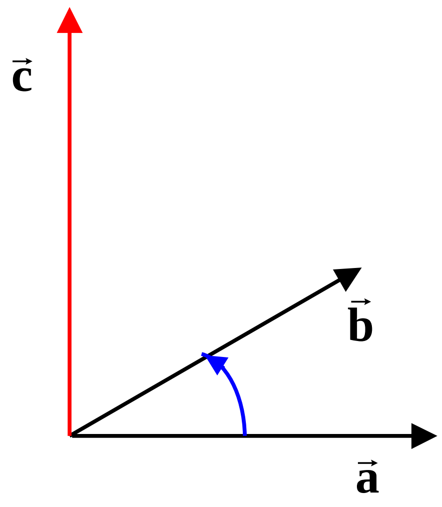
$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = ab \cos \varphi$$

gdzie φ - kąt między wektorami.

(skalar – wielkość liczbowa, która się nie zmienia przy zmianie układu współrzędnych)

iloczyn wektorowy

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}}$$



gdzie

I) $c = ab \sin \varphi$

II) $\vec{\mathbf{c}}$ **jest** $\perp$ **do płaszczyzny wektorów** $\vec{\mathbf{a}}$ **i** $\vec{\mathbf{b}}$

III) $\vec{\mathbf{c}}$ **tworzy z wektorami** $\vec{\mathbf{a}}$ **i** $\vec{\mathbf{b}}$ **trójkę prawoskrętną**

iloczyn wektorowy wyrażony przez współrzędne:

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\vec{\mathbf{i}}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec{\mathbf{j}}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec{\mathbf{k}}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\vec{\mathbf{i}}\left(a_2b_3-a_3b_2\right)-\vec{\mathbf{j}}\left(a_1b_3-a_3b_1\right)+\vec{\mathbf{k}}\left(a_1b_2-a_2b_1\right)$$

podwójny iloczyn wektorowy

$$\vec{\mathbf{A}}\times\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}\right)=\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}\right)\vec{\mathbf{B}}-\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\right)\vec{\mathbf{C}}$$

$$\left(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)\times\vec{\mathbf{C}}=\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}\right)\vec{\mathbf{B}}-\left(\vec{\mathbf{C}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\right)\vec{\mathbf{A}}$$

iloczyn mieszany

$$\left(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)\cdot\vec{\mathbf{C}}=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$\left|\left(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)\cdot\vec{\mathbf{C}}\right|$ **- objętość równoległościanu wyznaczonego przez wektory** $\vec{\mathbf{A}},\vec{\mathbf{B}},\vec{\mathbf{C}}$

Pojęcie granicy
(to nie jest ścisła definicja!)

granica ciągu $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{100}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{1000000}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to 0$

To zapisujemy tak:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Jak policzyć

$$\lim_{x\to 0}(x+1)\ \text{?}$$

Np. tak:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)=0+1=1$$

Funkcja może nie być określona w punkcie, w którym liczymy granicę, ale granica może istnieć w tym punkcie, np. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ **nie jest określona w** $x=0$**, ale**

$$\frac{\sin 1}{1}, \frac{\sin\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\sin\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\sin\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} \ldots\ldots\ldots = 0.84,\ 0.96,\ 0.98,\ \ldots\ldots.0.9998 \to 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Rachunek różniczkowy (obliczanie pochodnych)

Pochodna funkcji w danym punkcie = granica ilorazu różnicowego

$f(x)$, $x \in (x_1, x_2)$

$x_0 \in (x_1, x_2)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x = x_0}$$

przykład:

$f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{(2x_0 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = (2x_0 + \Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 2x_0 = f'(x_0)$$

Jeżeli ta operacja jest możliwa w całym przedziale, to mamy pochodną funkcji

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$$

Pochodna funkcji jest pewną nową funkcją.
W powyższym przykładzie

$$f'(x) = 2x$$

Inne formy zapisu

$$\frac{df}{dx} = 2x$$

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

Proste reguły operacji na pochodnych:

$$\left(af(x)\right)' = af'(x)$$

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Pochodne funkcji elementarnych:

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

dodatkowe wyjaśnienia:

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718$$

$$\ln x = \log_e x$$

Pochodna funkcji złożonej:

jeżeli $y = f(u)$ **i** $u = g(x)$ **(czyli** $y = f(g(x))$**),**

to $y'(x) = f'(u)g'(x)$

przykład:

$$y = \sin 2x$$

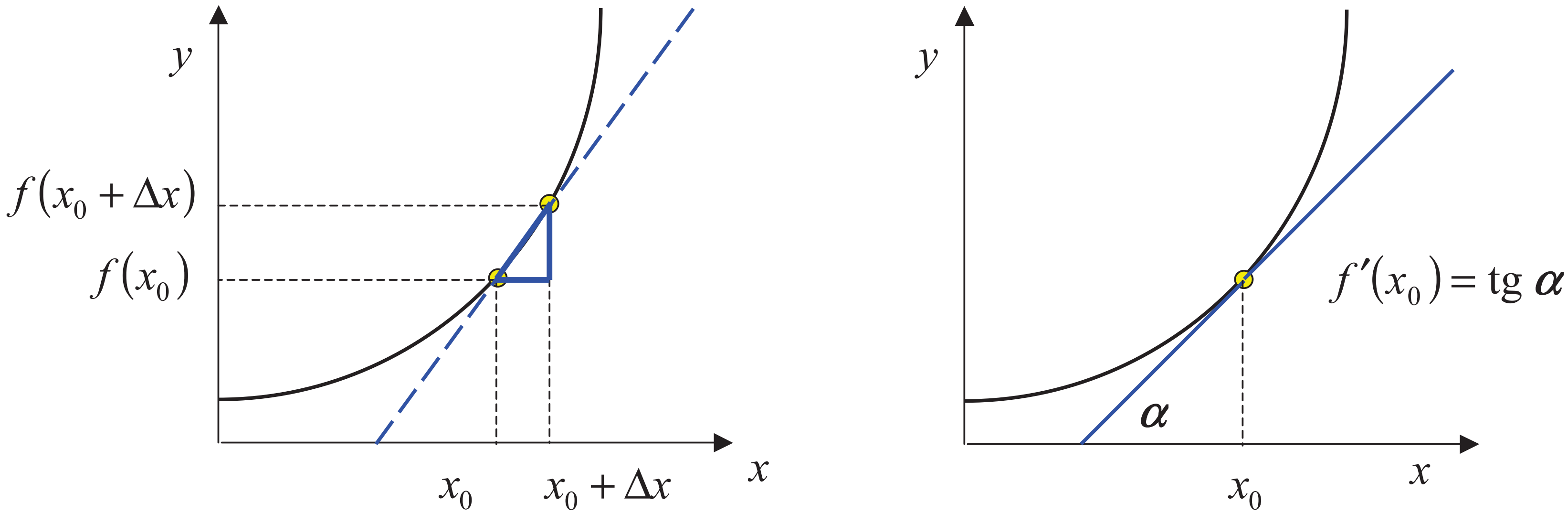
$$y = \sin u \quad \textbf{i} \quad u = g(x) = 2x$$

$$(\sin u)' = \cos u \quad \textbf{i} \quad (2x)' = 2$$

$$(\sin 2x)' = (\cos u)\cdot 2 = 2\cos 2x$$

Interpretacja pochodnej w danym punkcie:

1. **tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji**
2. **szybkość wzrostu funkcji**



Różniczka funkcji

$$df \equiv \frac{df}{dx}dx = f'(x)\,dx$$

jest przybliżoną miarą przyrostu funkcji

$$\Delta f \approx f'(x)\,dx$$

Pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \left.\frac{df(x,y)}{dx}\right|_{y=const}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left.\frac{df(x,y)}{dy}\right|_{x=const}$$