Drgania

drganie = ruch drgający = ruch okresowy = ruch periodyczny

Ruch harmoniczny prosty (df. matematyczna) – taki ruch drgający, w którym położenie da się zapisać przy pomocy funkcji harmonicznej czasu

$$x = \sin t \quad \textbf{lub} \quad x = \cos t$$

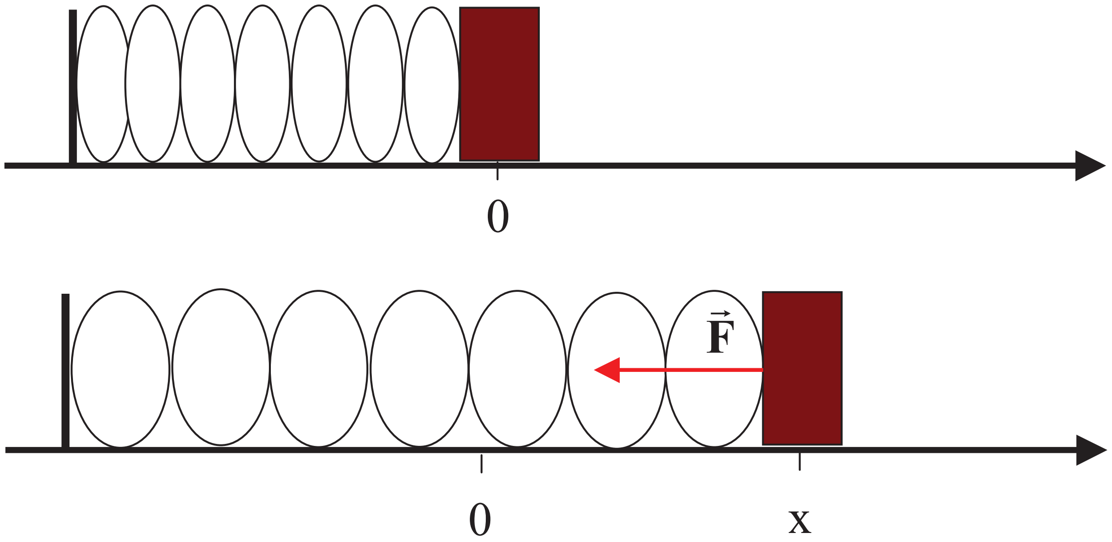
dopuszczalne jest złożenie z funkcją liniową

$$x = \sin(\omega\, t + \varphi) \quad \textbf{lub} \quad x = A\sin t + B \quad \textbf{lub} \quad x = A\sin(\omega\, t + \varphi) + B$$

Dowolny ruch drgający można przedstawić jako złożenie ruchów harmonicznych prostych.

Odkształcenie sprężyste – układ wraca do stanu początkowego po ustaniu oddziaływania.

Z doświadczenia: przy małych odkształceniach, siła działająca na układ i odkształcenie są do siebie proporcjonalne (prawo Hooke'a).



$$F = -k\,x$$

***k* – stała sprężysta**

$$F = ma$$

$$ma = -k\,x$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$ **równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach**

Rozwiązanie:

jeżeli $x = \sin t$**, to** $\frac{dx}{dt} = \cos t$**, a stąd** $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$

Spróbujmy ogólniejszej postaci funkcji harmonicznej $x = \sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{dx}{dt} = \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ **porównujemy z równaniem** $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

Ogólne rozwiązanie:

$x = A\sin(\omega t + \varphi)$ **,** **gdzie** $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **- ruch harmoniczny**

definicje:

A **- amplituda**

ω **- częstość kołowa**

$\omega t + \varphi$ **- faza ruchu,** φ **- faza początkowa**

Inne (równoważne) definicje ruchu harmonicznego prostego

kinematyczna: jest to ruch, w którym przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do wychylenia i przeciwnie skierowane;

dynamiczna: jest to ruch, w którym siła jest wprost proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie skierowana.

Inne możliwe zapisy ruchu harmonicznego

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

lub

$$x = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$$

Równoważność powyższej sumy z zapisem $x = A\sin(\omega t + \varphi)$**:**

$$a_1 = A\cos\varphi$$
$$a_2 = A\sin\varphi$$

Energia w ruchu harmonicznym prostym

Obliczmy energię w jakimś położeniu x

$$E = E_k + E_p$$

$$E_p = W$$

$$W = \int_0^{x'} -F\,dx = \int_0^{x'} kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{x'} = \frac{1}{2}kx'^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta)$$

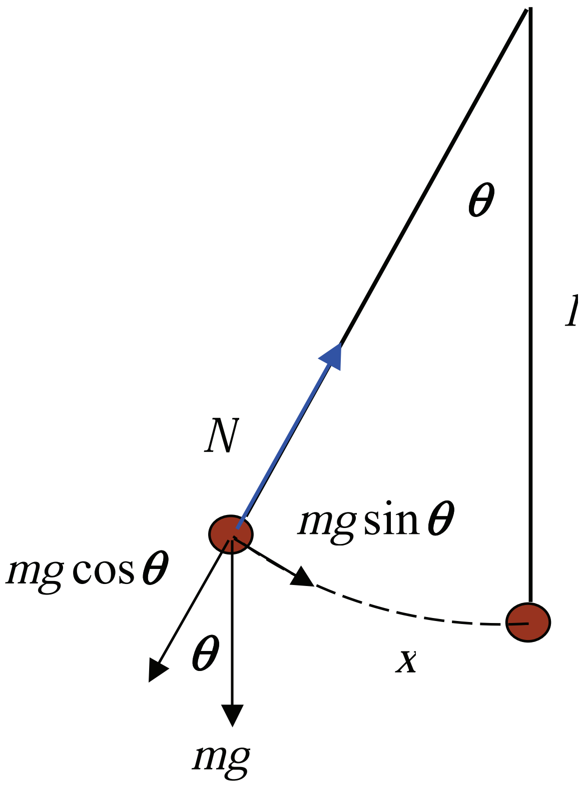
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E = const$$

Wniosek: oscylator harmoniczny nietłumiony jest układem zachowawczym.

Przykład: wahadło proste (matematyczne)



Uwaga: $N \neq mg\cos\theta$

$$N = mg\cos\theta + F_{\mathbf{doś}}$$

równanie ruchu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$x = l\theta$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad \textbf{równanie nieliniowe}$$

przybliżenie małych wychyleń: $\sin\theta \approx \theta$

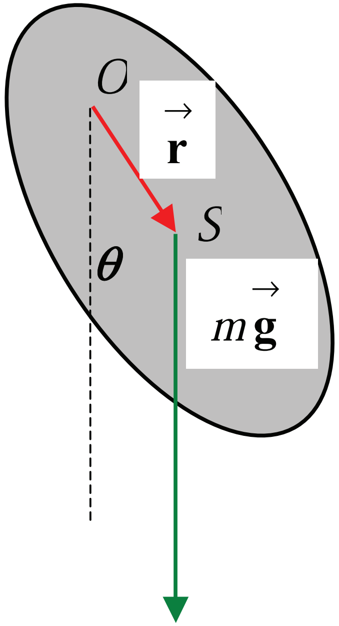
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

$\theta = \theta_{\mathbf{max}}\sin(\omega\, t + \varphi)$ **gdzie** $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, **stąd okres ruchu:** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

ponieważ $\sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = \sin(\omega\, t + 2\pi + \varphi) = \sin(\omega\, t + \varphi)$.

Wahadło fizyczne

bryła sztywna zawieszona na poziomej osi, powyżej swojego środka ciężkości



$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{g}}$$

$$M_z = -mgr\sin\theta$$

(minus, ponieważ oś *Ox* skierowana jest w dół, oś *Oy* w prawo, oś *Oz* do nas, a moment siły ciężkości za płaszczyznę rysunku)

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$$

I **- moment bezwładności względem osi obrotu, tj osi *Oz***

(w tym przypadku moment siły jest równoległy do osi obrotu, więc nie działa na oś, nie ma problemu tzw. „bicia osiowego" wektory $\vec{\mathbf{L}}$ i $\vec{\omega}$ są równoległe).

$$L_z = I\omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Równanie ruchu dla kierunku z:

$$-mgr\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\sin\theta \approx \theta$ **przybliżenie małych wychyleń**

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgr}{I}\theta$ **równanie ruchu harmonicznego prostego**

$\omega^2 = \frac{D}{I}$ **(*D=mgr,* moment kierujący)**

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$