Rozwiązywanie zagadnień brzegowych metodą elementów skończonych

1 Zagadnienie brzegowe (Boundary value problem, BVP)

1.1 Sformułowanie klasyczne

Znaleźć rozwiązanie $u(x)$, $x \in [0, l]$ równania różniczkowego drugiego rzędu postaci

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l) \tag{1}$$

z jednym z następujących warunków brzegowych dla $x = 0$ i $x = l$.

1. warunki brzegowe Dirichleta
$$u(0) = u_0 \quad \text{lub} \quad u(l) = u_l, \tag{2}$$
2. warunki brzegowe Neumanna
$$-a(0)u'(0) = \gamma_0 \quad \text{lub} \quad a(l)u'(l) = \gamma_l, \tag{3}$$
3. warunki brzegowe Cauchy'ego
$$-a(0)u'(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_0 \quad \text{lub} \quad a(l)u'(l) + \beta_l u(l) = \gamma_l, \tag{4}$$

Dane: $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, β_0, β_l, $f(x)$, u_0, u_l, γ_0, γ_l.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy warunki Dirichleta dla $x = 0$ i warunki Cauchy'ego dla $x = l$, czyli

$$u(0) = u_0, \quad a(l)u'(l) + \beta u(l) = \gamma$$

1.2 Sformułowanie wariacyjne

Niech u będzie rozwiązaniem problemu (1). Mnożymy równanie (1) przez arbitralną funkcję testową $v(x)$, spełniającą warunek $v(0) = 0$ i całkujemy w przedziale $(0, l)$

$$\int_0^l -(au')'v\,dx + \int_0^l bu'v\,dx + \int_0^l cuv\,dx = \int_0^l fv\,dx \tag{5}$$

całkując przez części mamy

$$\int_0^l -(au')'v\,dx = \int_0^l au'v'\,dx - a(l)u'(l)v(l) + a(0)u'(0)v(0) \tag{6}$$

Z warunku Cauchy'ego w $x = l$ mamy

$$-a(l)u'(l)v(l) = \beta u(l)v(l) - \gamma v(l)$$

W efekcie uzyskujemy następujące rozwiązanie wariacyjne BVP:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \int_0^l (au'v' + bu'v + cuv)\,dx + \beta u(l)v(l) = \int_0^l fv\,dx + \gamma v(l) \end{cases} \tag{7}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$L(v) = \int_0^l fv\,dx + \gamma v(l) \tag{8}$$

$$B(u,v) = \int_0^l (au'v' + bu'v + cuv)\,dx + \beta u(l)v(l) \tag{9}$$

$L(v)$ jest funkcjonałem liniowym, $B(u,v)$ jest funkcjonałem biliniowym. Równanie (7) można zapisać

$$B(u,v) = L(v) \tag{10}$$

Wprowadzamy funkcję $\tilde{u}(x)$, spełniającą warunek $\tilde{u}(0) = u_0$. Podstawiając $w = u - \tilde{u}$ i korzystając z biliniowości funkcjonału $B(u,v)$, dostajemy

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ B(w,v) = L(v) - B(\tilde{u},v) \end{cases} \tag{11}$$

1.3 Równoważność z problemem minimalizacji

Wprowadźmy funkcjonał kwadratowy

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - L(u) \tag{12}$$

Niech funkcjonał $J(u)$ osiąga minimum w u oraz

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon) &= J(u+\varepsilon v) && (13)\\ &= \frac{1}{2}B(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - L(u+\varepsilon v) && (14)\\ &= \frac{1}{2}B(v,v)\varepsilon^2 + (\frac{1}{2}(B(u,v)+B(v,u)) - L(v))\varepsilon + (\frac{1}{2}B(u,u) - L(u)) && (15) \end{aligned}$$

Jeżeli J osiąga minimum w u to $\phi(\varepsilon)$ musi osiągać minimum dla $\varepsilon = 0$, czyli

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon}(0) = \frac{1}{2}(B(u,v)+B(v,u)) - L(v) = 0 \tag{16}$$

Jeżeli $B(u,v)$ jest formą symetryczną (czyli $B(u,v) = B(v,u)$) to

$$B(u,v) = L(v) \tag{17}$$

Jest to warunek konieczny istnienia minimum u. Warunkiem wystarczającym jest

$$B(v,v) > 0, \quad \forall v \neq 0 \tag{18}$$

Twierdzenie 1 (Równoważność problemu minimalizacji i wariacyjnego) *Jeżeli forma $B(u,v)$ jest symetryczma i dodatnio określona, to problemy minimalizacyjny i wariacyjny są równoważne, czyli u jest rozwiązaniem (10) wtedy i tylko wtedy gdy u jest rozwiązaniem (17)*

2 Metoda Galerkina

Ideą metody jest aproksymacja rozwiązania liniową kombinacją funkcji bazowych $e_i = e_i(x)$

$$u \approx \tilde{u} + \sum_{j=1}^{N} w_j e_j, \quad v \approx \sum_{j=1}^{N} v_j e_j \tag{19}$$

Współczynniki w_j należy wyznaczyć.

Podstawiając do VBVP dostajemy

$$B(\tilde{u} + \sum_{j=1}^{N} w_j e_j, \sum_{j=1}^{N} v_j e_j) = L(\sum_{j=1}^{N} v_j e_j) \tag{20}$$

Ponieważ równanie (20) musi być spełnione dla każdej funkcji testowej v (a zatem dla dowolnego zestawu parametrów v_j), możemy przyjąć $v_j = \delta_{ji},\ j = 1, \ldots, N$ otrzymując układ N równań

$$B(\tilde{u} + \sum_{j=1}^{N} w_j e_j, e_i) = L(e_i),\ i = 1, \ldots, N \tag{21}$$

Korzystając z biliniowości $B(u,v)$ mamy

$$B(\tilde{u}, e_i) + \sum_{j=1}^{N} B(e_j, e_i) w_j = L(e_i),\ i = 1, \ldots, N \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{N} B(e_j, e_i) w_j = L(e_i) - B(\tilde{u}, e_i),\ i = 1, \ldots, N \tag{23}$$

Jeżeli $B_{ij} = B(e_j, e_i)$, $\boldsymbol{B} = \{B_{ij}\}$ i $L'_i = L'(e_i) = L(e_i) - B(\tilde{u}, e_i)$, $\boldsymbol{L}' = \{L'_i\}$ to w celu wyznaczenia rozwiązania należy rozwiązać układ równań

$$\boldsymbol{Bu} = \boldsymbol{L}'$$

Często jako funkcje bazowe przyjmuje się

$$e_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \tag{24}$$

3 Przykład rozwiązania zagadnienia brzegowego Metodą Elementów Skończonych

3.1 Sformułowanie silne

Rozważmy równanie transportu ciepła

$$-\frac{du}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) = 0$$

Warunek Dirichleta w $x = 0$: $u(0) = u_0$
Warunek Cauchy'ego w $x = 1$: $ku'(1) + hu(1) = hu_Z$

3.2 Sformułowanie wariacyjne

Znaleźć funkcję u spełniającą

$$\int_0^1 k\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + hu(1)v(1) = hu_Z v(1) \quad \forall v : v(0) = 0$$

i taką, że $u(0) = u_0$

3.3 Rozszerzenie warunku brzegowego

Przyjmijmy

$$\tilde{u}(x) = u_0(1 - x)$$

Podstawiamy $u = \tilde{u} + w$

$$\int_0^1 k\frac{d(\tilde{u}+w)}{dx}\frac{dv}{dx}dx + h(\tilde{u}(1) + w(1))v(1) = hu_Z v(1) \quad \forall v : v(0) = 0$$

$$\int_0^1 k\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \int_0^1 k\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dx}dx + h\tilde{u}(1)v(1) + hw(1)v(1) = hu_Z v(1) \quad \forall v : v(0) = 0$$

$$\int_0^1 k\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dx}dx + hw(1)v(1) = hu_Z v(1) - \int_0^1 k\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dv}{dx}dx - h\tilde{u}(1)v(1) \quad \forall v : v(0) = 0$$

Zadanie: znaleźć funkcję $u = \tilde{u} + w$ spełniającą

$$B(w, v) = L'(v) \quad \forall v : v(0) = 0$$

gdzie

$$B(w, v) = \int_0^1 k\frac{dw}{dx}\frac{dv}{dx}dx + hw(1)v(1)$$

$$L'(v) = hu_Z v(1) - \int_0^1 k\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dv}{dx}dx - h\tilde{u}(1)v(1)$$

oraz $w(0) = 0$

3.4 Konstrukcja podprzestrzeni elementów skończonych

Dla $N = 3$ mamy

$$e_1(x) = \begin{cases} 1 - 2x \text{ dla } x \in (0,\, 0.5) \\ 0 \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \qquad \frac{de_1(x)}{dx} = \begin{cases} -2 \text{ dla } x \in (0,\, 0.5) \\ 0 \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \tag{25}$$

$$e_2(x) = \begin{cases} 2x \text{ dla } x \in (0,\, 0.5) \\ 2 - 2x \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \qquad \frac{de_2(x)}{dx} = \begin{cases} 2 \text{ dla } x \in (0,\, 0.5) \\ -2 \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \tag{26}$$

$$e_3(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in (0,\, 0.5) \\ 2x - 1 \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \qquad \frac{de_3(x)}{dx} = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in (0,\, 0.5) \\ 2 \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \tag{27}$$

Problem przybliżony: znaleźć u_h spełniające

$$B(w_h, v_h) = L'(v_h)$$

$$w \approx w_h = \sum_{i=1}^{3} w_i e_i$$

czyli

$$\sum_{j=1}^{3} w_j B(e_j, e_i) = L'(e_i)$$

Oznaczając $B_{ij} = B(e_j, e_i)$ oraz $L_i = L'(e_i) = L(e_i) - B(\tilde{u}, e_i)$, mamy:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Ponieważ $w(0) = 0$ oraz $w(0) = \sum_{i=1}^{3} w_i e_i(0) = w_1$ (gdyż $e_1(0) = 1$ i $e_2(0) = e_3(0) = 0$), $w_1 = 0$ i układ równań (28) redukuje się do

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Obliczamy

$$B_{22} = \int_0^1 k \frac{de_2}{dx} \frac{de_2}{dx} dx + h e_2(1) e_2(1)$$

$$B_{23} = \int_0^1 k \frac{de_2}{dx} \frac{de_3}{dx} dx + h e_2(1) e_3(1)$$

$$B_{32} = B_{23}$$

$$B_{33} = \int_0^1 k \frac{de_3}{dx} \frac{de_3}{dx} dx + h e_3(1) e_3(1)$$

$$L_2 = h u_Z e_2(1) - \int_0^1 k \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{de_2}{dx} dx - h\tilde{u}(1) e_2(1)$$

$$L_3 = hu_Z e_3(1) - \int_0^1 k \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{de_3}{dx} dx - h\tilde{u}(1) e_3(1)$$

Po obliczeniu w_2, w_3 rozwiązanie przybliżone wyznaczamy jako

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \begin{cases} w_2 e_2(x) \text{ dla } x \in (0,\, 0.5] \\ w_2 e_2(x) + w_3 e_3(x) \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \tag{30}$$

$$u(x) = u_0(1-x) + \begin{cases} 2w_2 x \text{ dla } x \in (0,\, 0.5] \\ 2w_2(1-x) + u_3(2x-1) \text{ dla } x \in (0.5,\, 1) \end{cases} \tag{31}$$