Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

1 Wiadomości wstępne

Równanie

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{1}$$

gdzie $p(x)$ i $f(x)$ są to funkcje dane, ciągłe w pewnym przedziale (a, b) nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego.*

Równanie (1) nazywamy *jednorodnym* (RJ), jeżeli $f(x)$ jest tożsamościowo równa zeru w rozważanym przedziale, *niejednorodnym* zaś (RN) w przypadku przeciwnym.

Metoda rozwiązywania RN wiedzie poprzez rozwiązanie RJ, które otrzymujemy zastępując funkcję $f(x)$ funkcją równą zeru.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2}$$

Równanie (2) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Zakładając, że $y(x) \neq 0$, mamy

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \tag{3}$$

i całkujemy

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C \tag{4}$$

stąd

$$y = C\ \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \tag{5}$$

Jeżeli mamy rozwiązanie RJ, to rozwiązanie ogólne RN uzyskujemy za pomocą jednej z dwóch metod: *metody uzmienniania stałej* lub *metody przewidywań.*

1.1 Metoda uzmienniania stałej

Metoda ta polega na tym, że zastępujemy we wzorze (5) stałą C nieznaną funkcją $C(x)$, a następnie staramy się tak dobrać $C(x)$, aby wzór

$$y(x) = C(x)\ \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \tag{6}$$

przedstawiał rozwiązanie ogólne RN.

Z (6) mamy

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)\ \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)\ \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \tag{7}$$

Po podstawieniu (6) i (7) do RN, odpowiednio na miejsce y i $\frac{dy}{dx}$ i redukcji otrzymamy

$$C'(x) = f(x)\ \mathrm{e}^{\int p(x)dx} \tag{8}$$

całkując dostajemy

$$C(x) = \int f(x)\ \mathrm{e}^{\int p(x)dx} dx + C_1 \tag{9}$$

wobec (6) mamy zatem

$$y(x) = C_1\ \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} +\ \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \int f(x)\ \mathrm{e}^{\int p(x)dx} dx \tag{10}$$

Oznaczając drugi składnik po prawej stronie wzoru (10) symbolem $y_1(x)$ oraz zakładając $P'(x) = p(x)$, mamy

$$y(x) = C_1\ \mathrm{e}^{-P(x)} dx + y_1(x) \tag{11}$$

Wzór (11) przedstawia całkę ogólną RN (równania (1)).

1.2 Przykład 1

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{dy}{dx} - y \cot x = \sin^3 x \tag{12}$$

spełniające warunek początkowy $y(-\pi/2) = 1$.

Wyznaczamy całkę ogólną równania jednorodnego (CORJ):

$$-\int p(x)dx = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x|$$

czyli $y = C \sin x$. Dla znalezienia całki ogólnej równania niejednorodnego (CORN), stosujemy metodę uzmienniania stałej. Przyjmujemy $y(x) = C(x) \sin x$, obliczamy $y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$ i podstawiamy do (12)

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - \cot x \cdot C(x) \sin x = \sin^3 x$$

Stąd

$$C'(x) = \sin^2 x$$

więc

$$C(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1$$

Ostatecznie

$$y(x) = \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x \cos x + C_1 \sin x$$

jest CORN równania (12). Uwzględniając warunek początkowy, otrzymamy $1 = -C_1 + \pi/4$, czyli $C_1 = \pi/4 - 1$, czyli

$$y(x) = \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x \cos x + \frac{\pi - 4}{4}\sin x$$

jest całką szczególną (12) spełniającą warunek początkowy $y(-\pi/2) = 1$.

1.3 Przykład 2

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y} \tag{13}$$

Równanie (13) nie jest równaniem liniowym dla funkcji $y(x)$, jest natomiast równaniem liniowym dla funkcji $x(y)$. Zgodnie z twierdzeniem o pochodnej funkcji odwrotnej mamy

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y \tag{14}$$

Wyznaczamy CORJ

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y \tag{15}$$

Rozdzielając zmienne mamy

$$\int \frac{dx}{x} = \int \cos y dy$$

czyli

$$\ln|x| = \sin y + \ln C$$

zatem

$$x = C\ \mathrm{e}^{\sin y}$$

W celu znalezienia CORN (14) stosujemy metodę uzmienniania stałej. Przyjmujemy $x = C(y)\ \mathrm{e}^{\sin y}$, obliczamy $x' = C'(y)\ \mathrm{e}^{\sin y} + C(y)\ \mathrm{e}^{\sin y}\cos y$ i podstawiamy do (14). Otrzymujemy

$$C'(y)\ \mathrm{e}^{\sin y} + C(y)\ \mathrm{e}^{\sin y}\cos y - C(y)\ \mathrm{e}^{\sin y}\cos y = \sin 2y$$

stąd

$$C'(y) = \ \mathrm{e}^{-\sin y}\sin 2y$$

więc

$$C(y) = \int\ \mathrm{e}^{-\sin y}\sin 2y dy = -2\ \mathrm{e}^{-\sin y}(1+\sin y) + C_1$$

Ostatecznie

$$x(y) = C_1\ \mathrm{e}^{\sin y} - 2(1+\sin y)$$

jest całką ogólną (14), a tym samym (13).

Twierdzenie: Suma CORJ i jakiejkolwiek CSRN jest CORN.

Dowód: Niech $Y_0(x)$ oznacza CORJ, a $Y_1(x)$ jakąkolwiek CSRN (1). Mamy więc

$$\frac{d}{dx}Y_0(x) + p(x)Y_0(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}Y_1(x) + p(x)Y_1(x) = f(x)$$

stąd

$$\frac{d}{dx}[Y_0(x) + Y_1(x)] + p(x)[Y_0(x) + Y_1(x)] = f(x)$$

więc suma $Y_0(x) + Y_1(x)$ jest całką RN. Stąd wzór $y = Y_0(x) + Y_1(x)$ przedstawia CORN.

1.4 Metoda przewidywań

Metoda ta polega na odgadnięciu CSRN, a następnie skorzystaniu z powyższego twierdzenia, przy czym CORJ wyznaczamy jak poprzednio.

Metodę przewidywań stosujemy wyłącznie wówczas, gdy funkcja $p(x) = p$ jest stała, ponadto funkcja $f(x)$ jest bądź to wielomianem $P_n(x)$, bądź sumą o postaci $k\cos bx + l\sin bx$, bądź funkcją typu $k\ e^{\alpha x}$, bądź też sumą lub iloczynem funkcji trzech danych typów. W każdym z wymienionych przypadków CSRN należy przewidzieć w tej samej postaci co $f(x)$, zachowując odpowiednio: stopień wielomianu, liczby α oraz b, przyjmując natomiast w miejsce pozostałych stałych (współczynniki wielomianu, k, l) pewne stałe, które wyznaczamy z warunku (1).

$f(x)$	Przewidywana postać rozwiązania szczególnego
$P_n(x)$ - wielomian P stopnia n	$Q_n(x)$ - wielomian Q stopnia n
$P_n(x)\ e^{\alpha x}$	$Q_n(x)\ e^{\alpha x}$ gdy $p \neq -\alpha$ $xQ_n(x)\ e^{\alpha x}$ gdy $p = -\alpha$
$k\ e^{\alpha x}$	$m\ e^{\alpha x}$ gdy $p \neq -\alpha$ $xm\ e^{\alpha x}$ gdy $p = -\alpha$
$k\cos bx + l\sin bx$	$m\cos bx + n\sin bx$
$e^{\alpha x}(k\cos bx + l\sin bx)$	$e^{\alpha x}(m\cos bx + n\sin bx)$
$P_n(x)(k\cos bx + l\sin bx)$	$Q_n(x)(m\cos bx + n\sin bx)$

1.5 Przykład 1

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 \tag{16}$$

CORJ jest tu $y = C\ e^{-4x}$. Ponieważ $f(x) = x^3$, więc CSRN przewidujemy w postaci

$$y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

stąd

$$y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

a wobec (16) $y_1' + 4y_1 = x^3$, więc

$$3Ax^2 + 2Bx + C + 4Ax^3 + 4Bx^2 + 4Cx + 4D = x^3$$

$$(4A - 1)x^3 + (3A + 4B)x^2 + (2B + 4C)x + (C + 4D) = 0$$

Powyższa rowność jest spełniona dla każdego x, zatem funkcja $y_1(x)$ jest CSRN (16) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4A - 1 = 0, \quad 3A + 4B = 0, \quad 2B + 4C = 0, \quad C + 4D = 0$$

stąd

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = \frac{3}{32}, \quad D = -\frac{3}{128}$$

Funkcja

$$y_1 = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{3}{128}$$

jest więc całką szczególną równania (16), a zatem

$$y = C\ \mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{3}{128}$$

jest całką ogólną równania (16).

1.6 Przykład 2

Znaleźć całkę szczególną równania

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x\ \mathrm{e}^x \tag{17}$$

spełniającą warunek początkowy $y(0) = 2$.

CORJ jest tu $y = C\ \mathrm{e}^{-2x}$. CSRN przewidujemy w postaci iloczynu wielomianu stopnia pierwszego i funkcji wykładniczej e^x

$$y_1 = (Ax + B)\ \mathrm{e}^x$$

stąd $y_1' = (Ax + A + B)\ \mathrm{e}^x$, a wobec (17) $y_1' + 2y_1 = x\ \mathrm{e}^x$. Zatem

$$(Ax + A + B)\ \mathrm{e}^x + 2(Ax + B)\ \mathrm{e}^x = x\ \mathrm{e}^x$$

Powyższy warunek jest spełniony dla każdego x, zatem funkcja $y_1(x)$ jest CSRN (17) wtedy i tylko wtedy, gdy $A + (Ax + B) + 2(Ax + B) = x$, czyli gdy $3Ax + A + 3B = x$, stąd

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{9}$$

Całką szczególną (17) jest więc funkcja

$$y_1 = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3})\ \mathrm{e}^x$$

zaś

$$y = C\ \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3})\ \mathrm{e}^x$$

przedstawia CORN (17). Uwzględniając warunek początkowy $2 = C - \frac{1}{9}$, stąd $C = \frac{19}{9}$. Szukaną całką szczególną jest więc funkcja

$$y = \frac{19}{9}\ \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3})\ \mathrm{e}^x$$

Twierdzenie: Suma całki szczególnej równania

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f_1(x)$$

i całki szczególnej równania

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f_2(x)$$

jest całką szczególną równania

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

1.7 Przykład:

Znaleźć całkę szczególną równania

$$\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 - \cos 3x \tag{18}$$

spełniającą warunek początkowy $y(0) = \frac{49}{54}$.

CORJ jest tu $y = C\,\mathrm{e}^{-3x}$. Z ostatniego twierdzenia wynika, że CSRN

$$\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 \tag{19}$$

i CSRN

$$\frac{dy}{dx} + 3y = -\cos 3x \tag{20}$$

jest CSRN (18).

CSRN (19) przewidujemy jako $y_1 = Ax^2+Bx+C$, $y_1' = 2Ax+B$, wobec (19) $y_1'+y_1 = x^2$. Zatem $2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx + C = x^2$. Stąd $3A = 1$, $2A+3B = 0$, $B+3C = 0$, a więc $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}$, $C = \frac{2}{27}$. Ostatecznie

$$y_1 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}$$

CSRN (20) przewidujemy w postaci kombinacji funkcji $\sin 3x$ i $\cos 3x$, czyli $y_2 = A\sin 3x + B\cos 3x$, $y_2' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$, a wobec (20) $y_2' + 3y_2 = -\cos 3x$. Zatem $3A\cos 3x - 3B\sin 3x + 3A\sin 3x + 3B\cos 3x = -\cos 3x$. Otrzymany warunek musi być spełniony dla każdego x, stąd $A - B = 0$ i $3A + 3B = -1$, czyli $A = B = -\frac{1}{6}$. Całką szczególną (20) jest więc funkcja

$$y_2 = -\frac{1}{6}(\sin 3x + \cos 3x)$$

Ostatecznie

$$y = C\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} - \frac{1}{6}(\sin 3x + \cos 3x)$$

przedstawia CORN (18). Uwzględniając warunek początkowy $C + \frac{2}{27} - \frac{1}{6} = \frac{49}{54}$, skąd $C = 1$. Szukaną całką szczególną jest więc funkcja

$$y = \mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} - \frac{1}{6}(\sin 3x + \cos 3x)$$