Równanie różniczkowe Bernoulliego
równania zupełne

1 Równanie różniczkowe Bernoulliego

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^r \tag{1}$$

nazywamy równaniem różniczkowym Bernoulliego.

Gdy $r = 0$, równanie (1) jest równaniem liniowym niejednorodnym, gdy $r = 1$ – równaniem liniowym jednorodnym. Zakładamy więc, że $r \neq 0$ i $r \neq 1$. Równanie (1) można sprowadzić do równania liniowego, podstawiając

$$z = y^{1-r} \tag{2}$$

Różniczkując (2) mamy

$$\frac{dz}{dx} = (1-r)y^{-r}\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

Mnożąc obustronnie równanie (1) przez $(1-r)y^{-r}$ otrzymujemy

$$(1-r)y^{-r}\frac{dy}{dx} = (1-r)p(x)y^{1-r} + (1-r)q(x)$$

stąd, zgodnie z (2) i (3)

$$\frac{dz}{dx} = (1-r)p(x)z + (1-r)q(x) \tag{4}$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe.

1.1 Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x}y^2 \tag{5}$$

Zgodnie z (2) (dla $r = 2$) podstawiamy $z = 1/y$. Według (4) dostajemy

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - \frac{\ln x}{x} \tag{6}$$

CORJ ma postać $z = Cx$. W celu odnalezienia CORN (uzmiennianie stałej) przyjmujemy $z = C(x)x$, $z' = C'(x)x + C(x)$ i zgodnie z (6)

$$C'(x)x + C(x) = C(x) - \frac{\ln x}{x}$$

Kolejno

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$C(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C_1$$

Wzór

$$z = C_1 x + \ln x + 1$$

przedstawia całkę ogólną (6), a wzór

$$y = \frac{1}{C_1 x + \ln x + 1}$$

całkę ogólną (5).

1.2 Równanie Riccatiego

Można wykazać, że jeżeli $y_1(x)$ jest całką szczególną *równania Riccatiego*

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

to można je sprowadzić do równania Bernoulliego podstawiając $z(x) = y(x) - y_1(x)$.

2 Równanie różniczkowe zupełne

Równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{7}$$

można zapisać w równoważnej postaci

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

Mówimy, że równanie (8) jest *równaniem różniczkowym zupełnym* gdy istnieje funkcja $u(x,y)$, której różniczka zupełna równa się lewej stronie tego równania, a więc gdy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \tag{9}$$

Na przykład równanie $2xdx + 3y^2dy = 0$ jest zupełne, ponieważ lewa strona tego równania jest różniczką zupełną funkcji $u = x^2 + y^3$.

Wiadomo, że istnieje funkcja, dla której są spełnione równości (9) wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{10}$$

Wtedy jedną z funkcji, dla których zachodzą równości (9) jest funkcja $u(x, y)$ wyrażona za pomocą wzoru

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt \tag{11}$$

Przypuśćmy, że funkcja $y(x)$ spełnia równanie (8), czyli

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y' = 0$$

Stąd, zgodnie z (9), otrzymujemy

$$\frac{\partial u(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y(x))}{\partial y} y' = 0$$

czyli

$$\frac{d}{dx} u(x, y(x)) = 0$$

i wobec tego

$$u(x, y(x)) = C \tag{12}$$

gdzie C jest dowolną stałą

2.1 Twierdzenie:

Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ klasy C^1 spełniają warunek (10) oraz $Q(x, y) \neq 0$, to wzór (12), w którym funkcja $u(x, y)$ jest określona równością (11), przedstawia całkę ogólną równania różniczkowego zupełnego (8), a ponadto przez każdy punkt (x_0, y_0) przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania.

2.2 Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania

$$(x^3 + xy^2 + 1)dx + (x^2 y + y^3)dy = 0 \tag{13}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$$

są spełnione założenia powyższego twierdzenia. Zgodnie z (11)

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} (x^3 + xy^2 + 1)dx + \int_{y_0}^{y} (x_0^2 y + y^3)dy = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + x + \frac{y^4}{4} + C_1$$

gdzie C_1 jest pewną stałą zależną od punktu (x_0, y_0). Zatem wzór

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + x + \frac{y^4}{4} = C$$

przedstawia całkę ogólną równania (13).

2.3 Przykład 2

Znaleźć calkę ogólną równania

$$(\sin xy + xy\cos xy + 1)dx + x^2\cos xy dy = 0 \tag{14}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy$$

są spełnione założenia twierdzenia.

Wyznaczamy funkcję $u(x,y)$ spełniającą oba warunki (9). Całkując względem x pierwszy z nich, tzn.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin xy + xy\cos xy + 1$$

otrzymamy

$$u(x,y) = x\sin xy + x + C_1(y)$$

gdzie $C_1(y)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną.

Drugi z warunków (9) przyjmuje teraz postać

$$x^2\cos xy + C_1'(y) = x^2\cos xy$$

skąd

$$C_1(y) = C_2$$

Wobec tego $u(x,y) = x\sin xy + x + C_2$ i zgodnie z (12) wzór

$$x\sin xy + x = C$$

przedstawia całkę ogólną równania (14).

2.4 Czynnik całkujący

Przypuśćmy, że równanie (8) nie jest równaniem różniczkowym zupełnym. Weźmy pod uwagę funkcję $\mu(x,y)$. Rozważmy równanie

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{15}$$

będące wynikiem obustronnego pomnożenia równania (8) przez $\mu(x,y)$. Mówimy, że funkcja $\mu(x,y)$ jest *czynnikiem całkującym* równania (8), gdy równanie (15) jest równaniem różniczkowym zupełnym, czyli

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

lub inaczej

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial Q}{\partial y} - \mu\frac{\partial P}{\partial x} \tag{16}$$

2.5 Przykład

Równanie

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0 \tag{17}$$

nie jest równaniem różniczkowym zupełnym, ponieważ

$$\frac{\partial P}{dy} = 2 + 2y \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{dx} = 1 + 4y$$

Mnożąc równanie (17) obustronnie przez funkcję $x + y^2$ otrzymamy

$$(x + y^2)(3x + 2y + y^2)dx + (x + y^2)(x + 4xy + 5y^2)dy = 0 \tag{18}$$

Jest to równanie różniczkowe zupełne, więc funkcja $\mu = x+y^2$ jest czynnikiem całkującym równania (17).

Rozwiązanie:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4$$

po scałkowaniu otrzymamy

$$u(x, y) = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + C_1(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + C'(y) = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$$

czyli $C'(y) = 5y^4$ stąd $C(y) = y^5 + C_2$

Ostatecznie całką ogólną równania (17) jest

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C$$

Poszukiwanie funkcji $\mu(x, y)$ na ogół nie jest łatwe. Zadanie to upraszcza się, gdy funkcja $\mu(x, y)$ jest funkcją tylko jednej zmiennej, czyli gdy $\mu = \mu(x)$ lub $\mu = \mu(y)$.

Równanie (16) można zapisać w postaci

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{P}{Q}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{19}$$

lub

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{Q}{P}\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{20}$$

1. $\mu = \mu(x)$. Wtedy $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$ i $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, więc zgodnie z (19)

   $$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{21}$$

   Stąd wynika, że prawa strona równania (21) jest funkcją tylko zmiennej x. Tak więc warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie czynnika całkującego zależnego tylko od x jest, by prawa strona równania (19) była funkcją tylko zmiennej x.

   Wówczas zgodnie z (21) mamy

   $$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx} \tag{22}$$

2. $\mu = \mu(y)$. Wtedy $\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$ i $\frac{\partial\mu}{\partial x} = 0$, więc zgodnie z (20)

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{23}$$

Stąd wynika, że prawa strona równania (23) jest funkcją tylko zmiennej y. Tak więc warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie czynnika całkującego zależnego tylko od y jest, by prawa strona równania (20) była funkcją tylko zmiennej y.

Wówczas zgodnie z (23) mamy

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} \tag{24}$$

2.6 Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania

$$(y^3 + y^2 - x^2y - 2xy)dx + (3y^2 + 2y - x^2)dy = 0 \tag{25}$$

Mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 2y - x^2 - 2x \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$$

zatem równanie (25) nie jest równaniem różniczkowym zupełnym. Ponieważ

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{3y^2 + 2y - x^2}{3y^2 + 2y - x^2} = 1$$

więc zgodnie z (22) funkcja $\mu(x) = \mathrm{e}^x$ jest czynnikien całkującym równania (25). Zatem

$$\mathrm{e}^x(y^3 + y^2 - x^2y - 2xy)dx + \mathrm{e}^x(3y^2 + 2y - x^2)dy = 0$$

jest równaniem różniczkowym zupełnym. Rozwiązaniem tego równania (a zatem i równania (25)) jest funkcja $u(x, y)$, dla której

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x(y^3 + y^2 - x^2y - 2xy) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{e}^x(3y^2 + 2y - x^2) \tag{26}$$

Całkując obustronnie pierwszą z równości (26) otrzymamy

$$u = \mathrm{e}^x(y^3 + y^2 - x^2y) + C_1(y)$$

Różniczkując względem y i porównując z drugą równością (26) mamy

$$\mathrm{e}^x(3y^2 + 2y - x^2) + C_1'(y) = \mathrm{e}^x(3y^2 + 2y - x^2)$$

stąd $C_1'(y) = 0$ i $C_1(y) = C_2$, zatem wzór

$$\mathrm{e}^x(y^3 + y^2 - x^2y) = C$$

przedstawia całkę ogólną równania (25).

2.7 Przykład 2

Znaleźć całkę ogólną równania

$$(x^2y - y\ln y)dx + (\frac{2}{3}x^3 - 2x\ln y - x)dy = 0 \tag{27}$$

Mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 - \ln y - 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x^2 - 2\ln y - 1$$

zatem równanie (27) nie jest równaniem różniczkowym zupełnym. Ponieważ

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{x^2 - \ln y}{x^2y - y\ln y} = \frac{1}{y}$$

więc zgodnie z (24) funkcja $\mu(y) = y$ jest czynnikien całkującym równania (27). Zatem

$$y(x^2y - y\ln y)dx + y(\frac{2}{3}x^3 - 2x\ln y - x)dy = 0$$

jest równaniem różniczkowym zupełnym. Rozwiązaniem tego równania (a zatem i równania (27)) jest funkcja $u(x,y)$, dla której

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2y^2 - y^2\ln y \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3}x^3y - 2xy\ln y - xy \tag{28}$$

Całkując obustronnie pierwszą z równości (28) otrzymamy

$$u = \frac{x^3}{3}y^2 - xy^2\ln y + C_1(y)$$

Różniczkując względem y i porównując z drugą równością (28) mamy

$$\frac{2}{3}x^3y - 2xy\ln y - xy + C_1'(y) = \frac{2}{3}x^3y - 2xy\ln y - xy$$

stąd $C_1'(y) = 0$ i $C_1(y) = C_2$, zatem wzór

$$\frac{1}{3}x^3y^2 - xy^2\ln y = C$$

przedstawia całkę ogólną równania (27).