Równania różniczkowe rzędu drugiego sprowadzalne do równań różniczkowych rzędu pierwszego

1 Równanie typu $F(x, y', y'') = 0$

Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe postaci

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{1}$$

które charakteryzuje się tym, że oprócz drugiej pochodnej y'' niewiadomej funkcji $y(x)$ mogą w nim występować: zmienna niezależna x lub pierwsza pochodna y', nie występuje natomiast w tym równaniu sama niewiadoma funkcja $y(x)$.

Za pomocą podstawienia

$$y' = u \tag{2}$$

wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $u(x)$. Na podstawie (2) mamy $y'' = u'$, skąd wynika, że rozwiązanie równania (1) można sprowadzić do rozwiązania równania

$$F(x, u, u') = 0 \tag{3}$$

Niech całka ogólna równania (3) ma postać $\varphi(x, u, C_1) = 0$. Stąd, uwzględniając (2), otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$\varphi(x, u, C_1) = 0 \tag{4}$$

z funkcją niewiadomą $y(x)$. Zatem rozwiązując równanie (4) otrzymamy całkę ogólną równania (1). W całce tej oprócz stałej C_1 wystąpi jeszcze druga stała dowolna C_2.

1.1 Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania

$$4y' = 4xy'' - (y'')^2 \tag{5}$$

Podstawiamy

$$y' = u(x) \tag{6}$$

skąd $y'' = u'$. W ten sposób rozwiązywanie równania (5) sprowadzamy do rozwiązywania równania Clairauta

$$u = xu' - \frac{1}{4}(u')^2 \tag{7}$$

Całka ogólna równania (7) ma postać $u = C_1 x - C_1^2/4$. Stąd, wobec (6) mamy $y' = C_1 x - C_1^2/4$, a więc

$$y = \frac{1}{2}C_1 x^2 - \frac{1}{4}C_1^2 x + C_2$$

jest całką ogólną równania (5). Oprócz całki ogólnej, równanie Clairauta (7) ma jeszcze całkę szczególną $u = x^2$. Zatem, zgodnie z (6), równanie (5) ma jeszcze jednoparametrową rodzinę krzywych całkowych $y = x^3/3 + C$, nie objętych całką ogólną.

1.2 Przykład 2

Znaleźć całkę szczególną równania

$$y'' = y' \ln y' \tag{8}$$

spełniającą warunki początkowe $y(0) = 2$ i $y'(0) = 1$.

Podstawiamy

$$y' = u(x) \tag{9}$$

skąd $y'' = u'$. W ten sposób rozwiązywanie równania (8) sprowadzamy do rozwiązywania równania różniczkowego rzędu pierwszego

$$u' = u \ln u \tag{10}$$

Całka ogólna równania (10) ma postać $\ln u = C_1 \mathrm{e}^x$. Stąd, wobec (9) mamy $\ln y' = C_1 \mathrm{e}^x$. Korzystając z drugiego warunku początkowego znajdujemy $C_1 = 0$. Zatem $y' = 1$ oraz $y = x + C_2$. Korzystając z pierwszego warunku początkowego znajdujemy $C_2 = 2$. Ostatecznie

$$y = x + 2$$

jest całką szczególną równania (8).

2 Równanie typu $F(y, y', y'') = 0$

Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe postaci

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{11}$$

które charakteryzuje się tym, że oprócz drugiej pochodnej y'' niewiadomej funkcji $y(x)$ mogą w nim występować: niewiadoma funkcja y lub pierwsza pochodna y', nie występuje natomiast w tym równaniu zmienna niezależna x.

W równaniu (11) będziemy traktować y jako zmienną niezależną nowej niewiadomej funkcji $u(y)$, którą wprowadzimy za pomocą podstawienia

$$y' = u(y) \tag{12}$$

Na podstawie (12) mamy wtedy $y'' = u'y' = u'u$, skąd wynika, że rozwiązywanie równania (11) można sprowadzić do rozwiązywania równania

$$F(y, u, uu') = 0 \tag{13}$$

Niech $\varphi(y, u, C_1) = 0$ będzie całką ogólną równania (13). Uwzględniając (12) otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$\varphi(y, y', C_1) = 0 \tag{14}$$

z funkcją niewiadomą $y(x)$, którego rozwiązanie jest całką ogólną równania (11).

2.1 Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania

$$1 + (y')^2 = 2yy'' \tag{15}$$

Podstawiamy

$$y' = u(y) \tag{16}$$

skąd $y'' = uu'$. W ten sposób rozwiązywanie równania (15) sprowadzamy do rozwiązywania równania rzędu pierwszego

$$2yuu' = 1 + u^2 \tag{17}$$

Całka ogólna równania (17) ma postać $1 + u^2 = C_1 y$. Stąd, wobec (16) mamy $(y')^2 = C_1 y - 1$, a więc $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Po scałkowaniu ostatniej równości otrzymamy całkę ogólną równania (15)

$$y = \frac{C_1}{4}(C_2 \pm x)^2 + \frac{1}{C_1}$$

2.2 Przykład 2

Po dodatniej półosi Ox porusza się punkt materialny M o masie m pod wpływem siły odwrotnie proporcjonalnej do trzeciej potęgi odciętej punktu M i równoległej z osią Ox. Znaleźć równanie ruchu tego punktu dla $x \geq 1$.

Zgodnie z drugą zasadą Newtona mamy

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^3} \tag{18}$$

gdzie k jest perną stałą dodatnią.

Wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $u(x)$ za pomocą podstawienia

$$\frac{dx}{dt} = u(x) \tag{19}$$

skąd

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx}u \tag{20}$$

Rozwiązanie równania (18) sprowadzamy więc do rozwiązywania równania rzędu pierwszego

$$mu\frac{du}{dx} = \frac{k}{x^3} \tag{21}$$

Całkując równanie (21) otrzymujemy

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{k}{m}\frac{1}{2x^2} + \frac{k}{m}\frac{1}{2C_1}$$

gdzie C_1 jest stałą z przedziału $(0,\ 1)$. Stąd

$$u = a\sqrt{\frac{1}{C_1} - \frac{1}{x^2}}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Na podstawie (19) mamy

$$\frac{dx}{dt} = a\sqrt{\frac{1}{C_1} - \frac{1}{x^2}} \tag{22}$$

Rozdzielając zmienne otrzymujemy

$$\int \frac{x\sqrt{C_1}dx}{\sqrt{x^2 - C_1}} = a\int dt$$

stąd

$$\sqrt{C_1}\sqrt{x^2 - C_1} = at + aC_2$$

gdzie C_2 jest stałą dodatnią. Tak więc

$$x^2 = \frac{a^2}{C_1}(t + C_2)^2 + C_1$$

jest szukanym równaniem ruchu punktu meterialnego M.

3 Równanie jednorodne $F(x, y, y', y'') = 0$

Weźmy pod uwagę równania różniczkowe postaci

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{23}$$

które charakteryzuje się tym, funkcja F jest *jednorodna względem zmiennych* y, y' i y'', tzn. istnieje liczba naturalna m taka, że dla każdego $x \in (a,\ b)$ i dla każdego k zachodzi

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^m F(x, y, y', y'') \tag{24}$$

Liczbę m nazywamy *stopniem jednorodności funkcji* F.

W celu sprowadzenia rozwiązywania równania (23) do rozwiązywania pewnego równania różniczkowego rzędu pierwszego wprowadzamy nową funkcję $u(x)$ za pomocą podstawienia

$$y = \mathrm{e}^u \tag{25}$$

skąd

$$y' = \mathrm{e}^u u', \quad y'' = \mathrm{e}^u (u')^2 + \mathrm{e}^u u'' \tag{26}$$

Podstawiając w miejsce y, y' i y'' w równaniu (23) odpowiednie wyrażenia zgodnie ze wzorami (25) i (26) oraz korzystając z (24) otrzymamy równanie

$$\mathrm{e}^{mu} F(x, 1, u', (u')^2 + u'') = 0$$

czyli

$$F(x,1,u',(u')^2+u'')=0 \tag{27}$$

Równanie (27) jest rzędu drugiego, ale nie występuje w nim explicite funkcja $u(x)$. Rozwiązanie równania (27), a więc i (23), możemy więc sprowadzić do rozwiązywania odpowiedniego równania rzędu pierwszego.

3.1 Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania

$$xy'[yy''-(y')^2]-y(y')^2-x^4y^3=0 \tag{28}$$

Zauważamy, że lewa strona równania (28) jest funkcją jednorodną stopnia trzeciego względem zmiennych y, y' i y''. Na podstawie wzorów (25) i (26) otrzymujemy równanie

$$xu'u''-(u')^2-x^4=0 \tag{29}$$

Podstawiamy

$$u'=z \tag{30}$$

skąd $u''=z'$ i otrzymujemy równanie

$$z'=\frac{1}{x}z+x^3z^{-1}$$

które jest równaniem Bernoulliego.

Całka ogólna tego równania ma postać $z=x\sqrt{x^2+C_1}$, gdzie C_1 jest dowolną stałą. Stąd na podstawie (30) obliczamy całkę ogólną równania (29)

$$u=\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{\frac{3}{2}}+\ln C_2$$

gdzie C_2 jest dowolną stałą dodatnią. Zgodnie z (25) funkcja

$$y=C_2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{\frac{3}{2}}} \tag{31}$$

jest całką ogólną równania (28).