Metoda Różnic Skończonych
(Finite Difference Method)

1 Aproksymacja pierwszej pochodnej - różnice rzędu pierwszego

Z definicji:

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

Dla małego h:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2}$$

jest różnicą prawostronną (w przód, *forward difference*). Możemy też zbliżać się do punktu x z lewej strony, wtedy:

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \tag{3}$$

Jest to różnica lewostronna (w tył, *backward difference*). Gdy zbliżamy się do punktu x z obu stron to dostajemy różnicę centralną (*central difference*).

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{4}$$

1.1 Przykład

$$f(x) = 6x^3 - 4x + 2$$
$$f'(x) = 18x^2 - 4$$
$$f'(1) = 18 - 4 = 14$$

Aproksymacja róznicami prawostronnymi:

h	$(f(1+h)-f(1))/h$	błąd
1	$(f(2)-f(1))/1 = 38$	24
0.1	$(f(1.1)-f(1))/0.1 = 15.86$	1.86
0.01	$(f(1.01)-f(1))/0.01 = 14.1806$	0.1806

Aproksymacja róznicami lewostronnymi:

h	$(f(1)-f(1-h))/h$	błąd
1	$(f(1)-f(0))/1=2$	12
0.1	$(f(1)-f(0.9))/0.1=12.26$	1.74
0.01	$(f(1)-f(0.99))/0.01=13.8206$	0.1794

Aproksymacja róznicami centralnymi:

h	$(f(1+h)-f(1-h))/2h$	błąd
1	$(f(2)-f(0))/2=20$	6
0.1	$(f(1.1)-f(0.9))/0.2=14.06$	0.06
0.01	$(f(1.01)-f(0.99))/0.02=14.0006$	0.0006

Z tabeli wynika, że metoda różnicy centralnej jest najszybciej zbieżna. Uzasadnienie:

Z szeregu Taylora:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots \tag{5}$$

Wyznaczając stąd $f'(x)$ dostajemy

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots\right). \tag{6}$$

Stąd błąd aproksymacji różnicą prawostronną wynosi

$$\varepsilon_p=\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x)+\ldots=O(h). \tag{7}$$

Możemy powiedzieć, że błąd jest rzędu h, lub

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h). \tag{8}$$

Jeżeli w szeregu Taylora zastąpimy h przez $-h$ to:

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots \tag{9}$$

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}-\frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots\right). \tag{10}$$

Stąd błąd aproksymacji różnicą lewostronną wynosi

$$\varepsilon_l=\frac{h}{2}f''(x)-\frac{h^2}{6}f'''(x)+\ldots=O(h). \tag{11}$$

Odejmując stronami równania (5) i (9) dostajemy schemat różnicy centralnej:

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{2h^3}{3!}f'''(x)+\ldots \tag{12}$$

Stąd

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{3!}f'''(x)-\ldots \tag{13}$$

$$\varepsilon_c=\frac{h^2}{6}f'''(x)+\ldots=O(h^2). \tag{14}$$

Czyli metody oparta na różnicy lewostronnej i prawostronnej są $O(h)$, metody oparte na różnicy centralnej są $O(h^2)$. Oznacza to, że np. dwukrotne zmniejszenie kroku h powoduje również dwukrotne zmniejszenie błędu aproksymacji dla metody prawostronnej i lewostronnej, natomiast czterokrotne zmniejszenie tego błędu dla różnicy centralnej.

2 Aproksymacja drugiej pochodnej

Dodając stronami równania (5) i (9) dostajemy

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(x) \dots \tag{15}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} f^{(4)}(x) + \dots \tag{16}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2) \tag{17}$$

Jest to druga różnica centralna.

2.1 Przykład

$$f(x) = 6x^3 - 4x + 2$$
$$f'(x) = 18x^2 - 4$$
$$f''(x) = 36x$$
$$f''(1) = 36$$

Niech $h = 1$, wtedy:

$$f''(1) = \frac{f(2) + f(0) - 2f(1)}{1^2} = 42 + 2 - 8 = 36.$$

Wynik jest dokładny, ponieważ $f^{(n)}(x) = 0$ dla $n \geq 4$ a błąd aproksymacji zależy jedynie od pochodnych rzędu czwartego i wyższych.