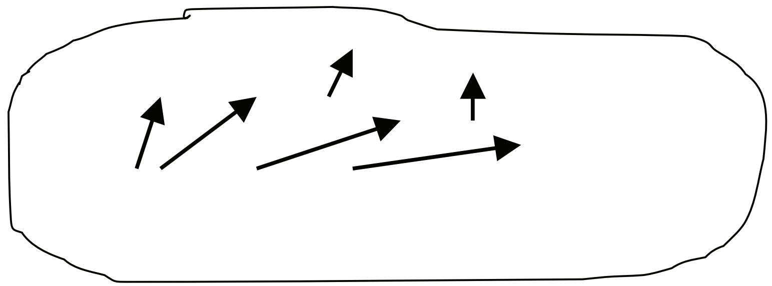
Pole sił

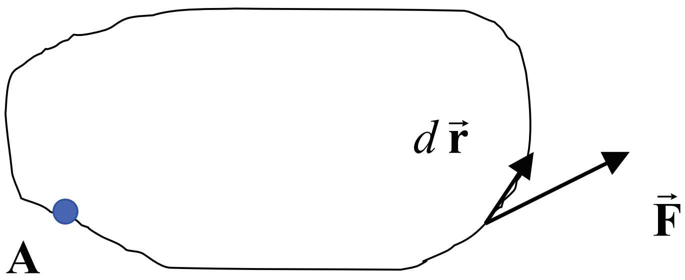
Jeżeli dany jest obszar przestrzeni taki, że w każdym punkcie określony jest wektor siły, to mówimy, że mamy w tym obszarze pole sił.



Mówimy, że w obszarze, w którym ciało po wykonaniu jakiegoś ruchu i powrocie do punktu początkowego zachowuje poprzednią zdolność do wykonania pracy, działają siły zachowawcze, a obszar ten nazywamy polem zachowawczym.

Przykłady występowania sił zachowawczych: ściskana i rozciągana sprężyna, wahadło.

Definicja: jeżeli praca wykonana wzdłuż drogi zamkniętej jest równa zeru, to mówimy, że pole jest zachowawcze.



$$\boxed{\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0}$$

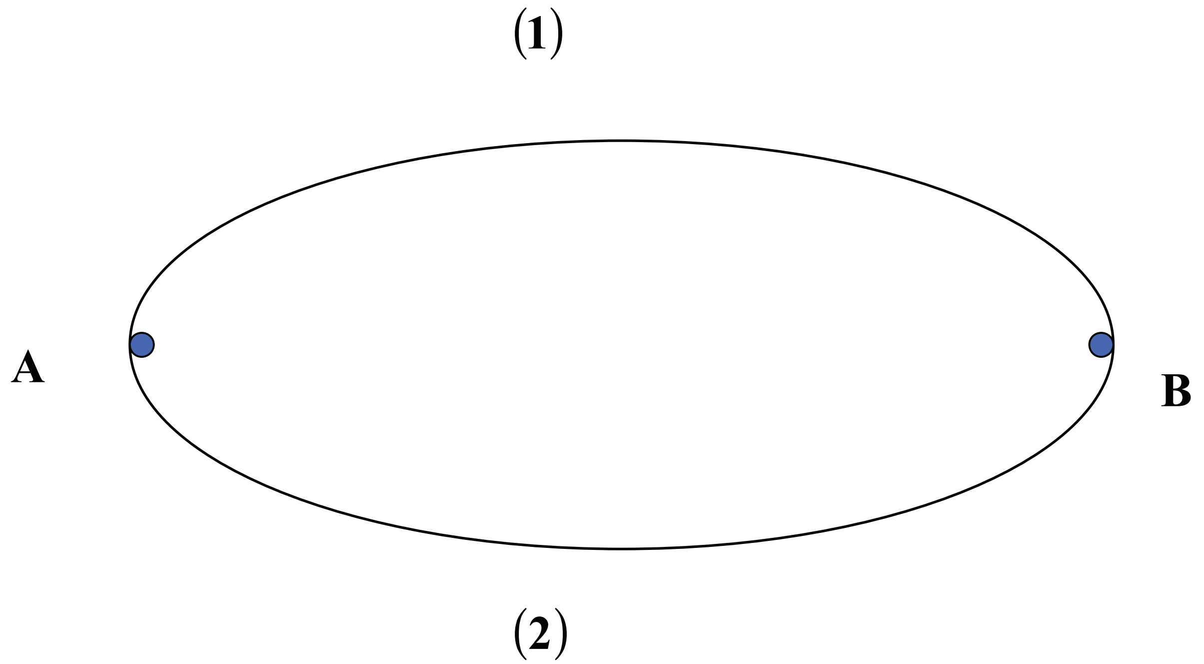
Twierdzenie: w polu zachowawczym praca jest niezależna od drogi, zależy tylko od punktów początkowego i końcowego.

Dowód:

$$\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0$$

$$\int\limits_{\substack{\mathbf{A}\\(1)}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} + \int\limits_{\substack{\mathbf{B}\\(2)}}^{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0$$

$$\int\limits_{\substack{\mathbf{A}\\(1)}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} - \int\limits_{\substack{\mathbf{A}\\(2)}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = 0$$



$$\int\limits_{\substack{\mathbf{A}\\(1)}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}} = \int\limits_{\substack{\mathbf{A}\\(2)}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\,\vec{\mathbf{r}}$$

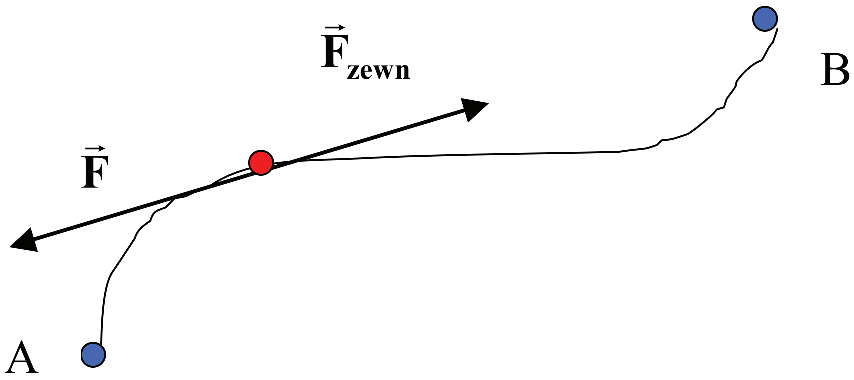
cbdo.

Przykłady pól zachowawczych: pole sił sprężystości, pole sił grawitacji.

Energia potencjalna i potencjał

W polu zachowawczym można wprowadzić funkcję, zależną tylko od współrzędnych, taką że różnica wartości tej funkcji w dwóch punktach daje pracę na drodze łączącej te punkty.

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$$



$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = -\vec{\mathbf{F}}$$

E_p – **energia potencjalna**

Jeżeli rozważymy przesuwanie ciała o masie jednostkowej, to otrzymamy funkcję charakteryzującą pole – potencjał.

$$\int_A^B -\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = E_p(B) - E_p(A) \qquad /\boldsymbol{m}$$

$$\int_A^B -\vec{\gamma} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U(B) - U(A),$$

$U = \frac{E_p}{m} \Leftrightarrow$ **potencjał,** $\qquad \vec{\gamma} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \Leftrightarrow$ **natężenie pola**

$\gamma = -\mathrm{grad}\, U$, $\qquad \mathrm{grad}\, U \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$ $\qquad$ „grad” **czytamy „gradient”**

Prawo zachowania energii mechanicznej

Rozważmy samorzutny ruch ciała o masie m w polu sił zachowawczych

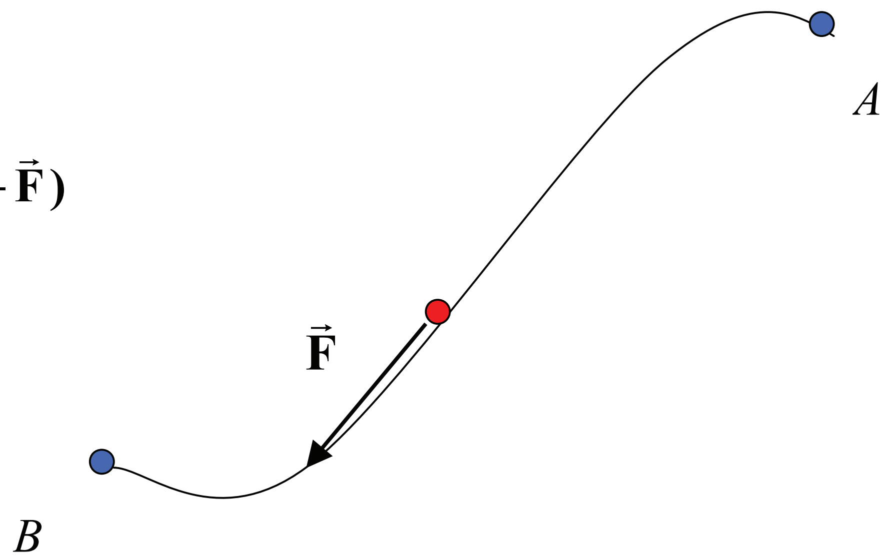
$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = E_k(B) - E_k(A)$$

a teraz ruch jednostajny (hamowany siłą $-\vec{\mathbf{F}}$)

$$-\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = E_p(B) - E_p(A)$$

$$E_k(B) - E_k(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)$$

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A)$$



W polu sił zachowawczych całkowita energia mechaniczna jest stała.

$$\boxed{E_k + E_p = const}$$

Grawitacja czyli ciążenie powszechne

Prawo grawitacji Newtona

Każde dwa punkty materialne przyciągają się wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas, a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi:

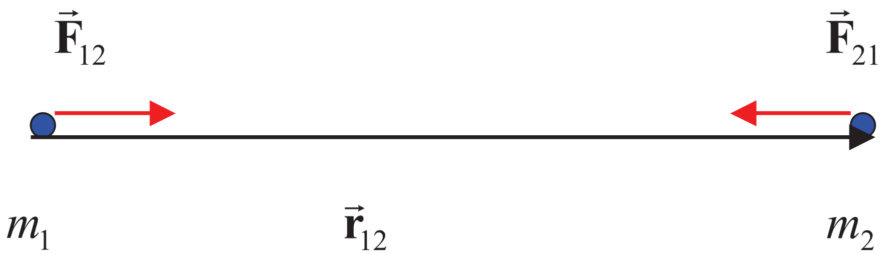
$$F = G\frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

m_1, m_2 **- masy**
r **- odległość**

G **- stała grawitacji,** $\qquad G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

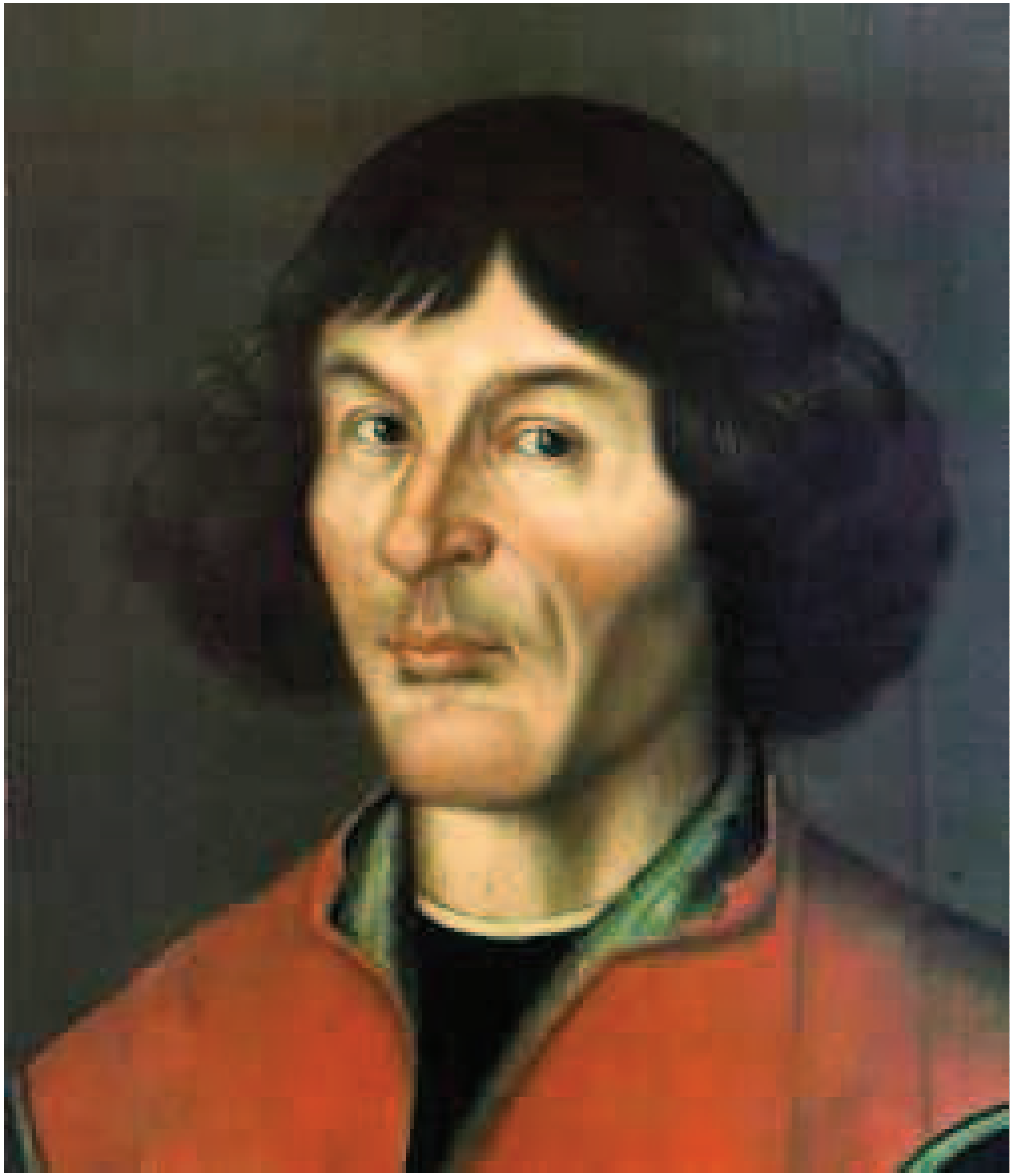
Zapis wektorowy:

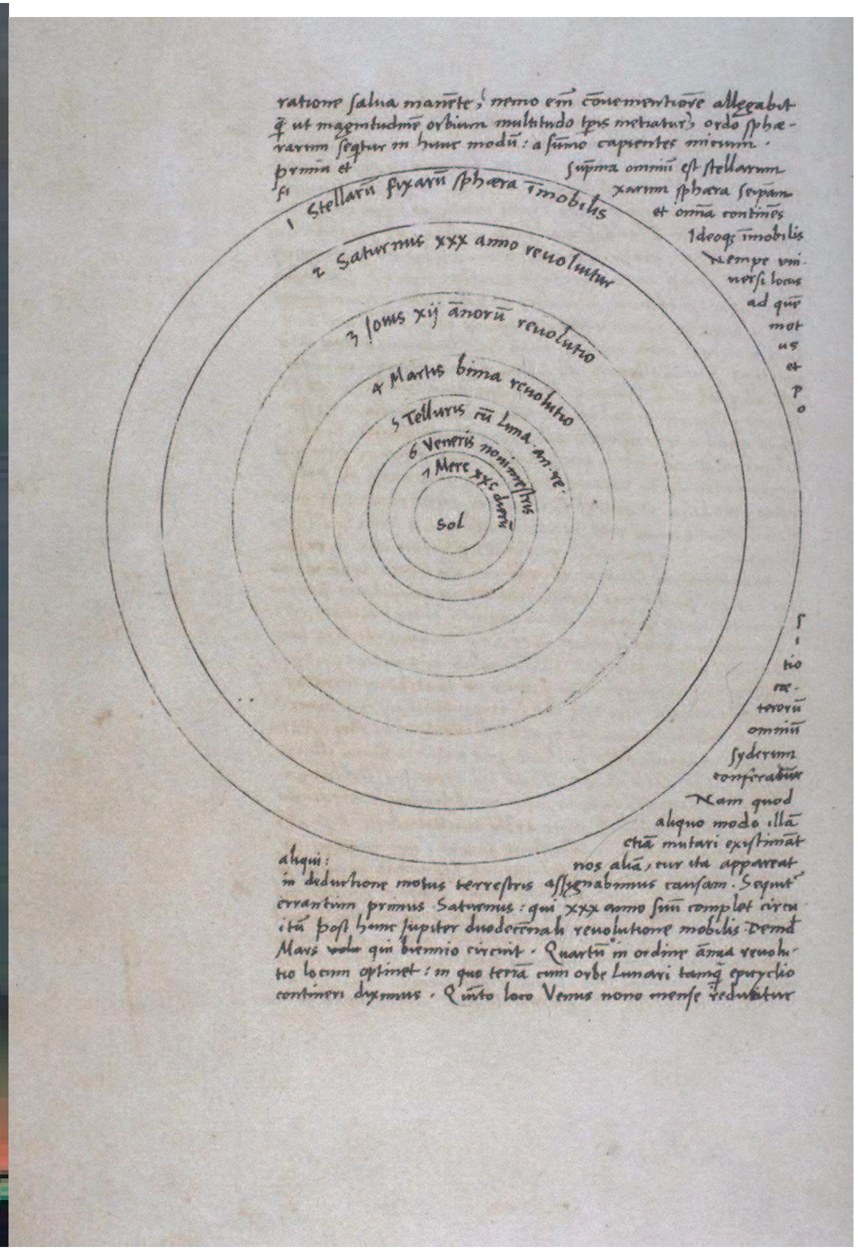
$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_{21} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}}}$$



$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}}$$

Prawo grawitacji Newtona - próba zrozumienia mechaniki nieba.



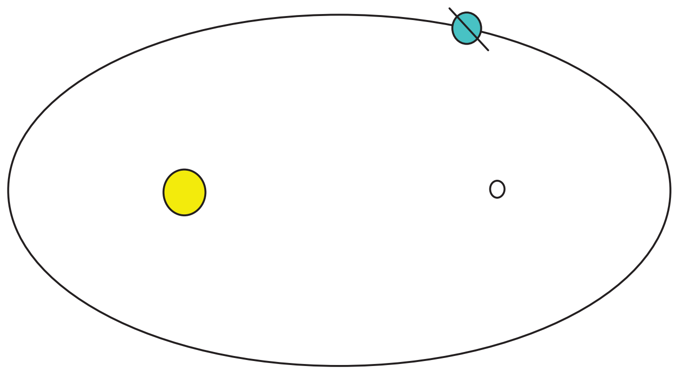


Mikołaj Kopernik (1473-1543) i jego koncepcja układu heliocentrycznego

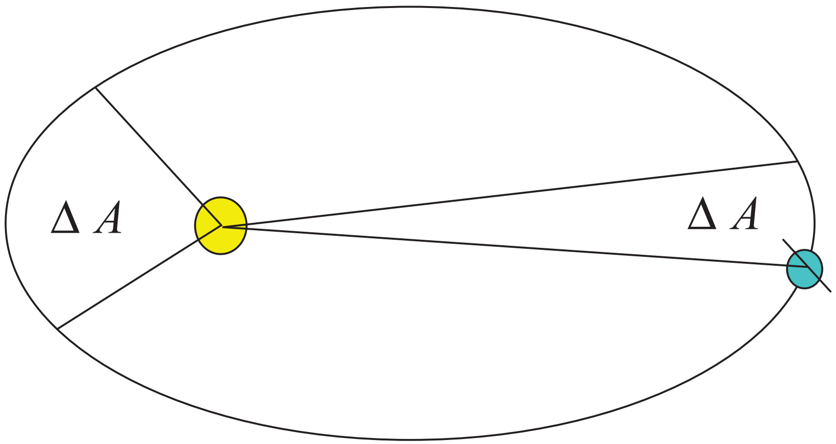
Galileusz (1564-1642) – odkrył fazy Wenus (obserwacyjne potwierdzenie teorii heliocentrycznej 1610)

Johannes Kepler (1571-1630) – sformułował trzy proste prawa opisujące kinematykę ruchu planet:

Pierwsze prawo Keplera: planety w Układzie Słonecznym poruszają się po elipsach, w jednym z ognisk takiej elipsy znajduje się Słońce.

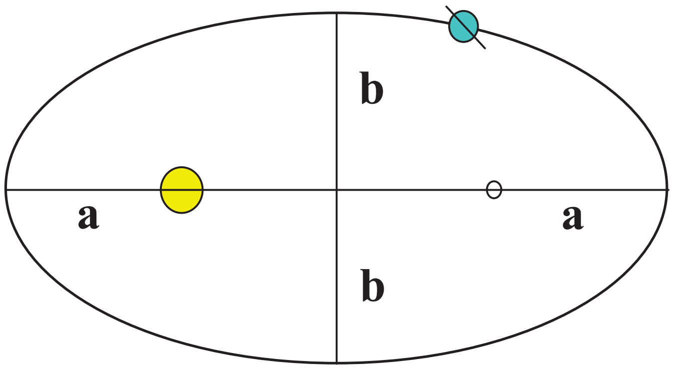


Drugie prawo Keplera: prędkość polowa każdej planety jest stała, tzn. promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.



$$\boxed{\frac{\Delta A}{\Delta t} = const}$$

Trzecie prawo Keplera: stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześcianu większej półosi jej orbity jest wielkością stałą



$$\frac{\mathbf{T}^2}{\mathbf{a}^3} = const$$

Johannes Kepler sformułował te prawa w latach 1609-1619

Były to prawidłowości czysto obserwacyjne.

Można je wyprowadzić z zasad dynamiki Newtona i prawa grawitacji Newtona.

Jak Newton uzasadnił swoje prawo grawitacji

W swoim najważniejszym dziele: ”Philosophiae naturalis principia mathematica” na str. 231 (wydania polskiego) napisał:

„Jeśli ciało dzięki grawitacji obraca się po okręgu koncentrycznym z Ziemią, to grawitacja ta jest siłą dośrodkową tego ciała”.

Dzięki temu genialnemu spostrzeżeniu można porównać przyspieszenie spadającego jabłka:

$$a_j = g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

z przyspieszeniem dośrodkowym Księżyca na orbicie wokół Ziemi:

$$a_K = \frac{v^2}{r_{Z-K}} = \omega^2 r_{Z-K} = 0{,}0027\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

ponieważ mają to samo grawitacyjne pochodzenie (str. 633 wydania polskiego).

Ich iloraz wynosi

$$\frac{a_j}{a_K} \approx 3600$$

W czasach Newtona wiadomo było, że odległość Ziemia-Księżyc jest 60 razy większa od promienia Ziemi (czyli odległości Ziemia-jabłko)

$$\frac{r_{Z-K}}{r_{Z-j}} = \frac{384400 \text{ km}}{6400 \text{ km}} \approx 60$$

Stąd można już wyciągnąć wniosek, że przyspieszenie grawitacyjne jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości, bo

$$\left(\frac{r_{Z-K}}{r_{Z-j}}\right)^2 = 3600,$$

i tak samo siła grawitacji

$$a \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$$

ponieważ $F = ma$. Oddziaływanie jest wzajemne, więc siła musi zależeć od iloczynu obu mas.

Ważna uwaga: prawo grawitacji Newtona, sformułowane dla punktów materialnych, stosuje się <u>dokładnie</u> dla kul. Jako odległość r trzeba wziąć odległość między ich środkami.

Dla dowolnych brył trzeba wykonać całkowanie po całej objętości.