

Elementy dynamiki relatywistycznej

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{- nieaktualne}$$

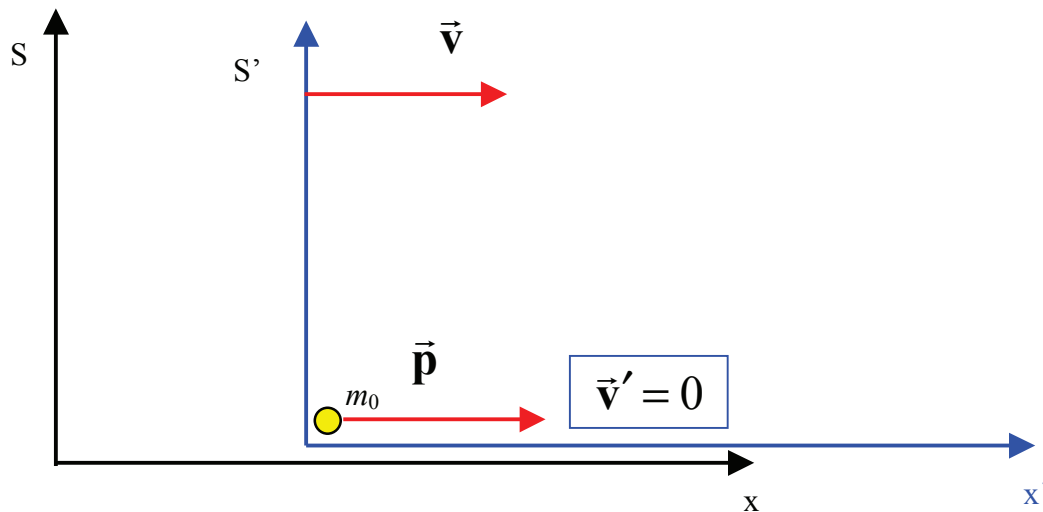
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{- nadal aktualne}$$

ale pod warunkiem, że

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma m_0 \vec{v} \quad \text{gdzie } m_0 \text{ - masa spoczynkowa.}$$

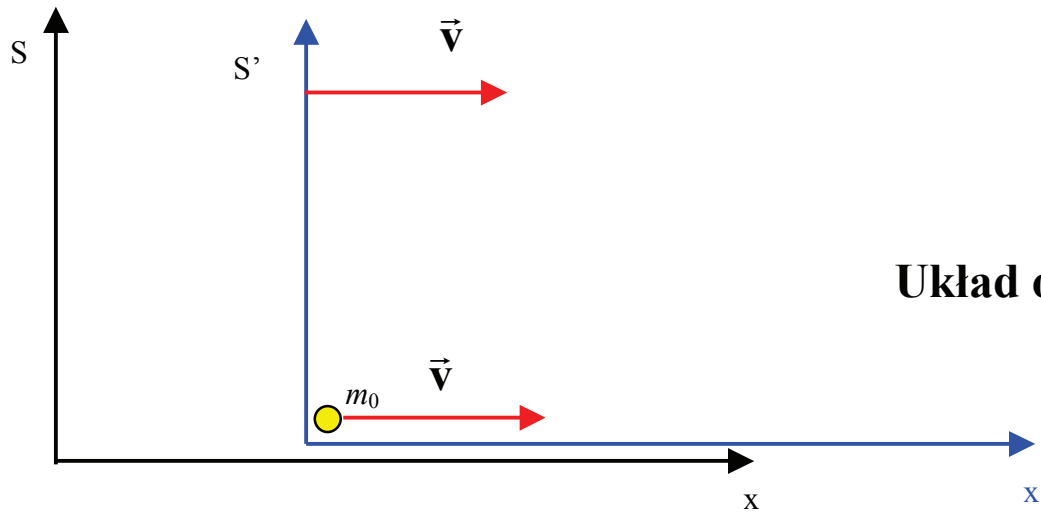
Możliwa interpretacja:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{gdzie masa zależy od prędkości } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma m_0.$$



Oba wzory definiują ten sam pęd relatywistyczny \vec{p} .

Praca i energia



$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$
$$\vec{p} = \vec{p}(t)$$

Układ odniesienia związany z cząstką nie jest inercjalny.

S' – układ inercjalny lokalnie styczny

Jest to taki układ, który cały czas jest inercjalny i w chwili t ma taką samą prędkość jak cząstka.
Pozwala nam to prowadzić obliczenia w ramach szczególnej teorii względności

Praca (wykonana podczas rozpędzania cząstki od prędkości v_1 do v_2):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx$$

Wykonując podobne obliczenia jak w mechanice Newtona, ale stosując wzór na pęd relatywistyczny otrzymujemy:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\Bigg|_{v_1}^{v_2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

Definiujemy energię relatywistyczną:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Jest to energia cząstki o masie m_0 i prędkości v .

Przyjmując definicję masy zależnej od prędkości

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

otrzymujemy słynny wzór Einsteina

$$\boxed{E=mc^2}$$

który ma ogromne znaczenie dla nauki i techniki.

Zauważmy, że w spoczynku

$$E = m_0 c^2 - \text{energia spoczynkowa}$$

Oznacza to, że cząstka w spoczynku ma ogromną energię.

Można to zaobserwować np. w zjawisku anihilacji cząstki i antycząstki (masa spoczynkowa obu cząstek znika i zamienia się energię promieniowania elektromagnetycznego). Jest to wykorzystywane w medycynie (tomografia PET).

Energia kinetyczna (w klasycznym rozumieniu, jako energia wynikająca z ruchu cząstki):

$$E_k = E - m_0 c^2$$

Równoważny (do $E=mc^2$) wzór na energię całkowitą

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Ważna uwaga: prawa zachowania energii całkowitej i całkowitego pędu pozostają słuszne w szczególnej teorii względności.

Zastosowania techniczne

1. Energia jądrowa

bezpośrednie wykorzystanie wzoru $E = mc^2$

istota sprawy:

masa jądra atomu $\neq \{ \Sigma (\text{mas protonów}) + \Sigma (\text{mas neutronów}) \}$

defekt masy:

$$\Delta m = M_{j.a.} - \sum m_p - \sum m_n$$

energia wiązania:

$$E_b = (\Delta m) c^2$$

dla jąder trwałych

$$E_b < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta m < 0$$

np. dla jądra helu ${}^4_2\text{He}$

$$\Delta m = M_{j.\text{He}} - 2m_p - 2m_n = -0,45 \cdot 10^{-28} \text{ kg} < 0$$

$$|\Delta m| \approx 50 m_e$$

$$E_b \approx -25 \text{ MeV}$$

podczas syntezy (tzw. fuzji) wydziela się

$$E = +25 \text{ MeV}$$

w przyrodzie – źródło energii Słońca i gwiazd

w technice (wojskowej) – tzw. bomba wodorowa

możliwe wykorzystanie pokojowe – elektrownia termojądrowa (w dalekiej przyszłości)

Inne podejście: nie synteza, lecz rozszczepienie jądra atomowego

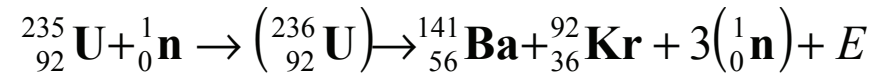
Niektóre jądra ciężkie mają nadwyżkę masy

$$\Delta m > 0, \quad E_b > 0$$

i dlatego są nietrwale.

Naturalny izotop uranu ${}_{92}^{235}\text{U}$ rozpada się samorzutnie, ale nie to wykorzystujemy.

Reakcja rozszczepienia:



${}_{92}^{236}\text{U}$ ma ogromną nadwyżkę masy

$$\Delta m \approx 2m_p \approx 3500m_e$$

Istotny jest lawinowy wzrost liczby neutronów (reakcja łańcuchowa).

Uzysk energii: z 1 g uranu 22000 kWh (tyle samo ze spalania 2500 kg węgla).

I zastosowanie militarne: bomba atomowa USA 1945

I zastosowanie pokojowe: elektrownia jądrowa ZSRR 1954

I atomowa łódź podwodna, „Nautilus”, USA, zwodowany 1954

I atomowy lodolamacz, „Lenin”, ZSRR, zwodowany 1957

2. Projektowanie i konstrukcja akceleratorów

LHC – największy na świecie – obwód 27 km

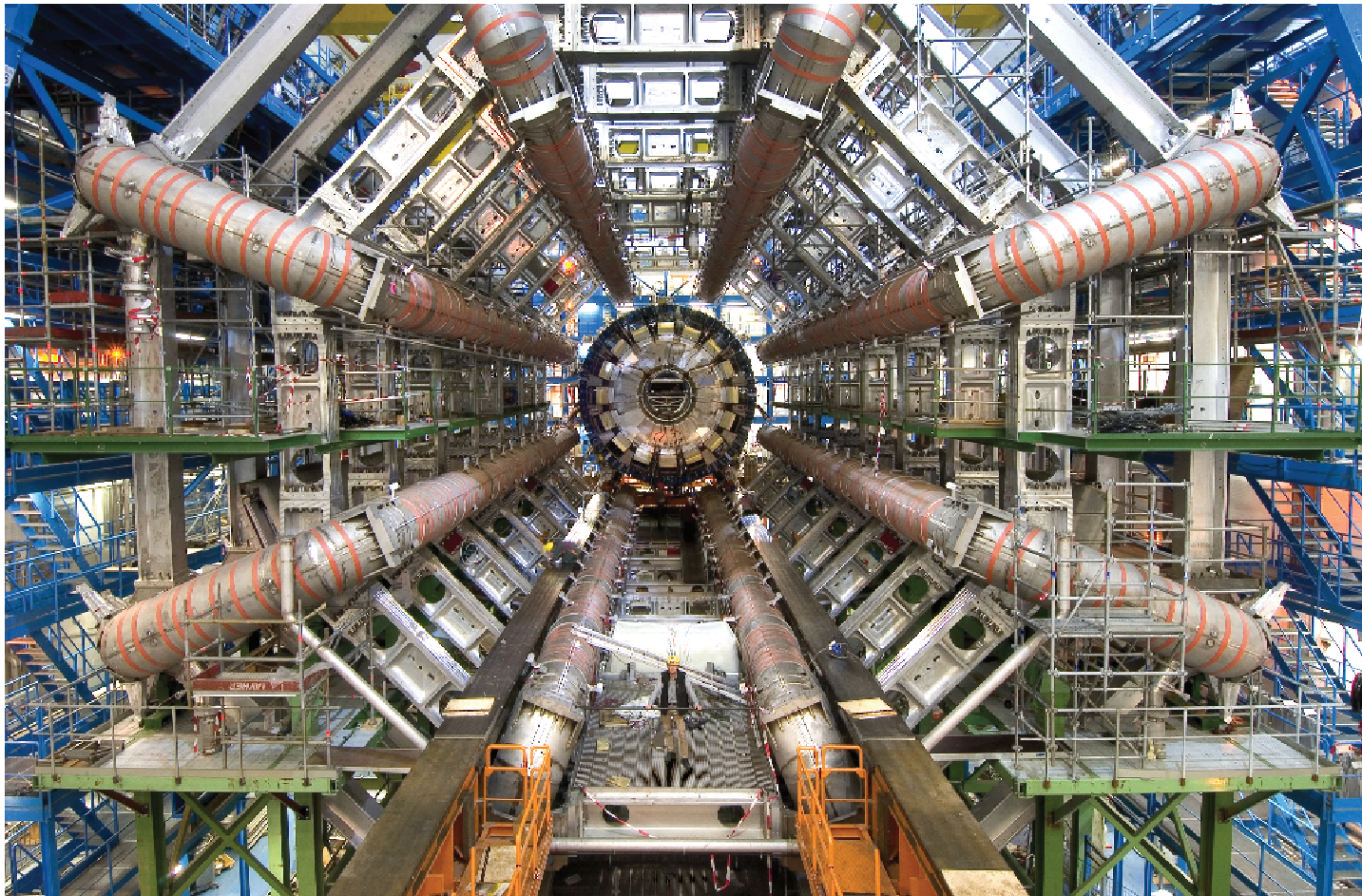
elektromagnes waży więcej niż wieża Eiffla

detektor cząstek ma rozmiary 6-piętrowego budynku

prędkość cząstek: $0,9999 c$

temperatura w punkcie zderzenia: 100 000 razy większa niż w środku Słońca

temperatura w układzie chłodzenia $< 2 K$

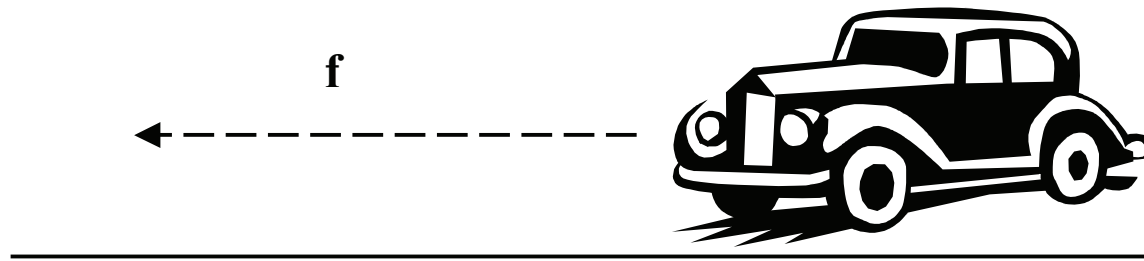


źródło: Science and Technology Facilities Council

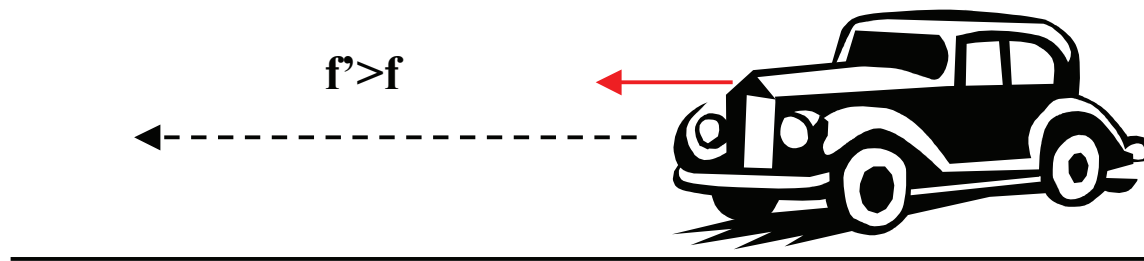
3. Radar policyjny

wykorzystuje relatywistyczny efekt Dopplera

a) zasada klasycznego efektu Dopplera



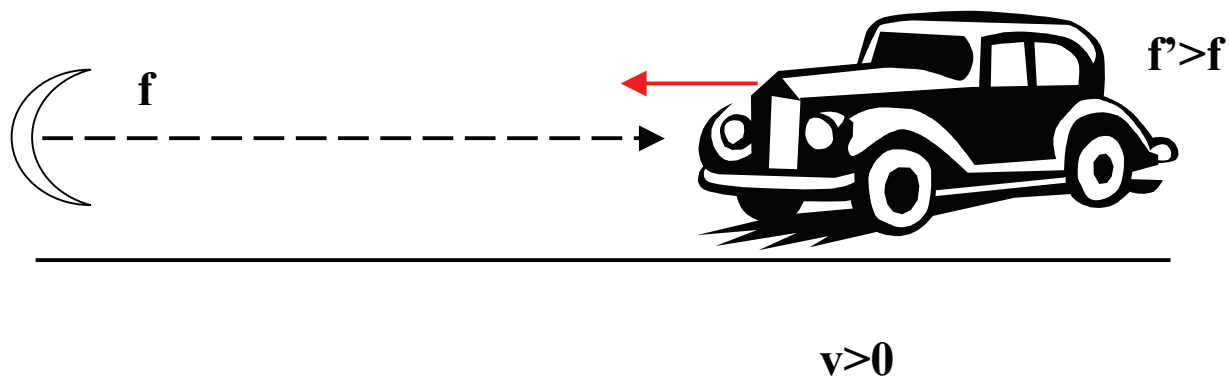
$v=0$



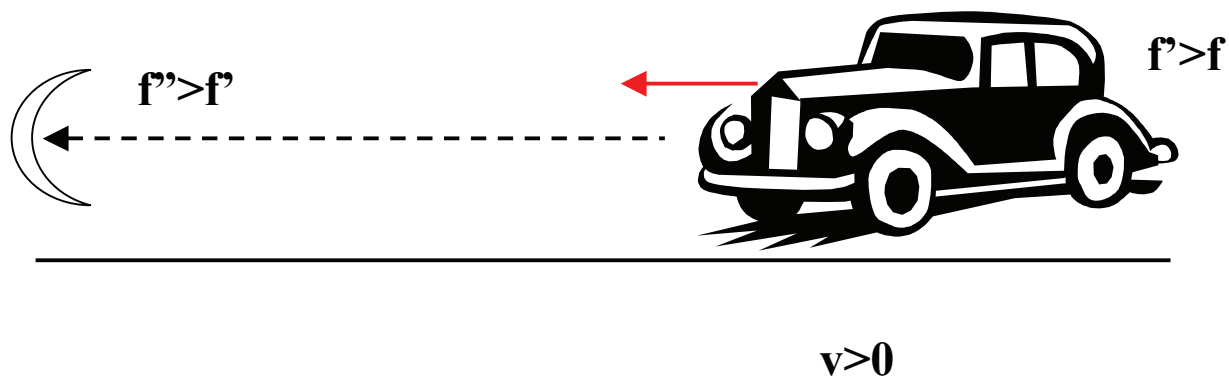
$v>0$

$$f' = \frac{c}{c-v} f, \text{ tutaj } c - \text{prędkość fali dźwiękowej}$$

b) zasada pomiaru radarem



$$f' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} f$$



$$f'' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} f'$$

$$f'' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} f \Rightarrow f'' = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} f \Rightarrow$$

$$v = \frac{f'' - f}{f'' + f} c$$

tutaj c – prędkość fali elektromagnetycznej (prędkość światła)

4. GPS –Global Positioning System
własność Departamentu Obrony USA
korzystanie – darmowe.



minimum 24 satelity, naprawdę 30, w odległości około 20 000 km
(źródło – Internet)



pierwsze odbiorniki GPS
(źródło – Internet)



**współczesne odbiorniki GPS
(źródło – Internet)**

Precyzyjne działanie systemu wymaga stosowania szczególnej i ogólnej teorii względności Einsteina.