Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

1 Wstęp

Równanie różniczkowe postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

gdzie $p(x)$, $q(x)$ i $f(x)$ są to dane funkcje ciągłe nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym stopnia drugiego.*

Podobnie jak dla równania liniowego rzędu pierwszego, metoda rozwiązywania równania (1) wiedzie poprzez rozwiązanie równania jednorodnego

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

Twierdzenie 1 *Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ spełniają równanie (2), to każda funkcja*

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{3}$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi, spełnia także to równanie.

Definicja 1 *Dwie całki $y_1(x)$ i $y_2(x)$ równania (2) nazywamy* układem podstawowym całek *tego równania, jeżeli wrońskian*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

dla każdego x.

Twierdzenie 2 *Jeżeli całki $y_1(x)$ i $y_2(x)$ równania (2) stanowią układ podstawowy całek tego równania to*

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{5}$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi, jest rozwiązaniem ogólnym równania (2).

Znalezienie układu podstawowego całek jest zwykle zadaniem trudnym. Jeżeli jednak znamy CORJ (2) i chcemy znaleźć CORN (1) korzystamy (podobnie jak dla równań liniowych rzędu pierwszego) z metody uzmienniania stałych bądź metody przewidywań.

1.1 Metoda uzmienniania stałych

W przypadku równania (1) zastępujemy stałe C_1 i C_2 w CORJ (2) funkcjami $C_1(x)$ i $C_2(x)$, które dobieramy tak, by wzór

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{6}$$

przedstawiał CORN.

Wobec (6) mamy

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \tag{7}$$

Dodatkowo żądamy, by

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{8}$$

Wowczas

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \tag{9}$$

oraz

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \tag{10}$$

Podstawiając wzory (6), (9) i (10) do (1) otrzymamy

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \tag{11}$$

Traktując równania (11) i (8) jako układ dwóch równań liniowyh obliczamy

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \tag{12}$$

Całkując i podstawiając do (6) otrzymujemy CORN (1).

1.1.1 Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania

$$y'' + y = \sin x \tag{13}$$

znając dwie całki szczególne odpowiadającego mu równania jednorodnego, $y_1(x) = \sin(x)$ i $y_2(x) = \cos(x)$.

Ponieważ wrońskian

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

więc CORJ $y'' + y = 0$ jest $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ Korzystając z (8) i (11) dostajemy układ równań

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0 \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \sin x \end{cases}$$

Stąd

$$C_1'(x) = \sin x \cos x, \quad C_2'(x) = -\sin^2 x$$

zatem

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + A, \quad C_2(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + B$$

Ostatecznie

$$y = A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

jest szukaną całką ogólną równania (13).

1.1.2 Przykład 2

Znaleźć całkę ogólną równania

$$y'' + 9y = x \tag{14}$$

znając jedną całkę szczególną odpowiadającego mu równania jednorodnego, $y_1(x) = \sin 3x$.

Ponieważ iloczyn dowolnej stałej i rozwiązania równania jednorodnego jest rozwiązaniem tego równania, więc $y_2(x) = C\sin 3x$ jest także rozwiązaniem danego równania jednorodnego. Jednak $y_1(x)$ i $y_2(x)$ nie tworzą układu podstawowego całek tego równania. Uzmienniając stałą C wyznaczymy $C(x)$ tak, aby funkcja $y_2(x) = C(x)\sin 3x$ tworzyła wraz z $y_1(x)$ układ podstawowy.

$$y'' + 9y = 0$$

$$y_2'(x) = C'(x)\sin 3x + 3C(x)\cos 3x$$

$$y_2''(x) = C''(x)\sin 3x + 6C'(x)\cos 3x - 9C(x)\sin 3x$$

Wstawiamy $y(x)$ i $y_2''(x)$ do równania jednorodnego i otrzymujemy równość

$$C''(x)\sin 3x + 6C'(x)\cos 3x = 0$$

czyli

$$\frac{C''(x)}{C'(x)} = -6\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

stąd

$$C'(x) = \frac{A}{\sin^2 3x}$$

gdzie $A \neq 0$ jest dowolną stałą. Dla $A = -3$ dostajemy $C(x) = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$ skąd $y_2(x) = \cos 3x$.

Funkcje $y_1(x) = \sin 3x$ i $y_2(x) = \cos 3x$ tworzą układ podstawowy całek równania jednorodnego $y'' + y = 0$, ponieważ wrońskian $W(x) = -3 \neq 0$. Zatem

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$$

Korzystając z (8) i (11) dostajemy układ równań

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin 3x + C_2'(x)\cos 3x = 0 \\ 3C_1'(x)\cos 3x - 3C_2'(x)\sin 3x = x \end{cases}$$

stąd $C_1'(x) = \frac{1}{3}x\cos 3x$, $C_2'(x) = -\frac{1}{3}x\sin 3x$, a zatem $C_1(x) = \frac{1}{9}x\sin 3x + \frac{1}{27}\cos 3x + A$, $C_2(x) = \frac{1}{9}x\cos 3x - \frac{1}{27}\sin 3x + B$. Ostatecznie

$$y = A\sin 3x + B\cos 3x + \frac{1}{9}x$$

jest szukaną całką ogólną równania (14).

1.2 Metoda przewidywań

Odgadnięcie CSRN jest w wielu przypadkach łatwe wówczas, gdy współczynniki $p(x)$ i $q(x)$ są stałe, a $f(x)$ jest funkcją jednego z typów wymienionych przy omawianiu metody przewidywań dla równania rzędu pierwszego.

1.2.1 Przykład

Znaleźć całkę szczególną równania

$$y'' + y = x^2 \tag{15}$$

spełniającą warunki początkowe $y(0) = 0$ i $y'(0) = 2$.

Wiemy z poprzedniego przykładu, że CORJ $y''+y = 0$ jest $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. CSRN przewidujemy w postaci $y_1 = Ax^2 + Bx + C$, $y_1'' = 2A$. Podstawiając powyższe do (15) mamy

$$Ax^2 + Bx + C + 2A = x^2$$

stąd $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$, więc $y_1 = x^2 - 2$. Wzór $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2$ przedstawia CORN. Z warunków początkowych obliczamy $C_1 = C_2 = 2$ i ostatecznie szukaną całką szczególną jest funkcja

$$y = 2 \sin x + 2 \cos x + x^2 - 2$$

1.3 Zagadnienie brzegowe

Zagadnieniem brzegowym równania (1) nazywamy zagadnienie następujące: znaleźć funkcję $y(x)$ spełniającą równanie (1) a ponadto warunki

$$y(x_1) = k_1, \quad y(x_2) = k_2 \tag{16}$$

Warunki (16) nazywamy *warunkami brzegowymi*. Innymi słowy szukamy takiego rozwiązania równania różniczkowego, którego wykres przechodzi przez punkty (x_1, k_1) i (x_2, k_2).

1.3.1 Przykład

Znaleźć całkę szczególną równania

$$y'' + y = x \tag{17}$$

spełniającą warunki brzegowe $y(0) = 0$ i $y(\pi/2) = 0$.

Całka ogólna (17) ma postać

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$$

Uwzględniając warunki brzegowe mamy $C_1 = -\pi/2$, $C_2 = 0$, a więc szukaną całką szczególną jest funkcja

$$y = -\frac{\pi}{2} \sin x + x$$