Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

1 Wiadomości wstępne

Szukamy funkcji $y(x)$ spełniającej w każdum punkcie przedziału $(a,\, b)$ równanie

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

Jeżeli $F(x)$ jest jakąkolwiek funkcją pierwotną $f(x)$ to zbiór wszystkich funkcji

$$y(x) = F(x) + C \tag{2}$$

gdzie C jest dowolną stałą zawiera wszystkie funkcje spełniające równanie (1) i tylko takie funkcje. Zbiór funkcji (2) jest *całką ogólną* równania (1).

Jeżeli zażądamy dodatkowo, by funkcja $f(x)$ spełniała warunek

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

to z (2) otrzymamy $y_0 = F(x_0) + C$, a stąd $C = y_0 - F(x_0)$. Istnieje zatem dokładnie jedna funkcja spełniająca równanie (1) i warunek początkowy (3):

$$y(x) = F(x) + y_0 - F(x_0) \tag{4}$$

lub

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{5}$$

Funkcję (4) nazywamy *całką szczególną* równania (1) z warunkiem początkowym (3).

1.1 Przykład

Znaleźć rozwiązanie równania $y' = -2x$, spełniające warunek początkowy $y(0) = 1$.

$y = \int(-2x)dx = -x^2 + C$; z warunku początkowego $1 = 0^2 + C$, czyli $C = 1$, stąd $y = 1 - x^2$.

2 Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)} \tag{6}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy *równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych.* Równanie to możemy zapisać

$$h(y)dy = f(x)dx \tag{7}$$

Niech

$$\int h(y)dy = H(y) + C_H, \quad \int f(x)dx = F(x) + C_F \tag{8}$$

Czyli

$$H(y) + C_H = F(x) + C_F, \quad H(y) - F(x) = C \,(= C_F - C_H) \tag{9}$$

2.1 Przykład

Znaleźć całkę równania $y' = -2x/y$, spełniające warunek początkowy $y(1) = 1$.

Rozdzielając zmienne otrzymujemy $ydy = -2xdx$; po scałkowaniu $y^2/2 = -x^2 + C$, $x^2 + y^2/2 = C$; z warunku początkowego $C = 3/2$, czyli szukaną krzywą jest elipsa $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$

3 Równanie jednorodne

Równanie

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \tag{10}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy *równaniem różniczkowym jednorodnym.* Równanie to za pomocą podstawienia

$$u(x) = \frac{y}{x} \tag{11}$$

można sprowadzić do równania różniczkowego o zmienych rozdzielonych. Z (11) mamy

$$\frac{dy}{dx} = u(x) + x\frac{du}{dx}, \quad u + xu' = f(u) \tag{12}$$

stąd

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \tag{13}$$

czyli równanie różniczkowego o zmienych rozdzielonych.

3.1 Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania $y' = (x + y)/x$.

Podstawiając $u = y/x$ otrzymujemy $x\frac{du}{dx} = 1$, stąd $du = dx/x$, $u = \ln|x| + C$. Ponieważ $y = ux$, szukaną całką jest $y = x\ln|x| + Cx$.

4 Równania sprowadzalne do równań jednorodnych

4.1 Równanie $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$

Równanie
$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \tag{14}$$
gdzie a, c, $b \neq 0$ są to dane liczby, sprowadzamy do równania różniczkowego o zmienych rozdzielonych za pomocą podstawienia
$$u(x) = ax + by + c \tag{15}$$
Z (15) mamy $u' = a + by'$, więc
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right), \quad \frac{du}{dx} = a + bf(u) \tag{16}$$
czyli
$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx \tag{17}$$

4.2 Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania $y' = x + y + 7$.

Podstawiając $u = x + y + 7$ dostajemy $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, więc $\frac{du}{dx} = 1 + u$, czyli $\frac{du}{u+1} = dx$. Stąd $\ln|u+1| = x + A$, czyli $u + 1 = Ce^x$. Mamy więc $x + y + 7 + 1 = Ce^x$, czyli $y = Ce^x - x - 8$

4.3 Równanie $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Równanie
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{18}$$
sprowadzamy do równania jednorodnego lub równania różniczkowego o zmienych rozdzielonych.

Jeżeli
$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{19}$$
wprowadzamy zmienne
$$\xi = x - h,\ \eta = y - k \tag{20}$$
gdzie
$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{21}$$
Ponieważ
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{dx}$$

oraz zachodzi (21), równanie (19) przyjmuje postać

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right) \tag{22}$$

Równanie (22) jest równaniem jednorodnym.

Jeżeli

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

istnieje liczba $\lambda = a_1/a_2 = b_1/b_2$; wówczas

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{24}$$

Podstawiamy $u = a_2x + b_2y$, wówczas $u' = a_2 + b_2y'$ i otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) \tag{25}$$

4.4 Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y - 2}{x - y - 4}$$

Ponieważ

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

z (21) wyznaczamy $h = 3$, $k = -1$ i podstawiamy $\xi = x - 3$, $\eta = y + 1$ i otrzymujemy

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$$

Podstawiając następnie $u(\xi) = \eta/\xi$ dostajemy

$$\frac{u - 1}{-u^2 + 2u + 1}du = \frac{d\xi}{\xi}$$

Stąd

$$-\frac{1}{2}\ln|-u^2 + 2u + 1| = \ln|\xi| + C_1$$

$$\xi^2(-u^2 + 2u + 1) = C_2$$

Ostatecznie

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 8y = C$$

4.5 Przykład 2

Znaleźć całkę ogólną równania

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y+1}{x+2y-1}$$

Ponieważ

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

podstawiamy $u = x + 2y$, i otrzymujemy

$$\frac{du}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$$

Stąd

$$-\frac{u-1}{u+3}du = dx$$

Po scałkowaniu

$$x + y - 2\ln|x + 2y + 3| = C$$