# Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

## 1 Wstęp

Rozpatrzmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

oraz funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej

$$w(x) = u(x) + iv(x) \tag{2}$$

gdzie $u(x) = \Re w(x)$, $v(x) = \Im w(x)$ a $i$ jest jednostką urojoną.

**Twierdzenie 1** *Jeżeli funkcja (2) jest całką równania (1) z rzeczywistymi współczynnikami $p(x)$ i $q(x)$, to jej część rzeczywista $u(x)$ i część urojona $v(x)$ są także całkami tego równania.*

## 2 Równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Wyznaczanie układu podstawowego całek dla równania

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3}$$

gdzie $p$ i $q$ są to dane liczby rzeczywiste.

Rozwiązania równania (3) poszukujemy w postaci funkcji wykładniczej

$$y = \mathrm{e}^{rx} \tag{4}$$

w którym dobieramy $r$ tak, by funkcja (4) spełniała równanie (3). Ponieważ $y' = r\mathrm{e}^{rx}$ i $y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$, więc funkcja (4) spełnia równanie (3) wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $r$ jest pierwiastkiem równania kwadratowego

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{5}$$

Równanie (5) nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania (3). Rozpatrzmy trzy przypadki równania charakterystycznego w zależności od wyróżnika $\Delta = p^2 - 4q$:

1. $\Delta > 0$: równanie (5) ma wówczas dwa różne pierwiastki rzeczywiste $r_1$ i $r_2$. Funkcje

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x} \quad \text{i} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$$

są więc rozwiązaniami równania (3). Funkcje te stanowią układ podstawowy całek tego równania, ponieważ wrońskian

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1 x} & \mathrm{e}^{r_2 x} \\ r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} & r_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\mathrm{e}^{(r_1+r_2)x} \neq 0$$

Wzór

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \tag{6}$$

przedstawia zatem rozwiązanie równania (3) dla $\Delta > 0$.

2. $\Delta = 0$: równanie (5) ma wówczas jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny $r_0 = -\frac{p}{2}$. Mamy więc tylko jedną całkę szczególną $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_0 x}$ równania (3). Zauważmy, że $y = Cy_1$ jest też całką tego równania dla dowolnej stałej $C$. Zatem szukamy rozwiązania w postaci

$$y = C(x)\mathrm{e}^{r_0 x} \tag{7}$$

Stąd

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{r_0 x}(C'(x) + r_0 C(x)) \\ y'' = \mathrm{e}^{r_0 x}(C''(x) + 2r_0 C'(x) + r_0^2 C(x)) \end{cases} \tag{8}$$

Podstawiając (7) i (8) do (3) otrzymujemy warunek

$$C''(x) + (2r_0 + p)C'(x) + (r_0^2 + pr_0 + q)C(x) = 0$$

Ponieważ $r_0$ jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego (5), więc $2r_0 + p = 0$ i $r_o^2 + pr_0 + q = 0$. Stąd $C''(x) = 0$, czyli $C(x) = C_1 x + C_2$. Funkcja

$$y = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_0 x} \tag{9}$$

spełnia (3) dla wszystkich wartości stałych $C_1$ i $C_2$, w szczególności dla $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$, więc funkcja

$$y = x\mathrm{e}^{r_0 x}$$

jest całką tego równania. Całki

$$y = \mathrm{e}^{r_0 x} \quad \text{i} \quad y = x\mathrm{e}^{r_0 x}$$

stanowią układ podstawowy całek tego równania, ponieważ wrońskian

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_0 x} & x\mathrm{e}^{r_0 x} \\ r_0 \mathrm{e}^{r_0 x} & (1 + r_0 x)\mathrm{e}^{r_0 x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2r_0 x} \neq 0$$

Wzór (9) przedstawia zatem rozwiązanie równania (3) dla $\Delta = 0$.

3. $\Delta < 0$: równanie (5) ma wówczas dwa różne pierwiastki zespolone sprzężone $r_1 = \alpha + i\omega$ i $r_2 = \alpha - i\omega$. Funkcje zespolone zmiennej rzeczywiatej postaci

$$y_1^*(x) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)x} \quad \text{i} \quad y_2^*(x) = \mathrm{e}^{(\alpha-i\omega)x}$$

są więc całkami równania (3). Na podstawie wzoru Eulera mamy

$$y_1^*(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x + i\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x$$

zatem na mocy twierdzenia 1, funkcje

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\omega x \quad \text{i} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\omega x$$

są także całkami równania (3). Całki te stanowią układ podstawowy całek tego równania, ponieważ wrońskian

$$W(x) = \omega\mathrm{e}^{2\alpha x} \neq 0 \tag{10}$$

Funkcja

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\sin\omega x + C_2\cos\omega x) \tag{11}$$

przedstawia zatem rozwiązanie równania (3) dla $\Delta < 0$.

## 2.1 Przykład 1

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $y'' + 4y = 0$.

Mamy $r^2 + 4 = 0$, $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$, więc $\alpha = 0$, $\omega = 2$ czyli szukanym rozwiązaniem ogólnym jest

$$y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$$

.

## 2.2 Przykład 2

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Mamy $r^2 + 4r + 5 = 0$, $r_1 = -2 + i$, $r_2 = -2 - i$, więc $\alpha = -2$, $\omega = 1$ czyli szukanym rozwiązaniem ogólnym jest

$$y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$$

.

## 2.3 Interpretacja fizyczna

Wykluczając $C_1 = C_2 = 0$, wzór (11) możemy napisać w postaci

$$y = A\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\omega x + \phi) \tag{12}$$

gdzie

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \cos\phi = \frac{C_1}{A}, \quad \sin\phi = \frac{C_2}{A}$$

# 3 Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach

.

Równanie

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{13}$$

gdzie $p$ i $q$ są to dane liczby rzeczywiste, nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym rzędu drugiego o stałych wspolczynnikach.*

Korzystając ze wzorów (6), (9) i (11) na CORJ, możemy wyznaczyć CORN (13), stosując metodę uzmienniania stałych lub metodę przewidywań.

**Twierdzenie 2** *Suma całki szczególnej równania*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

*i całki szczególnej równania*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

*jest całką szczególną równania*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

## 3.1 Przykład

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y'' + y = \mathrm{e}^{2x} + 4x\cos x \tag{14}$$

Mamy $r^2 + 1 = 0$, $r_1 = i$, $r_2 = -i$, więc $\alpha = 0$, $\omega = 1$ czyli szukaną CORJ jest

$$y_0 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

.

Z Twierdzenia 2 suma CSRN

$$y'' + y = \mathrm{e}^{2x} \tag{15}$$

oraz CSRN

$$y'' + y = 4x\cos x \tag{16}$$

jest CSRN (14).

CSRN (15) przewidujemy w postaci $y_1 = a\mathrm{e}^{2x}$, stąd $y_1' = 2a\mathrm{e}^{2x}$ oraz $y_1'' = 4a\mathrm{e}^{2x}$, czyli $4a\mathrm{e}^{2x} + a\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$. Wynika stąd, że $a = \frac{1}{5}$ i ostatecznie

$$y_1 = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}$$

CSRN (16) przewidujemy w postaci

$$y_2 = (a_1x + b_1)x \sin x + (a_2x + b_2)x \cos x$$

stąd

$$y_2' = (2a_1x + b_1) \sin x + (a_1x + b_1)x \cos x + (2a_2x + b_2) \cos x - (a_2x + b_2)x \sin x$$

$$\begin{aligned} y_2'' =& 2a_1 \sin x + 2(2a_1x + b_1) \cos x - (a_1x + b_1)x \sin x \\ &+ 2a_2 \cos x - 2(2a_2x + b_2) \sin x - (a_2x + b_2)x \cos x \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$2a_1 \sin x + 2(2a_1x + b_1) \cos x + 2a_2 \cos x - 2(2a_2x + b_2) \sin x = 4x \cos x$$

Obliczamy $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, czyli

$$y_2 = x^2 \sin x + x \cos x$$

CORN (14) ma więc postać

$$y = y_0 + y_1 + y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x} + x^2 \sin x + x \cos x$$

# 4 Równanie różniczkowe Eulera rzędu drugiego

Równanie

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0 \tag{17}$$

gdzie $p$ i $q$ są to dane liczby rzeczywiste, nazywamy *równaniem różniczkowym Eulera rzędu drugiego.*

Rozwiązywanie równania (17) sprowadzamy do rozwiązywania równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach. Stosujemy podstawienie

$$x = \mathrm{e}^u \tag{18}$$

więc funkcja niewiadoma $y(x)$ jest funkcją złożoną

$$y = y[x(u)] \tag{19}$$

zmiennej niezależnej $u$. Obliczamy

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = \mathrm{e}^u \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{-u}\frac{dy}{du} \tag{20}$$

a następnie

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\mathrm{e}^{2u} + \frac{dy}{dx}\mathrm{e}^u = \frac{d^2y}{dx^2}\mathrm{e}^{2u} + \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{e}^{-2u}\left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) \tag{21}$$

Wstawiając prawe strony wzorów (18) – (21) do (17) otrzymujemy równanie

$$y'' + (p-1)y' + qy = 0 \tag{22}$$

które jest równaniem liniowym o stałych współczynnikach. W całce ogólnaj (22) wystarczy uwzglęnić (18) by otrxymać całkę ogólną równania (17).

## 4.1 Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania

$$x^2y'' - 2xy' + 6y = 0 \tag{23}$$

Mamy $p = -2$ i $q = 6$, więc równanie (22) przyjmuje postać

$$y'' - 3y' + 6y = 0 \tag{24}$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego $r^2 - 3r + 6 = 0$ są $r_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{15}}{2}$, czyli całka ogólna (24) ma postać

$$y = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}u}\left(C_1 \sin\frac{\sqrt{15}}{2}u + C_2 \cos\frac{\sqrt{15}}{2}u\right)$$

stąd, uwzględniając (18), otrzymujemy całkę (23)

$$y = \mathrm{x}^{\frac{3}{2}}\left[C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right)\right]$$

## 4.2 Przykład 2

Znaleźć całkę ogólną niejednorodnego równania różniczkowego Eulera

$$x^2y'' + xy' - y = x^2 \tag{25}$$

Mamy $p = 1$ i $q = -1$, więc równanie (25) przyjmuje postać

$$y'' - y = \mathrm{e}^{2u} \tag{26}$$

Całką ogólną tego równania jest

$$y = C_1\mathrm{e}^{u} + C_2\mathrm{e}^{-u} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2u}$$

czyli

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x} + \frac{1}{3}x^2$$