Równania różniczkowe Lagrange'a i Clairauta

1 Wstęp

Weźmy pod uwagę równania różniczkowe postaci

$$y = g(x, y') \tag{1}$$

oraz

$$x = h(y, y') \tag{2}$$

Dla uproszczenia pochodną y' funkcji y będziemy oznaczać literą p.

1.1 Równanie (1)

Równanie (1) przyjmuje postać

$$y = g(x, p) \tag{3}$$

Różniczkując (3) obustronnie względem x otrzymamy

$$p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{4}$$

Jest to równanie różniczkowe rzędu pierwszego ze względu na funkcję $p(x)$.

Niech

$$p = \varphi(x, C) \tag{5}$$

gdzie C jest dowolną stałą będzie całką ogólną równania (4). Korzystając z (3) i (5) otrzymamy

$$y = g(x, \varphi(x, C)) \tag{6}$$

który przedstawia całkę ogólną równania (3).

Jeżeli założymy, że funkcja $p = p(x)$ ma funkcję odwrotną $x = x(p)$, to równanie (4) możemy zastąpić równoważnym równaniem

$$\frac{dx}{dp}\left(p - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial p} \tag{7}$$

Niech

$$x = \psi(p, C) \tag{8}$$

będzie całką ogólną równania (7). Wobec (3)

$$y = g(\psi(p, C), p) \tag{9}$$

Mówimy, że wzory (8) i (9) opisują *parametrycznie* całkę ogólną równania (3), przy czym p odgrywa rolę parametru. Jeżeli wyrugujemy p ze wzorów (8) i (9) to otrzymamy całkę ogólną w postaci (6).

1.2 Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania

$$y = 2y'x + (y')^2 + \frac{x^2}{2} \tag{10}$$

Różniczkując równanie (10) otrzymamy

$$p = 2\frac{dp}{dx}x + 2p + 2p\frac{dp}{dx} + x$$

skąd

$$2\frac{dp}{dx}(x + p) + x + p = 0$$

czyli

$$(x + p)\left(2\frac{dp}{dx} + 1\right) = 0 \tag{11}$$

Jeżeli $x + p = 0$ to $p = -x$ i

$$y = -\frac{x^2}{2} \tag{12}$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania (10). Jeżeli $x + p \neq 0$, mamy wobec (11)

$$2\frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

skąd

$$p = -\frac{1}{2}x + C$$

gdzie C jest dowolną stałą. Tak więc, zgodnie z (10) wzór

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + xC + C^2 \tag{13}$$

przedstawia całkę ogólną równania (10), która jednak nie obejmuje rozwiązania szczególnego (12).

1.3 Równanie (2)

Równanie (2) rozwiązuje się podobnie jak równanie (1). Jeżeli $y' = p$ to $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, przy czym $p = p(y)$. Zgodnie z (2)

$$x = h(y, p) \tag{14}$$

Różniczkując (14) obustronnie względem y otrzymamy

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial p}\frac{dp}{dy} \tag{15}$$

Jest to równanie różniczkowe rzędu pierwszego ze względu na funkcję $p(y)$.

Niech

$$p = \phi(y, C) \tag{16}$$

gdzie C jest dowolną stałą, będzie całką ogólną równania (15). Korzystając z (14) i (16) otrzymamy wzór

$$x = h(y, \phi(y, C)) \tag{17}$$

który przedstawia całkę ogólną równania (14).

1.4 Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania

$$x = (y')^2 - y' + 10 \tag{18}$$

Uwzględniając $y' = p$ mamy

$$x = p^2 - p + 10 \tag{19}$$

Różniczkując (19) obustronnie względem y otrzymamy

$$\frac{1}{p} = 2p\frac{dp}{dy} - \frac{dp}{dy}$$

skąd

$$(2p-1)\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} \tag{20}$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Całkując je dostajemy

$$y = \frac{2}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + C \tag{21}$$

Nie wyznaczając p z (21) możemy uważać, że wzory (19) i (21) opisują parametrycznie całkę ogólną równania (18).

2 Równanie różniczkowe Lagrange'a

Równanie różniczkowe

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \tag{22}$$

nazywamy *równaniem różniczkowym Lagrange'a*. Równanie to jest postaci (1). Konsekwentnie korzystając z oznaczenia $y' = p$ (22) przybiera postać

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \tag{23}$$

Różniczkując (23) obustronnie względem x otrzymamy

$$p = \varphi(p) + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \tag{24}$$

z funkcją niewiadomą $p(x)$. Równanie (24) możemy zastąpić równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{25}$$

z funkcją niewiadomą $x(p)$, które potrafimy scałkować

Niech

$$x = \omega(p, C) \tag{26}$$

będzie całką ogólną równania (25). Zgodnie z (23)

$$y = \varphi(p)\omega(p, C) + \psi(p) \tag{27}$$

Wzory (26) i (27) opisują *parametrycznie* całkę ogólną równania Lagrange'a.

2.1 Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania

$$y = (y')^2 x + \frac{1}{y'} \tag{28}$$

Zgodnie z (25) mamy

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p^3(p-1)} \tag{29}$$

CORN (29) jest

$$x = \frac{1-2p}{2p^2(1-p)^2} + \frac{C}{(1-p)^2} \tag{30}$$

Wobec (28) i (30) mamy

$$y = \frac{1-2p}{2(1-p)^2} + \frac{Cp^2}{(1-p)^2} + \frac{1}{p} \tag{31}$$

Wzory (30) i (31) opisują parametrycznie całkę ogólną równania (28) (nie zawiera ona jednak rozwiązania szczególnego $y = x + 1$).

3 Równanie różniczkowe Clairauta

Równanie różniczkowe

$$y = y'x + \psi(y') \tag{32}$$

nazywamy *równaniem różniczkowym Clairauta*. Równanie to jest szczególnym przypadkiem równania Lagrange'a. Korzystając z oznaczenia $y' = p$ (32) przybiera postać

$$y = px + \psi(p) \tag{33}$$

Różniczkując (33) obustronnie względem x otrzymamy

$$p = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

czyli

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0$$

skąd

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{34}$$

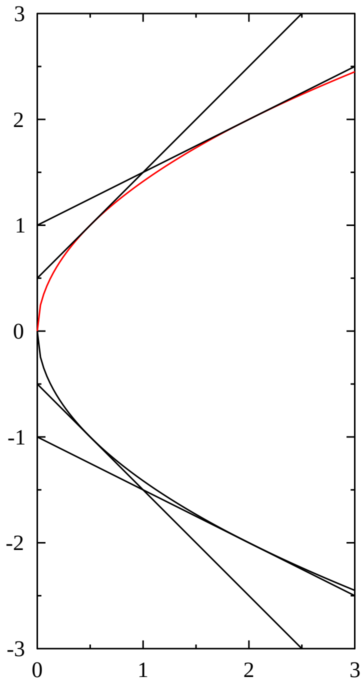
lub

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{35}$$

Wobec (34) mamy $p = C$, więc zgodnie z (33) jednoparametrowa rodzina prostych

$$y = Cx + \psi(C) \tag{36}$$

jest całką ogólną równania (32).



Rysunek 1: Graficzne rozwiązanie równania (39).

Z kolei wobec (35) mamy

$$x = -\psi'(p) \tag{37}$$

skąd na podstawie (33)

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p) \tag{38}$$

Można udowodnić, że krzywa określona parametrycznie równaniami (37) i (38) jest krzywą całkową równania (32).

3.1 Przykład

Rozwiązać równanie

$$y = xy' + \frac{1}{2y'} \tag{39}$$

Na podstawie (36) rodzina prostych

$$y = Cx + \frac{1}{2C} \tag{40}$$

jest całką ogólną równania (39). Zgodnie zaś z (37) i (38) równania

$$x = \frac{1}{2p^2} \quad y = \frac{1}{p} \tag{41}$$

opisują parametrycznie rozwiązanie osobliwe równania (39). Jeżeli z równań (41) wyrugujemy p to otrzymamy parabolę $y^2 = 2x$, która (bez swojego wierzchołka) jest obwiednią rodziny prostych (40) (patrz rysunek 1).