Metoda Różnic Skończonych (FDM)
na przykładzie równania konwekcji – dyfuzji

1 Równanie konwekcji – dyfuzji

Równanie konwekcji–dyfuzji ma postać:

$$c\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \tag{1}$$

Warunki brzegowe:

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

Szukamy funkcji $[0,1] \ni x \to u(x) \in \mathcal{R}$
Stała c jest dana
Funkcja $[0,1] \ni x \to f(x) \in \mathcal{R}$ jest dana

2 Rozwiązanie numeryczne wykorzystujące FDM

1. Dzielimy przedział $[0,1]$ na n podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ o długości $h = \frac{1}{n}$; wtedy $x_i = ih = \frac{i}{n}$.

2. Zapisujemy równanie konwekcji – dyfuzji używając notacji x_i

$$cu'(x_i) - u''(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1$$

$$u(x_0) = u(0) = u_0$$

$$u(x_n) = u(1) = u_1$$

3. Przybliżamy pochodne (różnice centralne)

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2}$$

4. Wprowadzamy układ równań na $u(x_i)$

$$c\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} - \frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} = f(x_i)$$

$$u(x_{i-1})\left[-\frac{c}{2h}-\frac{1}{h^2}\right]+u(x_i)\left[\frac{2}{h^2}\right]+u(x_{i+1})\left[\frac{c}{2h}-\frac{1}{h^2}\right]=f(x_i)$$

Dostajemy więc układ $n-1$ równań (dla $i=1,\ldots,n-1$) z $n-1$ niewiadomymi $u(x_i)$, $i=1,\ldots,n-1$. Układ ten ma postać

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b} \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ jest macierzą trójprzekątniową o wartościach $\frac{2}{h^2}$ na głównej przekątnej, wartościach $-\frac{c}{2h}-\frac{1}{h^2}$ pod główną przekątną i wartościach $\frac{c}{2h}-\frac{1}{h^2}$ nad główną przekątną. Dla $u_0=u_1=0$ wektor wyrazów wolnych ma postać

$$\boldsymbol{b}=[f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_{n-1})]^{\mathrm{T}}$$

Rozwiązanie równania (1) sprowadza się więc do rozwiązania układu równań liniowych (2).

3 Rozwiązanie dokładne

Dla funkcji $f(x)=ax+b$ rozwiązanie analityczne równania (1) jest następujące:

$$u(x)=\frac{k}{c}(\exp(cx)-1)+\frac{a}{2c}x^2+(\frac{a}{c^2}+\frac{b}{c})x+u_0$$

gdzie

$$k=\frac{2c^2(u_1-u_0)-(ac+2a+2bc)}{2c(\exp(c)-1)}$$