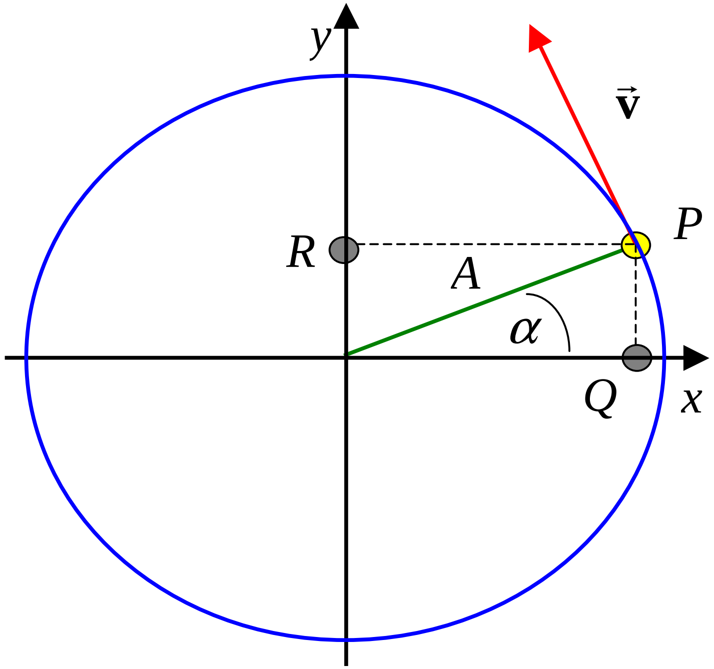
Związek między ruchem harmonicznym a ruchem jednostajnym po okręgu

Rozważmy rzuty Q i R punktu P na osie x i y:



$$x_Q = A\cos\alpha$$

$$y_R = A\sin\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \delta$$

$$x_Q = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$y_R = A\sin(\omega t + \delta)$$

Jeżeli punkt P porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to jego rzuty na osie układu współrzędnych poruszają się wzdłuż tych osi ruchem harmonicznym prostym.

Ruchy te mają tę samą amplitudę i częstość kołową, natomiast są przesunięte w fazie o $\pi/2$:

$$y_R = A\sin(\omega t + \delta) = A\cos(\pi/2 - (\omega t + \delta)) = A\cos(\omega t + \delta - \pi/2)$$

Składanie drgań

Złożenie dwóch ruchów harmonicznych prostych, w kierunkach prostopadłych, o tych samych *A* i ω, przesuniętych w fazie o $\pi/2$, daje ruch po okręgu.

Jeżeli *A* są różne:

$$x = A_x \cos(\omega t + \delta)$$
$$y = A_y \sin(\omega t + \delta)$$
$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$
$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1$$

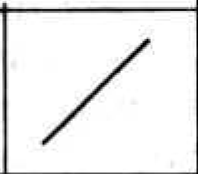
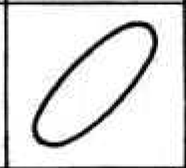
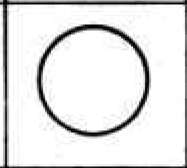
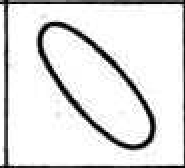
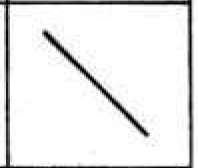
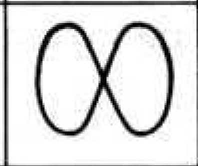
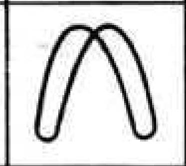
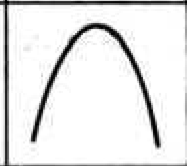
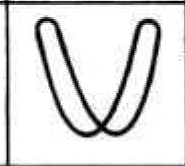
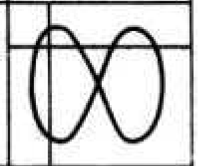
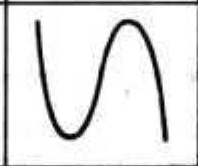
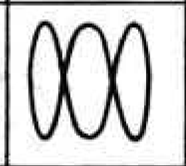
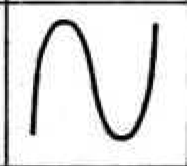
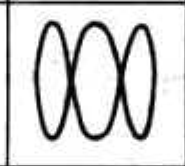
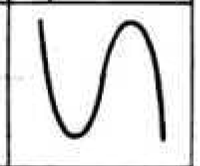
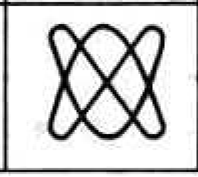
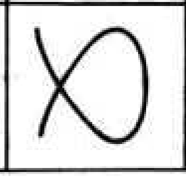
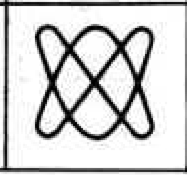
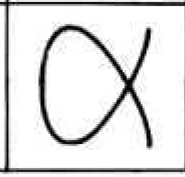
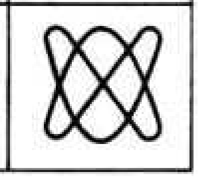
otrzymujemy ruch po elipsie.

Przypadek ogólny: złożenie dwóch ruchów harmonicznych prostych, w kierunkach prostopadłych, o różnych *A* i ω, przesuniętych w fazie o δ

$$x = A_x \cos(\omega_x t)$$
$$y = A_y \cos(\omega_y t + \delta)$$

daje tzw. figury Lissajous.

Figury Lissajous

różnica faz / stosunek częstotliwości	0°	45°	90°	135°	180°
$\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1$					
$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$					
$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{3}$					
$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{3}$					

stosunek częstotliwości = odwrotnemu stosunkowi ilości przecięć figury z osiami układu współrzędnych

Składanie drgań równoległych, dudnienia

$$y_1 = A\cos\omega_1 t$$
$$y_2 = A\cos\omega_2 t$$
$$y = y_1 + y_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Jest to drganie o częstości $\omega_{\text{śr}} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ **, o zmiennej amplitudzie** $2A\cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$**.**

Częstość modulacji amplitudy: $\omega_A = \left|\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right|$.

Jeżeli różnica częstości $|\omega_1 - \omega_2|$ **jest mała, to można zaobserwować powolne narastanie i zmniejszanie się amplitudy – są to dudnienia.**

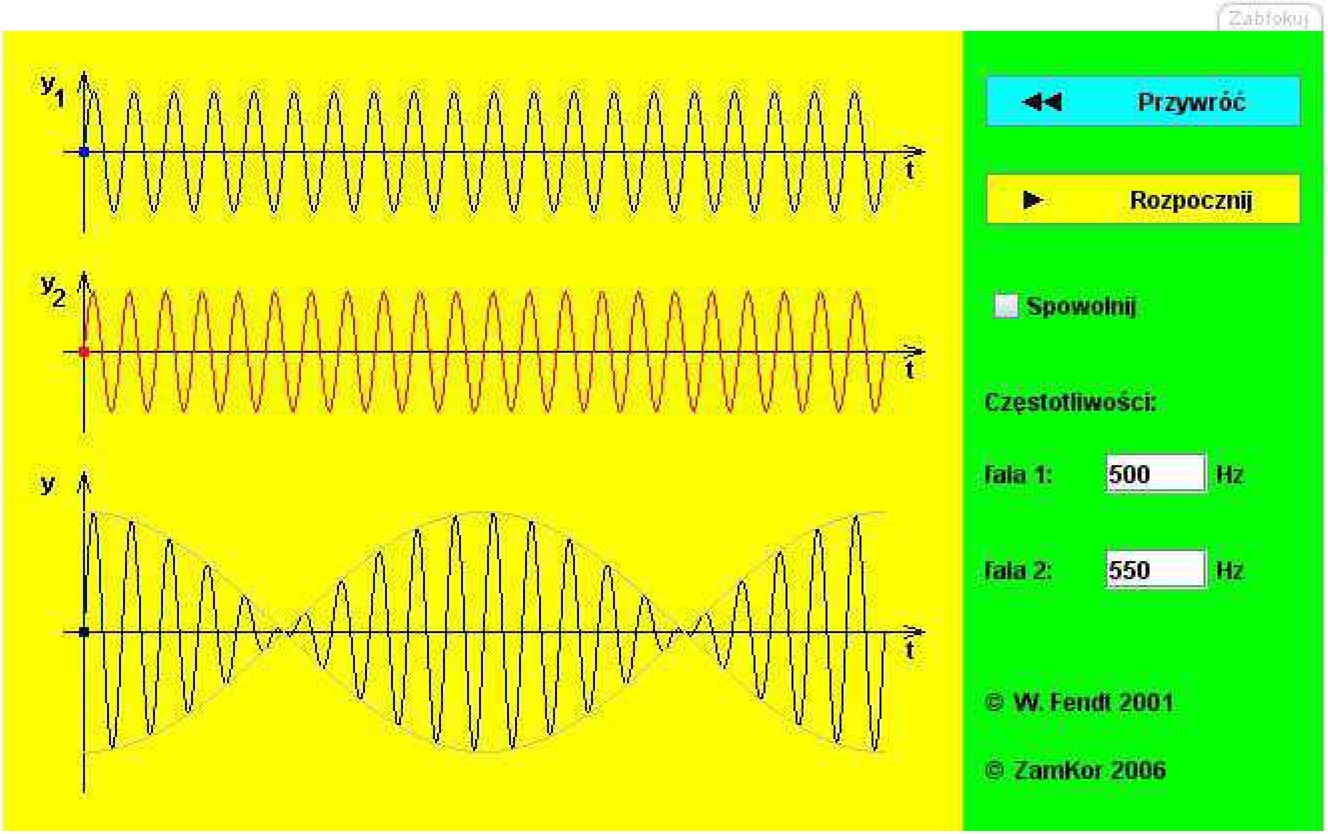
Okres modulacji amplitudy: $T_A = \dfrac{2\pi}{\omega_A}$**.**

Odbiór sygnału jest związany z przekazem energii: $E \propto A^2$

W okresie czasu T_A **kwadrat amplitudy 2 razy osiąga maksimum.**

Stąd okres dudnień: $T_D = \frac{1}{2}T_A$ **.**

Słyszalność dudnień akustycznych: wtedy, gdy $f_D = \dfrac{1}{T_D} \leq 7$ **Hz**



http://www.walter-fendt.de/ph14pl/beats_pl.htm

Drgania tłumione

Siły oporu w gazach i cieczach (dla małych prędkości):

$$\vec{\mathbf{F}} = -\gamma\, \vec{\mathbf{v}}$$

Równanie ruchu harmonicznego z tłumieniem (po prawej stronie musi być suma wszystkich sił):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}$$

Definiujemy:

częstość drgań własnych nietłumionych $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

współczynnik tłumienia $\beta = \frac{\gamma}{2m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu, zwyczajne, o stałych współczynnikach.

Szukamy rozwiązania: podstawiamy $x = e^{\alpha t}$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\beta\alpha\, e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

Ta funkcja będzie rozwiązaniem, jeżeli α **będzie spełniać równanie charakterystyczne:**

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

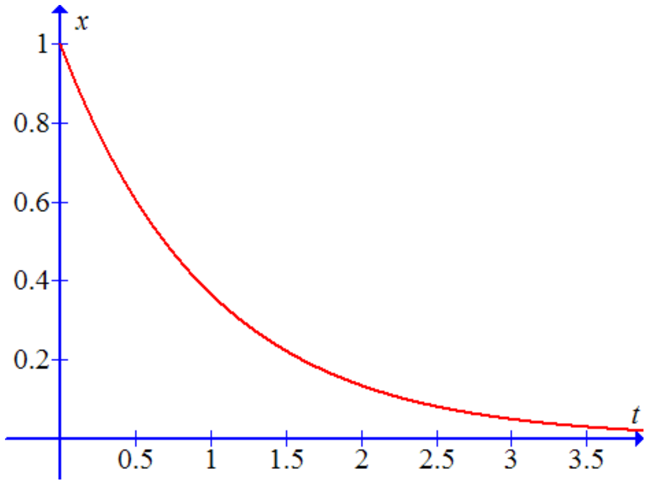
$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$

I. $\Delta \rangle 0$

$$\alpha_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

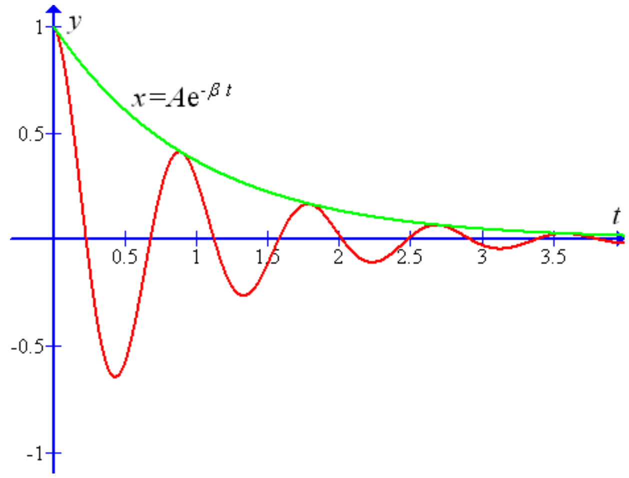
$$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$



ruch aperiodyczny

II. $\Delta \langle 0$ **- rozwiązanie równania charakterystycznego wymaga liczb zespolonych, ale *x*(*t*) jest rzeczywiste:**

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta), \qquad \textbf{gdzie } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



ruch pseudoperiodyczny (pseudookresowy)

pseudookres : $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

logarytmiczny dekrement tłumienia – logarytm naturalny stosunku dwóch amplitud w czasach t **i** $t + T$ **(różniących się o jeden pseudookres):**

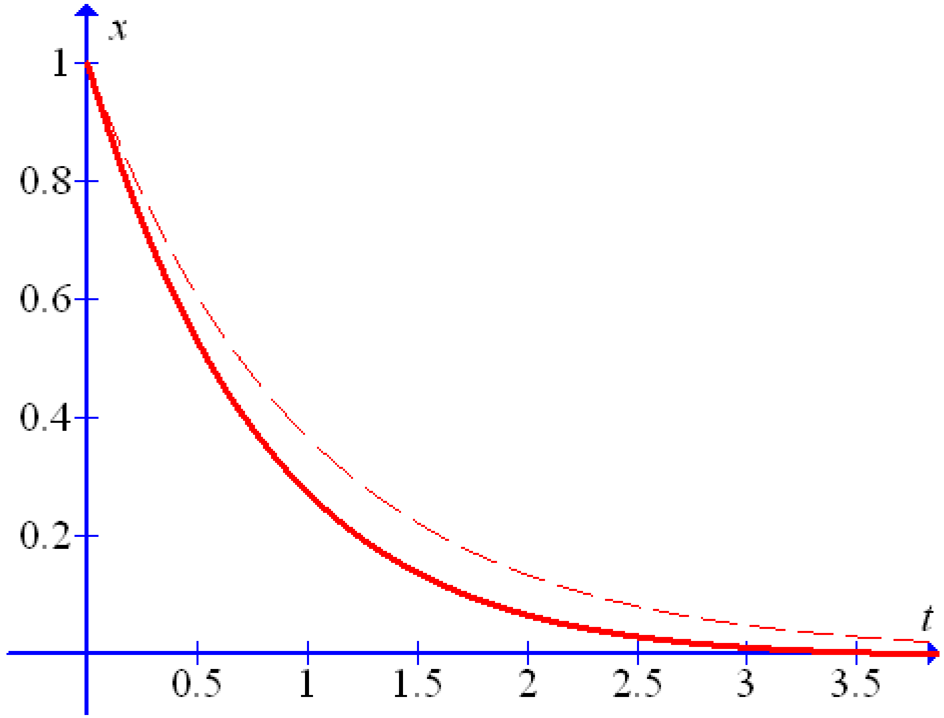
$$\lambda = \beta T$$

dobroć: $$Q = 2\pi \frac{energia\ \ zmagazynowana}{średnia\ \ energia\ \ tracona\ \ w\ 1\ okresie} = \frac{\pi}{\lambda}$$

III. $\Delta = 0$

wtedy $\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta$

$$x(t) = (A_1 + A_2\, t)\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}$$



ruch krytyczny (czerwona linia ciągła)

Ruch krytyczny jest przypadkiem granicznym – jest najszybciej gasnącym ruchem aperiodycznym. Bardzo małe zmniejszenie tłumienia powoduje przejście do ruchu pseudoperiodycznego. Jest to problem ważny dla techniki, gdy chcemy zoptymalizować wygaszanie drgań.

Drgania wymuszone

Równanie ruchu harmonicznego z tłumieniem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

uzupełniamy dodając siłę zewnętrzną zależną od czasu *f*(*t*)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + f(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Załóżmy siłę harmoniczną:

$$f(t) = F\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a\cos\omega t$$

Otrzymujemy

równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu, zwyczajne, o stałych współczynnikach, niejednorodne

Szkic rozwiązania

Twierdzenie matematyczne: pełne rozwiązanie takiego równania jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

to

$$x_j(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \quad \textbf{lub} \quad x_j(t) = A e^{-\beta t}\cos(\omega_j t + \delta) \quad \textbf{lub} \quad x_j(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}.$$

Szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego ma postać:

$$x_{nj} = A_0 \cos(\omega t + \delta)$$

gdzie

$$A_0 = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Każde rozwiązanie ogólne równania jednorodnego zmierza wykładniczo do zera.

Zostaje tylko

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Wnioski:

1. **Ruch wymuszony przez siłę harmoniczną jest ruchem harmonicznym prostym o tej samej częstości kołowej ω.**
2. **Amplituda i przesunięcie fazowe są jednoznacznie określone przez parametry siły wymuszającej i właściwości układu drgającego.**

Zbadajmy zależność A_0 i δ od ω.

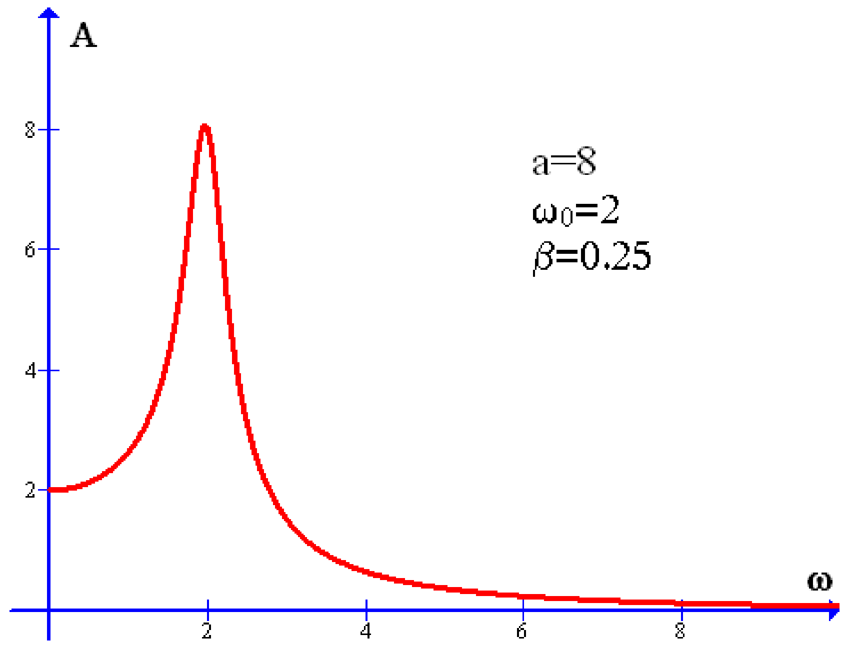
Można pokazać, że A_0 (traktowana jako funkcja ω) ma maksimum w punkcie

$$\omega_{\mathbf{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

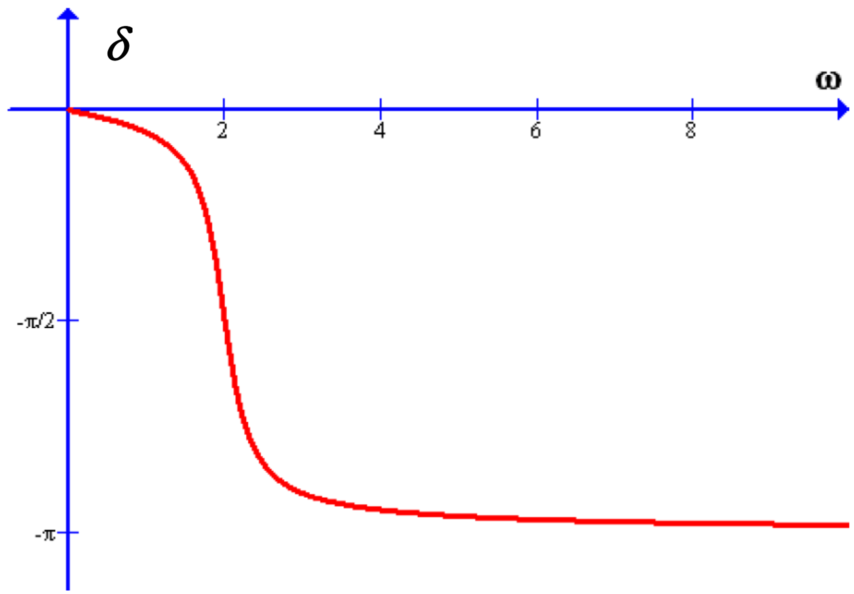
Zjawisko osiągania maksymalnej amplitudy drgań wymuszonych dla pewnej częstości nazywamy <u>rezonansem</u>.

ω_{rez} jest to częstość rezonansowa

Przykładowe wykresy amplitudy i przesunięcia fazowego:



rezonans amplitudy



przesunięcie fazowe