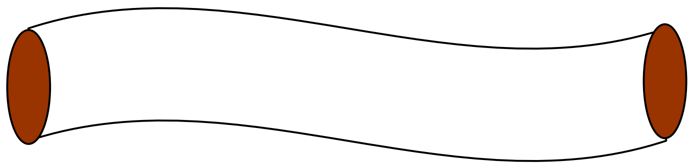
Elementy mechaniki bryły sztywnej

bryła sztywna = układ punktów materialnych o stałych odległościach wzajemnych

ruch bryły sztywnej – złożenie ruchu postępowego i obrotowego

Czysty ruch postępowy – trajektorie równoległe:



Wystarczy opis ruchu środka masy

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = m\,\vec{\mathbf{a}}_{\acute{s}m}$$

lub, jeśli zdefiniujemy

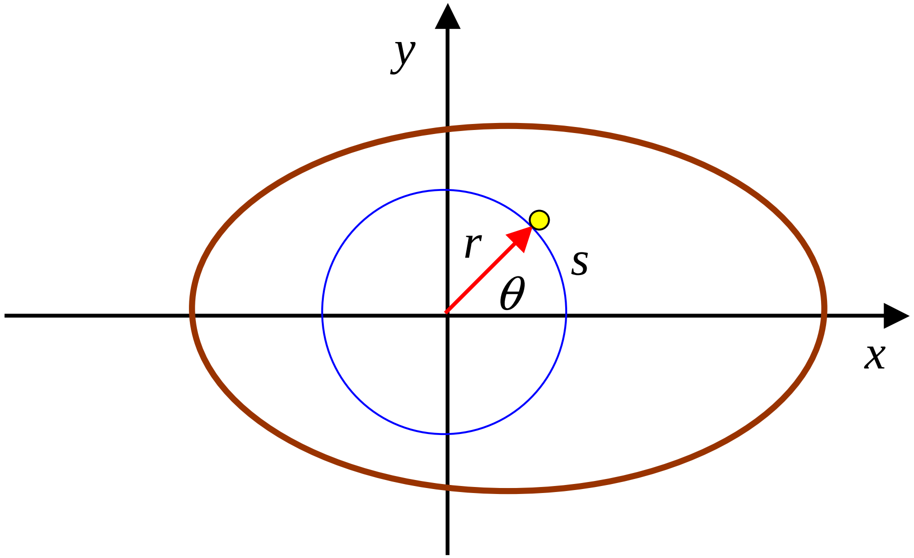
$$\vec{\mathbf{P}} = m\,\vec{\mathbf{v}}_{\acute{s}m}$$

to

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{P}}}{dt}$$

Czysty ruch obrotowy – jeżeli każdy punkt bryły porusza się po okręgu, a środki wszystkich okręgów leżą na linii prostej, zwanej osią obrotu.

Wybieramy dowolny punkt i przenosimy pojęcia z kinematyki punktu materialnego:



droga kątowa

$$\theta = \frac{s}{r}$$

prędkość kątowa

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$ **wektor $\vec{\omega}$ jest $\perp$ do płaszczyzny obrotu**

przyspieszenie kątowe

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Dynamika bryły sztywnej

Równanie ruchu postępowego (II zasada dynamiki):

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{zewn}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{P}}}{dt}$$

zapisane w układzie inercjalnym.

Równanie ruchu obrotowego (II zasada dynamiki):

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

również w układzie inercjalnym, ale ponadto wektory:

$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}}$ **- całkowity moment siły**

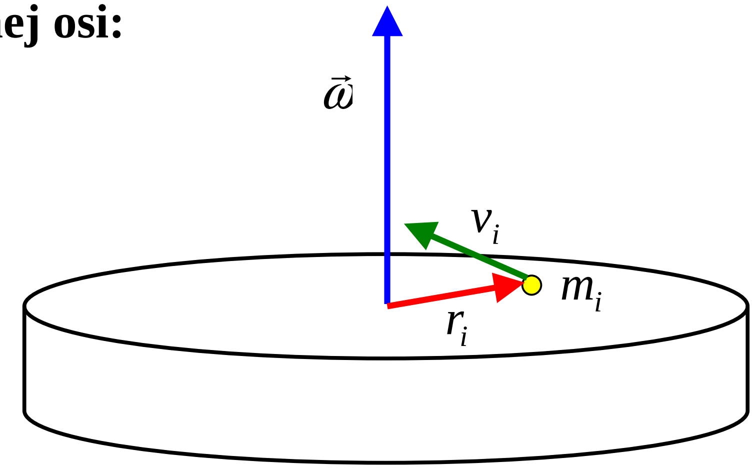
$\vec{\mathbf{L}}$ **- całkowity moment pędu**

powinny być mierzone względem <u>początku</u> inercjalnego układu odniesienia.

Ważna uwaga: drugie równanie pozostaje słuszne <u>także</u> wtedy, gdy $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}}$ i $\vec{\mathbf{L}}$ mierzymy względem <u>środka masy</u>.

Dynamika bryły sztywnej zależy od rozkładu masy.

Rozważmy obrót bryły wokół ustalonej nieruchomej osi:



energia kinetyczna punktu m_i

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

energia kinetyczna bryły

$$E_k = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots + \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 + \ldots + \tfrac{1}{2} m_n v_n^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}^2 = \tfrac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}^2$$

Zdefiniujmy moment bezwładności bryły względem osi

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

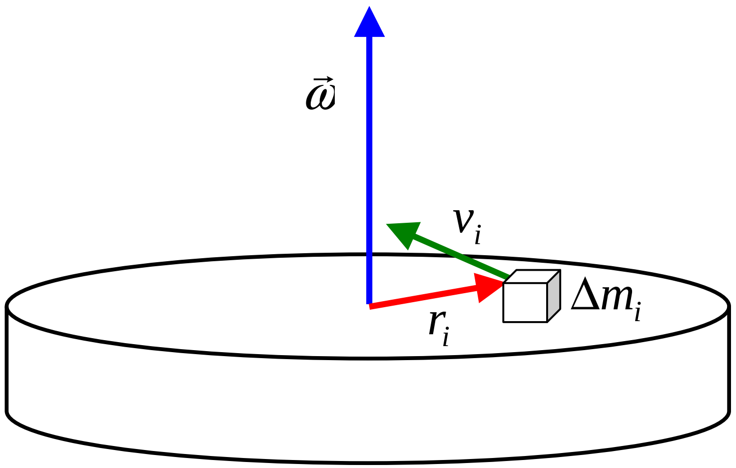
wtedy

$$E_k = \tfrac{1}{2} I \boldsymbol{\omega}^2$$

1. **Wynik jest ważny również dla osi ruchomej, ale przechodzącej przez środek masy i zachowującej ustalony kierunek w przestrzeni.**
2. **Energia kinetyczna całkowita:**

$$E_k = \frac{1}{2} m\, v_{śm}^2 + \frac{1}{2} I_{śm} \omega^2$$

3. **Moment bezwładności można też zdefiniować dla ciągłego rozkładu masy:**



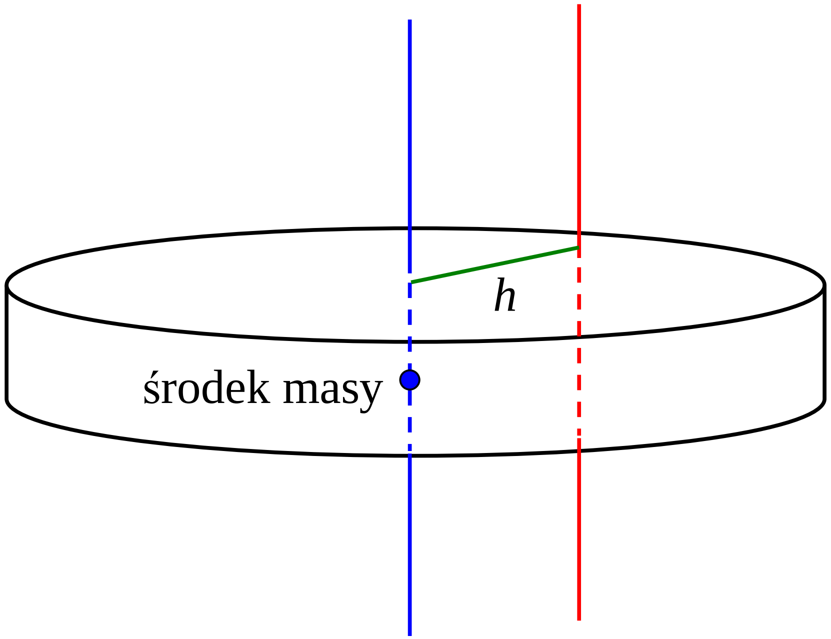
$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i) r_i^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 (\Delta m_i) = \int_V r^2 dm$$

Element całkowania dm **trzeba przedstawić jako** $\rho(r)\, dV$ **, gdzie** $\rho(r)$ **- gęstość** $\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$

$$I = \int_V r^2 \rho(r) dV$$

Bryła niekoniecznie musi obracać się wokół osi symetrii. Stosujemy wtedy

Twierdzenie Steinera



Jeżeli moment bezwładności danego ciała względem osi przechodzącej przez środek masy wynosi I_0, to moment bezwładności I względem innej osi <u>równoległej do niej</u> wynosi

$$I = I_0 + mh^2$$

gdzie m jest masą całej bryły, a h jest odległością między osiami (dowód pomijamy).

Moment pędu bryły sztywnej
(Kittel, Knight, Ruderman: "Mechanika")

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum \vec{\mathbf{l}}_i = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times \left(m_i \vec{\mathbf{v}}_i\right) = \sum m_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_i\right)$$

przypomnienie:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \left(\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}\right) = \left(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}\right)\vec{\mathbf{B}} - \left(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}\right)\vec{\mathbf{C}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_i\right) = \left(\vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_i\right)\vec{\omega} - \left(\vec{\mathbf{r}}_i \cdot \vec{\omega}\right)\vec{\mathbf{r}}_i$$

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - \left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right)\vec{\mathbf{r}}_i\right]$$

Jak widać $\vec{\mathbf{L}}$ na ogół nie jest równoległe do $\vec{\omega}$ (człon z $\vec{\mathbf{r}}_i$ psuje równoległość).
Rozpiszmy to na współrzędne

$$L_x = \sum m_i r_i^2 \omega_x - \sum m_i \left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right) x_i$$

$$L_y = \sum m_i r_i^2 \omega_y - \sum m_i \left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right) y_i$$

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega_z - \sum m_i \left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right) z_i$$

i pogrupujmy

$$\begin{aligned}
L_x &= \sum m_i\left(r_i^2 - x_i^2\right)\omega_x && - \sum m_i x_i y_i \omega_y && - \sum m_i x_i z_i \omega_z \\
L_y &= - \sum m_i x_i y_i \omega_x && + \sum m_i\left(r_i^2 - y_i^2\right)\omega_y && - \sum m_i y_i z_i \omega_z \\
L_z &= - \sum m_i x_i z_i \omega_x && - \sum m_i y_i z_i \omega_y && + \sum m_i\left(r_i^2 - z_i^2\right)\omega_z
\end{aligned}$$

Moment pędu wyraża się liniowo przez składowe wektora prędkości kątowej:

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Skrótowy zapis:

$$\vec{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{I}}\,\vec{\omega}$$

gdzie $\hat{\mathbf{I}}$ jest tensorem momentu bezwładności (jego składowe można odczytać porównując obydwa układy równań).
Skrótowa definicja: tensor (w przestrzeni 3-wymiarowej) = (macierz 3×3) + (przepis jak się ona zmienia przy zmianie układu współrzędnych).

Ważne uwagi:

zapis $\vec{\mathbf{L}} = I\,\vec{\omega}$, gdzie I jest liczbą, <u>na ogół</u> jest niepoprawny, bo wektory $\vec{\mathbf{L}}$ i $\vec{\omega}$ na ogół nie są równoległe.
W pewnych przypadkach zapis ten jest poprawny:

1. **jeżeli bryła symetryczna (kula, walec) obraca się wokół osi symetrii,**
2. **dla każdej bryły można znaleźć taki układ współrzędnych (związany z tą bryłą), że tensor $\hat{\mathbf{I}}$ jest macierzą diagonalną, tzn. ma wyrazy różne od zera tylko na głównej przekątnej. Osie tego układu są to <u>osie główne</u>. Jeżeli wybierzemy oś główną jako oś obrotu, np. oś z, to $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$, wtedy $\vec{\mathbf{L}} = (0, 0, I_{zz}\omega_z)) \Rightarrow \vec{\mathbf{L}} = I_{zz}\,\vec{\omega}$, a to znaczy, że wektory $\vec{\mathbf{L}}$ i $\vec{\omega}$ w tym przypadku są równoległe. Momenty bezwładności podane w tablicach są właśnie dla osi głównych.**
3. **jeżeli bryła nieznacznie odbiega od idealnej symetrii, to wzór ten jest słuszny w przybliżeniu.**

Pewne zagadnienia ruchu obrotowego bryły sztywnej

a) ruch względem osi nieruchomej

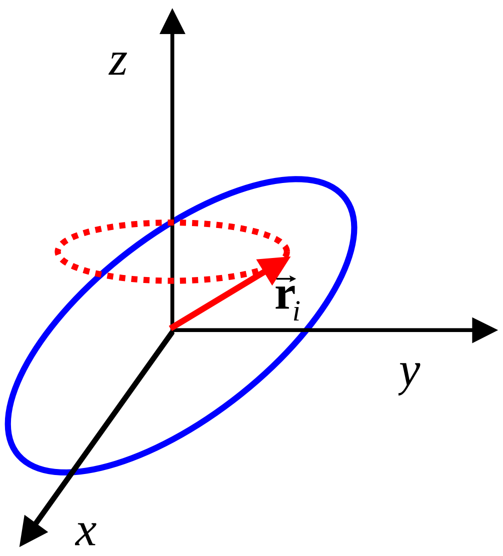
wybierzmy oś *z* jako oś nieruchomą

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega$$

$$L_x = I_{xz}\omega$$

$$L_y = I_{yz}\omega$$

$$L_z = I_{zz}\omega$$



r_{0i} **- rzut** $\vec{\mathbf{r}}_i$ **na płaszczyznę** *xy*

$$x_i = r_{0i}\cos(\omega t) \qquad I_{xz} = -\sum m_i r_{0i} z_i \cos(\omega t)$$

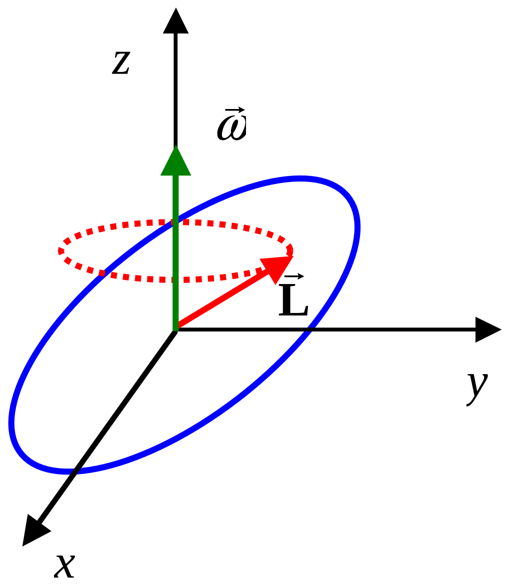
$$y_i = r_{0i}\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad I_{yz} = -\sum m_i r_{0i} z_i \sin(\omega t)$$

$$z_i = const \qquad I_{zz} = const$$

$$L_x = L_0\cos(\omega t)$$

$$L_y = L_0\sin(\omega t) \quad \Rightarrow$$ **precesja momentu pędu**

$$L_z = const$$



Problem „bicia osiowego”

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}}$$

Zmiana momentu pędu wymaga zewnętrznego momentu siły. Dostarcza go łożysko trzymające oś. Oś działa siłą reakcji na łożysko – „bicie osiowe”.

„Wyważanie” – przywracanie symetrii i redukcja „bicia osiowego”.

Uwaga: chociaż na ogół $L \neq I\omega$, to jednak $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$, gdzie I jest momentem bezwładności względem ustalonej osi obrotu.

b) ruch względem osi swobodnej

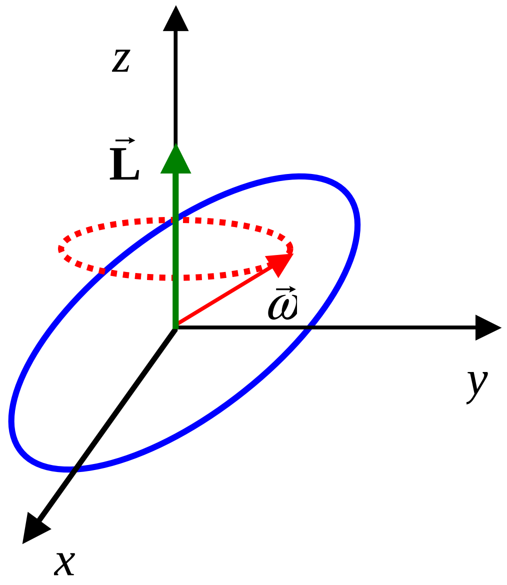
Osią swobodną może być tylko jedna z osi głównych.
Osią stabilną jest oś o największym momencie bezwładności.
W polu grawitacyjnym jednorodnym

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{zewn}} = 0$$

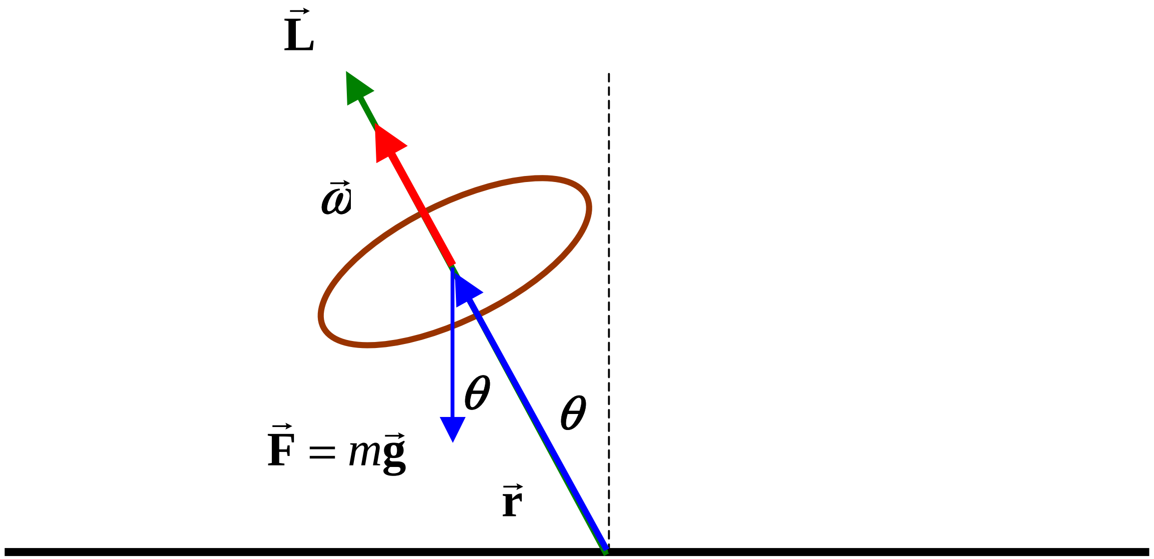
$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0$$

$$\vec{\mathbf{L}} = const$$

ale wtedy $\vec{\omega}$ ulega precesji (względność ruchu).



c) ruch bąka symetrycznego w polu sił o $\vec{\mathbf{M}} \neq 0$



moment sił grawitacji

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

powoduje ruch momentu pędu

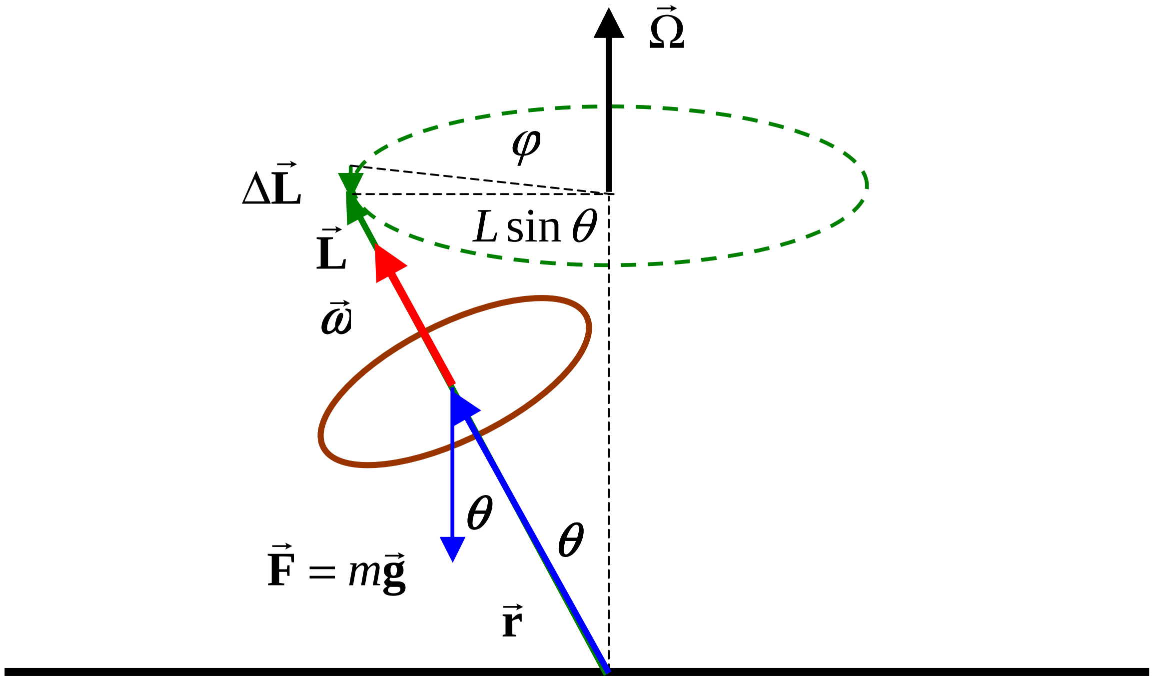
$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Moment sił jest prostopadły do płaszczyzny rysunku.

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} \approx \vec{\mathbf{M}}\Delta t$$

$\Delta\vec{\mathbf{L}}$ **jest też prostopadły do płaszczyzny rysunku**

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} \perp \vec{\mathbf{L}} \Rightarrow \textbf{precesja momentu pędu}$$



Prędkość kątowa tej precesji:

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

jest równa (dowód pomijamy):

$$\Omega = \frac{mgr}{I\omega}$$

Prędkość kątowa precesji bąka jest odwrotnie proporcjonalna do prędkości kątowej obrotu bąka.