

Inercjalne układy odniesienia

I i II zasada dynamiki Newtona są spełnione tylko w pewnej klasie układów odniesienia. Nazywamy je inercjalnymi układami odniesienia.

Kryterium układu inercjalnego: I zasada

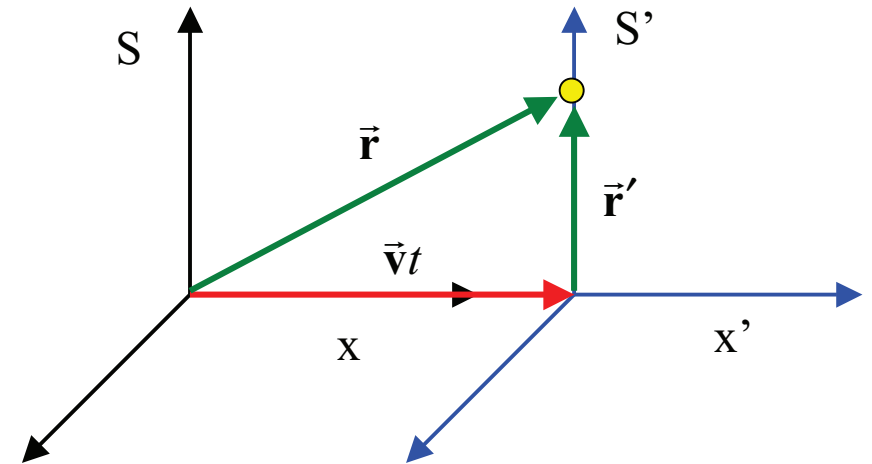
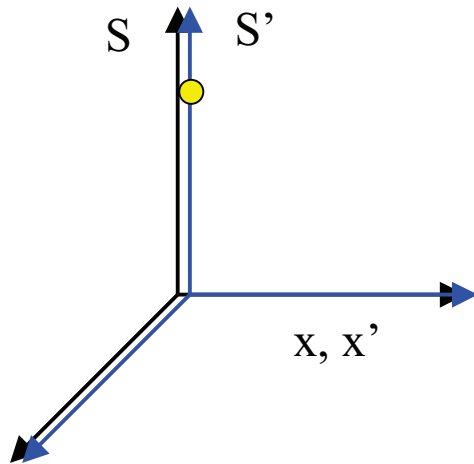
jeżeli $\vec{F} = 0$, to $\vec{a} = 0$.

Jeżeli istnieje chociaż jeden układ inercjalny, to każdy układ poruszający się względem niego ruchem jednostajnym prostoliniowym jest również inercjalny.



Galileo Galilei (1564-1642)
(źródło: Internet)

Transformacja Galileusza



$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

Zasada względności Galileusza: prawa mechaniki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Dowód:

$$\begin{aligned} dt' &= dt \\ \frac{d\vec{r}'}{dt'} &= \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} \\ \vec{u}' &= \vec{u} - \vec{v} \end{aligned}$$

Uwaga: stąd wynika newtonowskie dodawanie prędkości:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

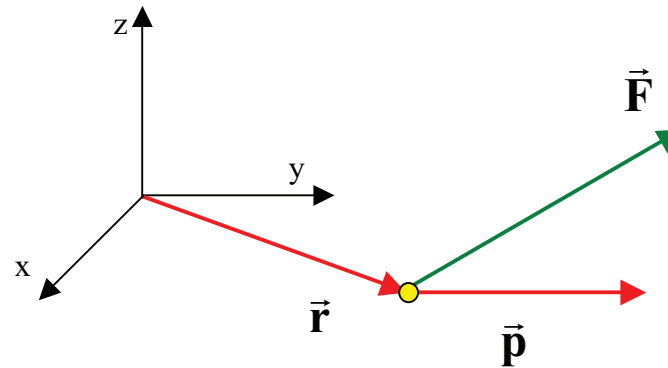
$$\vec{a}' = \vec{a}$$

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

cbdo

Prawo zachowania momentu pędu

Rozważmy ruch punktu materialnego pod wpływem siły \vec{F} względem początku układu odniesienia



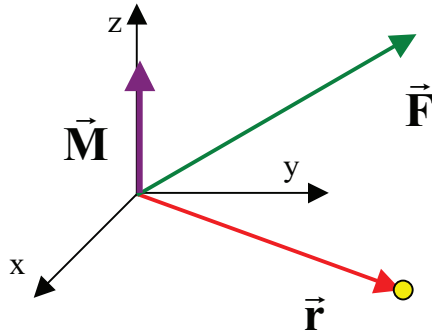
Z drugiej zasady dynamiki

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

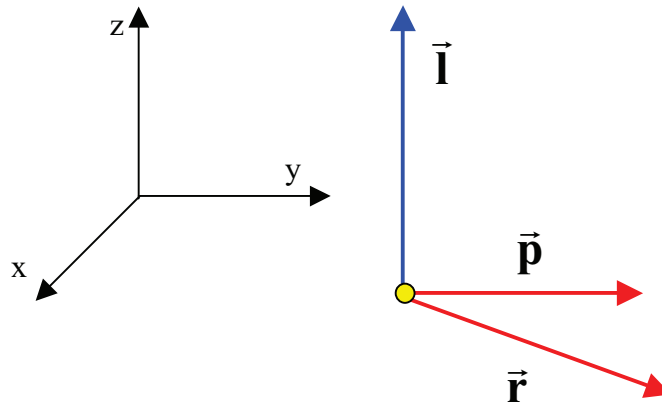
moment siły (definicja):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



moment pędu (definicja):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



obliczmy $\frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Prawo zachowania momentu pędu:

jeżeli moment siły działający na punkt materialny jest równy zeru, to moment pędu pozostaje stały.

Dowód:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

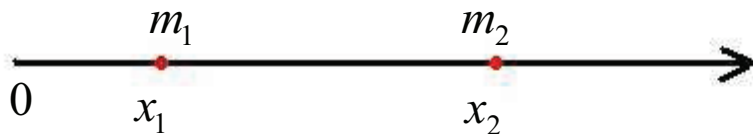
Ruch układu punktów materialnych

definicja środka masy

Ruch dowolnego układu punktów materialnych (a także dowolnej bryły sztywnej) można opisać jako złożenie

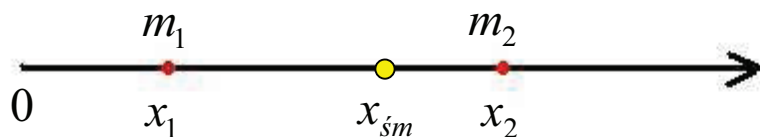
- ruchu postępowego pewnego punktu materialnego
- ruchu obrotowego względem tego punktu.

Położenie tego punktu nazywamy środkiem masy.



definicja:

$$x_{śm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



ogólnie:

$$\vec{r}_{śm} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$m = \sum_i m_i$$

II zasada dynamiki dla układu punktów materialnych

$$m \vec{a}_{\dot{s}m} = \sum_i \vec{F}_i$$

ale oddziaływania wzajemne mają znaki przeciwne (z III zasady dynamiki), dlatego

$$m \vec{a}_{\dot{s}m} = \vec{F}_{\text{zewn}}$$

Ruch środka masy określony jest tylko przez wypadkową sił zewnętrznych.

Zdefiniujmy pęd środka masy:

$$\vec{P} \equiv m \vec{v}_{\dot{s}m}$$

stąd inna (równoważna) postać II zasady dynamiki:

$$\frac{d \vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{zewn}}$$

Zasada zachowania pędu dla układu punktów materialnych

$$\vec{F}_{\text{zewn}} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \frac{d \vec{P}}{dt} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{P} = \text{const}$$

Jeżeli całkowita siła zewnętrzna działająca na układ jest równa zeru, to pęd układu pozostaje stały.

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego układu punktów materialnych:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{zewn}}}$$

gdzie $\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$

Zasada zachowania momentu pędu dla układu punktów materialnych

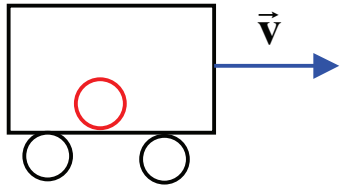
$$\vec{M}_{\text{zewn}} = \mathbf{0} \longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0} \longrightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Jeżeli całkowity moment sił zewnętrznych działający na układ jest równy zeru, to moment pędu układu pozostaje stały.

Siły w układach nieinercjalnych (siły bezwładności)

Są to siły pozorne, ale powodujące rzeczywiste skutki.

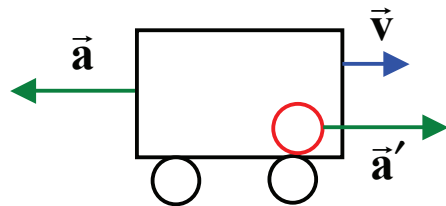
1. Siła bezwładności w ruchu niejednostajnym prostoliniowym – siła d'Alemberta



ruch jednostajny

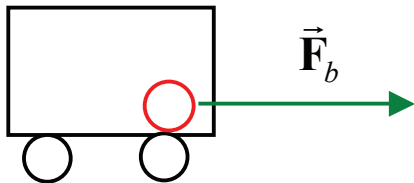
\vec{v} - w układzie inercyjnym

hamowanie:



\vec{a} - w układzie inercyjnym

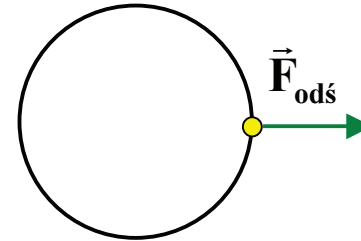
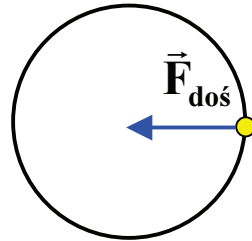
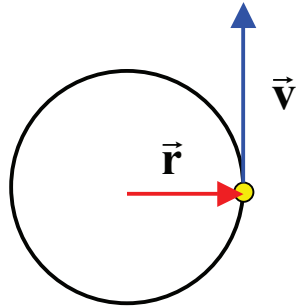
\vec{a}' - w układzie nieinercyjnym



\vec{F}_b - siła bezwładności w układzie nieinercyjnym

$$\vec{F}_b = m\vec{a}' \quad \text{lub} \quad \vec{F}_b = -m\vec{a}$$

2. Siła bezwładności w ruchu po okręgu – siła odśrodkowa



$$\vec{F}_{\text{doś}} = -\frac{mv^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{\text{odś}} = \frac{mv^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

co widzi
obserwator
w układzie
inercyjnym

co widzi
obserwator
w układzie
nieinercyjnym

$$v = \omega r$$

$$\vec{F}_{\text{doś}} = -m\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{F}_{\text{odś}} = m\omega^2 \vec{r}$$