

Laboratorium nr 1

Rozwiązywanie równań różniczkowych z niezerowymi warunkami początkowymi

1. Cele ćwiczenia

- zapoznanie się z metodami symbolicznego i numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych w Matlabie,
- wykorzystanie Simulinka do tworzenia modelu równania różniczkowego,
- archiwizacja otrzymanych rozwiązań

2. Wprowadzenie teoretyczne

2.1. Symboliczne rozwiązywanie równań różniczkowych – funkcja **dsolve()**

Rozwiązywanie symboliczne polega na obliczeniach wykonywanych na wyrażeniach matematycznych, a nie na liczbach (rozwiązanie numeryczne), w wyniku czego dostajemy również wyrażenie matematyczne. Przy pomocy zmiennych symbolicznych oraz przy wykorzystaniu funkcji **dsolve()** możliwe jest rozwiązanie równania różniczkowego dowolnego rzędu.

W rozwiązywaniu symbolicznym równań różniczkowych najważniejsza jest zmienna **D** (duże D), która określa różniczkę pierwszego stopnia ($D = d/dt$), podobnie **D2** oznacza różniczkę drugiego stopnia ($D2 = d^2/dt^2$) itd. Funkcja dsolve() domyślnie różniczkuje po czasie.

Za pomocą funkcji dsolve() możliwe jest również rozwiązywanie układu równań różniczkowych jak i określanie warunków początkowych. Kolejne równania podajemy po przecinkach, a po nich warunki początkowe, również oddzielone przecinkami:

```
dsolve('rownanie1' , 'rownanie2' , ... , 'warunek 1' , 'warunek 2');
```

Przykład 1:

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad \text{przy war. pocz.} \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 2$$

wykorzystując funkcję dsolve().

Rozwiązanie: Tworzymy m-plik o nazwie *rozw1.m*

```
syms x y;          % definicja zmiennych symbolicznych 'x' i 'y'
y = dsolve('D2x + 3*Dx + 2*x=0' , 'x(0)=0' , 'Dx(0)=2'); % równanie wraz z
                                                         % warunkami początkowymi

pretty(y);        % wypisanie rozwiązania
t=0:0.01:9.99;    % definicja wektora czasu
w=subs(y);        % wartość liczbowa 'y' wyliczona poprzez podstawienie
                                                         % zdefiniowanego wcześniej wektora 't'
plot(t,w,'r-');  % narysowanie wykresu
xlabel('czas[s]');
ylabel('amplituda sygnału');
title('Wykres rozwiązania równania różniczkowego');
grid;
```

Rozwiązanie równania różniczkowego w postaci analitycznej oraz wykresu otrzymujemy wywołując w oknie komend MATLABA funkcję `>> rozw1`

2.2. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych – funkcja **ode()**

MATLAB zawiera funkcje rozwiązujące zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą np. par metod **Rungego-Kutty** rzędu 2 i 3 (funkcja **ode23**) oraz rzędu 4 i 5 (funkcja **ode45**).

Funkcje te rozwiązują zagadnienie początkowe dla układów równań zwyczajnych postaci:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Składnia funkcji:

```
[T, X] = ode23 ('F(t, x)', [t0 tk], x0, options)
[T, X] = ode45 ('F(t, x)', [t0 tk], x0, options)
```

Kolejne parametry wejściowe oznaczają:

- pierwszym parametrem musi być łańcuch zawierający nazwę zdefiniowanej przez użytkownika funkcji zwracającej wartości $F(t, x)$,
- t_0, tk - granice przedziału czasu, w którym poszukiwane jest rozwiązanie,
- x_0 - określa warunek początkowy - wektor kolumnowy zawierający wartość rozwiązania układu w chwili początkowej,
- options – dodatkowe parametry, które można ustawić przy pomocy instrukcji `odeset`:
options = odeset('nazwa_parametru1',wartosc1,'nazwa_parametru2',wartosc2,...)

Wartością omawianych funkcji jest macierz X zawierająca umieszczone wierszowo wektory reprezentujące wartości rozwiązania w punktach określonych odpowiednimi elementami wektora kolumnowego t, który jest jedną z wartości funkcji ode23 i ode45.

Przykład 2:

Rozwiązać równanie różniczkowe z przykładu 1 wykorzystując funkcję ode45.

Rozwiązanie: Do rozwiązania zadania przy pomocy funkcji ode45 wykorzystano dwa pliki. W pierwszym z nich (*funkcja.m*) zapisujemy postać równania – jako równania stanu:

```
function xdot=funkcja(t,x)

    % Układ rownan rozniczkowych

    xdot=zeros(2,1);
    xdot(1)=x(2);
    xdot(2)=(-2*x(1)-3*x(2));
```

a w drugim (*rozw2.m*) wprowadzamy parametry wejściowe, wywołujemy funkcję *ode45* i rysujemy wykres rozwiązania:

```
function rozw2

    clc
    disp('Rozwiazanie rownania rozniczkowego metoda numeryczna:');

    t0=0;
    tk=input ('Podaj czas symulacji tk = ');
    x01=input ('Podaj wartosc x01 = ');
    x02=input ('Podaj wartosc x02 = ');

    czas_sym=[t0 tk];
    war_pocz=[x01 x02];

    [t,x]=ode45('funkcja',czas_sym,war_pocz);
```

```
plot(t,x(:,1),'g+');
xlabel('czas [s]');ylabel('amplituda sygnału');
title('Wykres rozwiązania równania różniczkowego');
grid;
```

Rozwiązanie równania różniczkowego, w postaci wykresu, otrzymujemy wywołując w oknie komend MATLABA funkcję `>> rozw2`

2.3. Rozwiązywanie równań różniczkowych przy pomocy pakietu Simulink

Przykład 3:

Rozwiązać równanie różniczkowe z przykładu 1 wykorzystując model zbudowany w Simulinku.

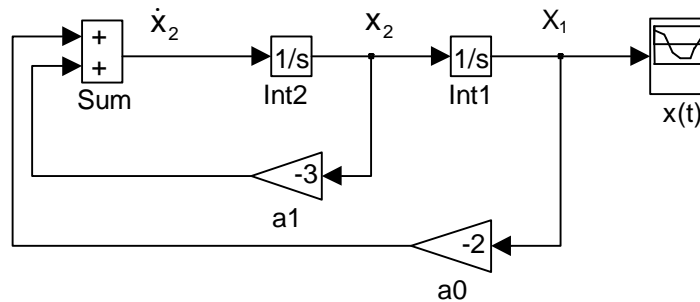
Rozwiązanie: Wprowadzając zmienne:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

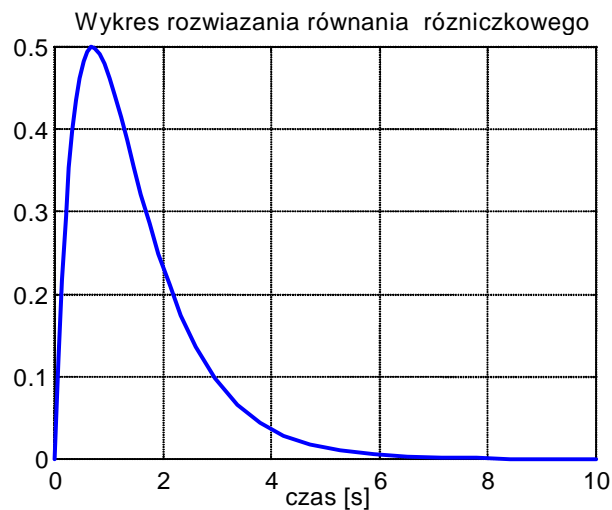
otrzymujemy układ równań stanu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -3\dot{x} - 2x = -3x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

na podstawie którego tworzymy poniższy model:



Ustalając warunki początkowe na obu integratorach (Int1 i Int2) oraz dobierając odpowiednie parametry symulacji, w wyniku otrzymujemy wykres rozwiązania:



Takie same wykresy rozwiązania równania różniczkowego można uzyskać w punktach 2.1 i 2.2

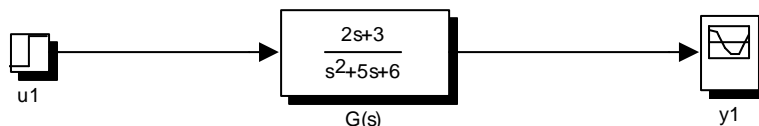
Przykład 4:

Skonstruować w Simulinku model równania różniczkowego

$$\frac{d^2 h_2}{dt^2} + 5 \frac{dh_2}{dt} + 6h_2 = 2 \frac{dh_1}{dt} + 3h_1, \quad \text{dla war. pocz.} \quad h_2(0) = \frac{dh_2}{dt}(0) = 0$$

w postaci transmitancji operatorowej oraz w postaci równań stanu i równania wyjścia. Znaleźć odpowiedź skokową układu, gdy sygnałem wejściowym $h_1(t)$ jest sygnał skoku jednostkowego.

Rozwiązanie: Równaniu różniczkowemu - przekształconemu do modelu w postaci **transmitancji operatorowej** - odpowiada schemat blokowy przedstawiony poniżej:

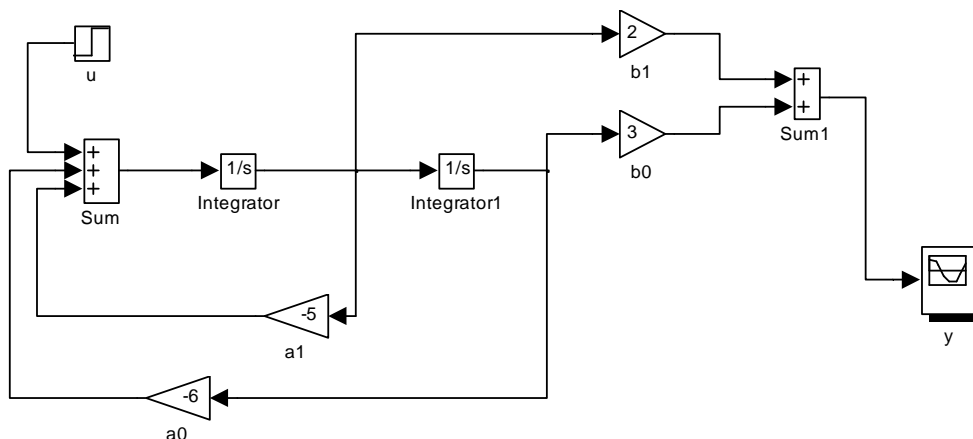


Przyjmując określone parametry symulacji otrzymujemy rozwiązanie w postaci wykresu.

Równaniu różniczkowemu - przekształconemu do modelu w postaci **równań stanu i równania wyjścia:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + u \\ y = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

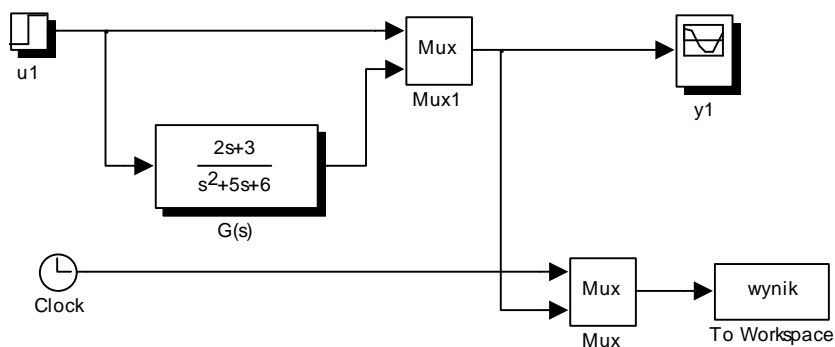
odpowiada poniższy schemat blokowy:



Ustalając zerowe warunki początkowe na integratorach oraz dobierając odpowiednie parametry symulacji otrzymujemy rozwiązanie w postaci wykresu, jak poprzednio.

2.4. Archiwizacja uzyskanych rozwiązań równań różniczkowych na dysku

Dla równania z przykładu 4 tworzymy poniższy schemat blokowy:



W przestrzeni roboczej Matlab'a utworzona zostanie macierz o nazwie *wynik*, zawierająca trzy wektory zmiennych: czas symulacji, wymuszenie oraz odpowiedź skokowa układu. Aby zapisać tę macierz na dysku należy wykonać instrukcję:

```
>> save wynik -ascii
```

Poleceniem *clear* czyścimy przestrzeń roboczą a następnie wprowadzamy macierz *wynik* ponownie do przestrzeni roboczej z dysku:

```
>> load wynik -ascii
```

Ponowne wykreślenie uzyskanego rozwiązania równania z przykładu 4 można uzyskać po wpisaniu następujących instrukcji:

```
>> t = wynik(:,1) % Wektor czasu
>> u = wynik(:,2) % Wektor wymuszenia
>> y = wynik(:,3) % Wektor odpowiedzi
>> plot( t, u, 'r-', t, y, 'g+')
>> grid
```

3. Przebieg ćwiczenia

Rozwiązać równania różniczkowe:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0$, dla war. pocz. $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -1$
- $2\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 6$, dla war.pocz. $x(0) = 1$ i $\dot{x}(0) = -2$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 3x = 0$, dla war. pocz. $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$, dla war. pocz. $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 0$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = 4$, dla war.pocz. $x(0) = 1$ i $\dot{x}(0) = 0$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13x = 0$, dla war. pocz. $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 9x = 0$, dla war. pocz. $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$

wykorzystując funkcję **dsolve**, funkcję **ode45** oraz model równania przygotowany w **Simulinku**. Wykreślić przebieg funkcji $x(t)$ otrzymanej w każdym z trzech rozwiązań i porównać otrzymane wykresy na jednym układzie współrzędnych (używając różnych rodzajów linii i kolorów wykresów).

4. Sprawozdanie z przebiegu ćwiczenia

Na podstawie uzyskanych wyników należy przygotować sprawozdanie, które powinno zawierać rozwiązania wybranego równania różniczkowego z punktu 3 wraz z m-plikami i schematami blokowymi. Rozwiązać wybrane równanie różniczkowe z punktu 3 metodą Laplace'a oraz podać wnioski końcowe dotyczące wszystkich uzyskanych rozwiązań.

Literatura

- [1] Brzózka J. – Ćwiczenia z *Automatyki w MATLABIE i SIMULINKU*, Wydawnictwo Mikon, Warszawa 1997
- [2] Treichel W., Stachurski M. – *MATLAB dla studentów*, Wydawnictwo Witkom, Warszawa, 2009
- [3] Zalewski A., Cegięła R. – *MATLAB: obliczenia numeryczne i ich zastosowania*, Wydawnictwo Nakom, Poznań 1996