

## Laboratorium nr 2

# Przykład analizy silnika elektrycznego prądu stałego z magnesem trwałym

### 1. Cele ćwiczenia

- zapoznanie się z zasadą działania silnika elektrycznego prądu stałego,
- zapoznanie się ze sposobami tworzenia modeli silnika elektrycznego w postaci: równań różniczkowych, równań stanu i wyjścia, schematu blokowego i transmitancji operatorowej,
- wyznaczenie odpowiedzi skokowej silnika w Matlabie/Simulinku,
- wyznaczenie odpowiedzi silnika na sygnały prostokątne w Matlabie/Simulinku.

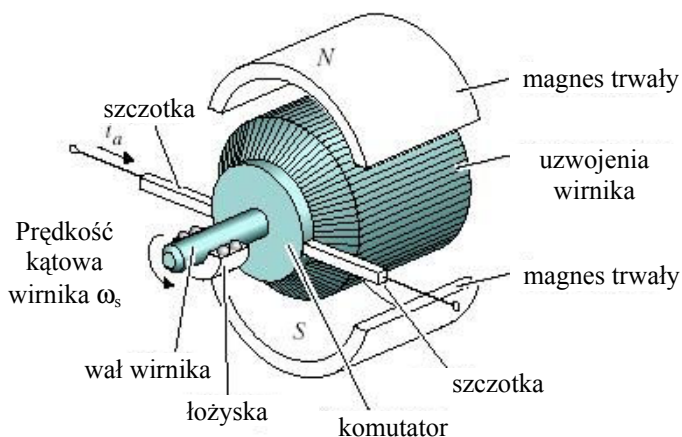
### 2. Wprowadzenie teoretyczne

#### 2.1. Wstęp

Silniki elektryczne prądu stałego są bardzo często stosowanymi elementami wykonawczymi w układach regulacji. Podstawowymi zaletami tych silników są: duży moment obrotowy, dobra sprawność oraz małe wymiary. Wadami są natomiast: iskrzenie (zakłócenia przemysłowe) i zużywanie się szczotek komutatora. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat wprowadzono na rynek szereg silników o specjalnej konstrukcji, charakteryzujących się bardzo dobrymi właściwościami dynamicznymi.

Schematycznie budowę silnika prądu stałego z magnesem trwałym przedstawiono na rysunku 2.1.

**Moment obrotowy** w silnikach elektrycznych powstaje na skutek oddziaływania między zewnętrznym polem



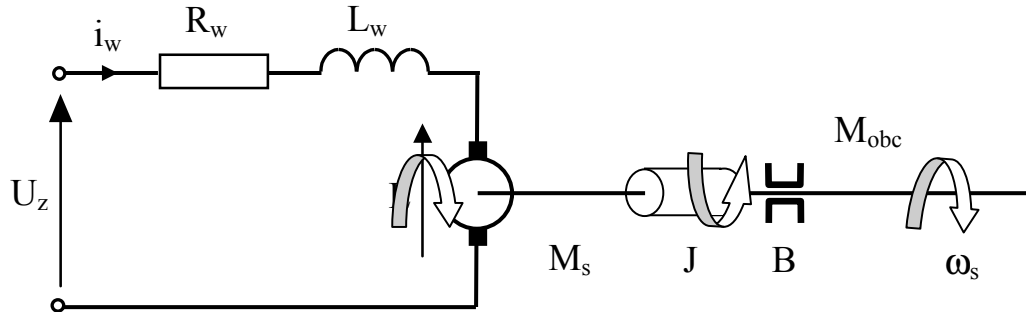
**Rys. 2.1.** Budowa silnika prądu stałego z magnesem trwałym

magnetycznym, a polem magnetycznym powstającym wokół przewodnika, przez który płynie prąd. W silnikach prądu stałego małej mocy zewnętrzne pole magnetyczne wytwarzane jest zazwyczaj przez **magnesy trwałe**, umieszczone w nieruchomej obudowie silnika zwanej **stojanem**. Znajdujący się w polu magnetycznym stojana **wirnik** zawiera uzwojenia składające się z wielu ramek przewodów połączonych z komutatorem. Zazwyczaj uzwojenia te nawinięte są na rdzeniu z materiału

ferromagnetycznego. W wyniku współdziałania strumienia stojana i prądu przepływającego w uzwojeniach wirnika powstaje wspomniany wcześniej moment obrotowy. Aby moment obrotowy działający na wirnik był maksymalny, wektory strumienia magnetycznego stojana i wirnika powinny być względem siebie prostopadłe. Zapewnia to **komutator**, który przełącza kolejne ramki uzwojenia wirnika, powodując odpowiednie zmiany kierunku przepływającego prądu. Napięcie zasilające komutator doprowadzane jest przez **szczotki**, wykonane ze specjalnie spreparowanego węgla. W silnikach tego typu obwodem sterowania jest zawsze obwód wirnika. Zmiany napięcia zasilającego obwód sterowania wywołują zmiany momentu obrotowego a tym samym, przy określonym momencie obciążenia wirnika, zmianę **prędkości kątowej wirnika**.

## 2.2. Model matematyczny silnika zapisany w postaci równań różniczkowych

Tworząc model silnika należy zatem zwrócić uwagę na znalezienie zależności pomiędzy napięciem zasilającym silnik ( $U_z$ ) a prędkością kątową silnika ( $\omega_s$ ). Schemat zastępczy silnika prądu stałego, sprowadzonego do obwodu wirnika, pokazano na rysunku 2.2. Rozważając osobno elektryczne i mechaniczne parametry obwodu wirnika można napisać dwa równania modelujące jego działanie.



Rys. 2.2. Schemat zastępczy obwodu wirnika silnika prądu stałego

**Parametry elektryczne**

Wielkości elektryczne występujące na schemacie charakteryzują odpowiednio:

- $U_z$  – napięcie zasilające wirnik,
- $i_w$  – prąd płynący w uzwojeniach wirnika,
- $R_w$  – rezystancja zastępcza uzwojeń wirnika,
- $L_w$  – indukcyjność zastępcza uzwojeń wirnika,
- $E$  – siła elektromotoryczna indukcji,
- $\omega_s$  – prędkość kątowna wirnika.

Na podstawie schematu zastępczego oraz II-go prawa Kirchhoffa można napisać równanie elektryczne silnika

$$U_z = U_{R_w} + U_{L_w} + E$$

Napięcie na rezystancji uzwojeń wirnika jest proporcjonalne do prądu przez niego płynącego

$$U_{R_w} = R_w i_w$$

Napięcie odniesione do indukcyjności wirnika jest proporcjonalne do zmian prądu przez nią płynącego (straty w obwodzie magnetycznym zostały tutaj pominięte)

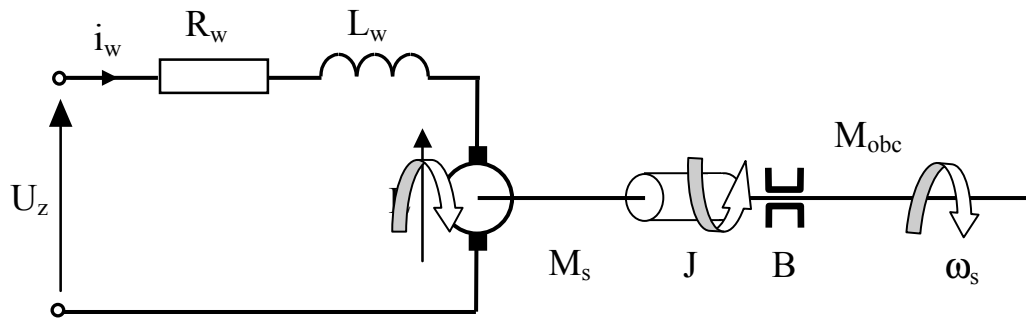
$$U_{L_w} = L_w \frac{di_w}{dt}$$

Gdy wirnik wykonuje ruch obrotowy, w jego uzwojeniach indukowana jest siła elektromotoryczna indukcji (SEM), której wartość jest proporcjonalna do prędkości kątowej wirnika

$$E = k_e \omega_s, \quad \text{gdzie } k_e \text{ – stała elektryczna, zależna m.in. od strumienia magnetycznego stojana oraz liczby zwojów w uzwojeniach wirnika.}$$

Podstawiając kolejne składowe napięcia  $U_z$  do równania (2.1), otrzymamy

$$U_z = R_w i_w + L_w \frac{di_w}{dt} + k_e \omega_s$$



Rys. 2.2. Schemat zastępczy obwodu wirnika silnika prądu stałego

### Parametry mechaniczne

Wielkości mechaniczne występujące na schemacie charakteryzują odpowiednio:

$M_s$  – moment obrotowy wirnika,

$\omega_s$  – prędkość kątową wirnika,

$B$  – współczynnik tarcia lepkiego zredukowany do wału wirnika,

$J$  – moment bezwładności zredukowany do wału wirnika,

$i_w$  – prąd płynący w uzwojeniach wirnika,

$M_{obc}$  – stały moment obciążenia silnika.

Moment obrotowy wirnika, wykorzystywany do pokonania momentów przeciwstawiających się jego ruchowi można zapisać jako

$$M_s = M_a + M_v + M_{obc} \quad (6.3)$$

Zakładając, że strumień magnetyczny stojana ma wartość stałą, moment obrotowy wirnika, proporcjonalny do prądu płynącego przez wirnik, możemy zapisać jako

$$M_s = k_m i_w \quad \text{gdzie } k_m \text{ – stała mechaniczna, zależna m.in. od strumienia magnetycznego stojana oraz liczby zwojów w uzwojeniach wirnika.}$$

Moment związany z przyspieszeniem kątowym wirnika można zapisać jako

$$M_a = J \frac{d\omega_s}{dt}$$

Moment związany z oporami ruchu wirnika można zapisać jako

$$M_v = B\omega_s$$

Podstawiając kolejne składowe momentu  $M_s$  do równania (6.3), otrzymamy

$$k_m i_w = J \frac{d\omega_s}{dt} + B\omega_s + M_{obc} \quad (6.4)$$

Przekształcając równania (6.2) i (6.4) otrzymujemy układ równań różniczkowych będący modelem silnika:

$$\dots \quad (6.5)$$

---

2.3 Model matematyczny silnika zapisany w postaci równań stanu i wyjścia

Przyjmując jako zmienne stanu prąd płynący w uzwojeniach wirnika ( $i_w$ ) oraz prędkość kątową wirnika ( $\omega_s$ ) możemy zapisać model silnika w postaci równań stanu i wyjścia. Dokonujemy zamiany zmiennych

$$x_1 = i_w$$

$$x_2 = \omega_s$$

$$u_1 = U_z$$

$$u_2 = M_{obc}$$

$$y = \omega_s$$

otrzymując układ równań

Równania (6.6) zapisujemy w postaci macierzowej

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

lub po rozpisaniu

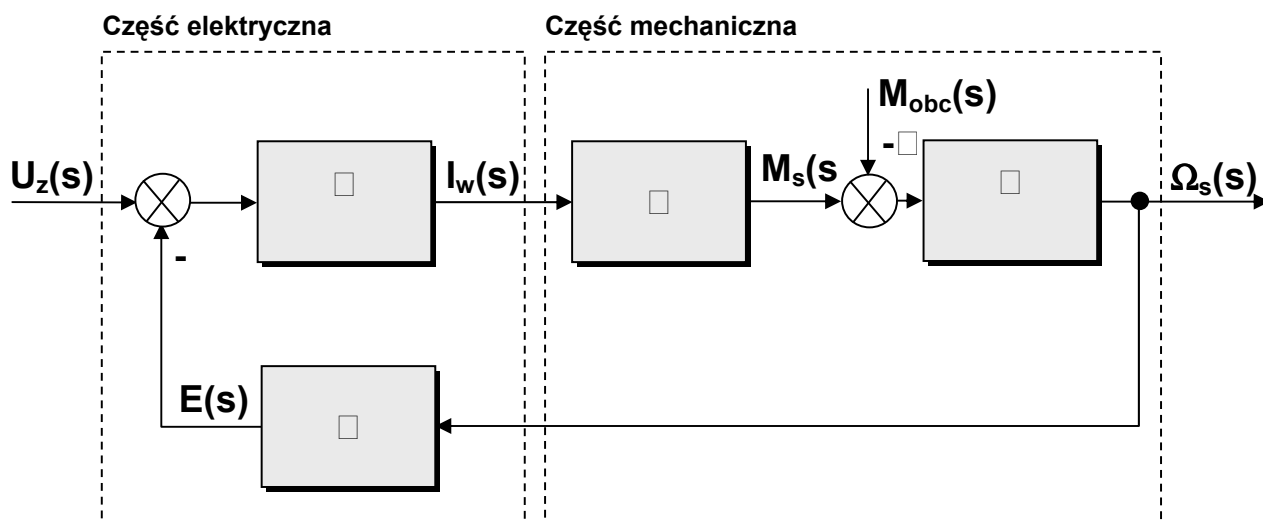
czyli:

## Model matematyczny silnika zapisany w postaci schematu blokowego

Stosując przekształcenie Laplace'a do równań (6.5) otrzymamy

Przekształcając uzyskane równania, przy założeniu zerowych warunków początkowych, otrzymamy

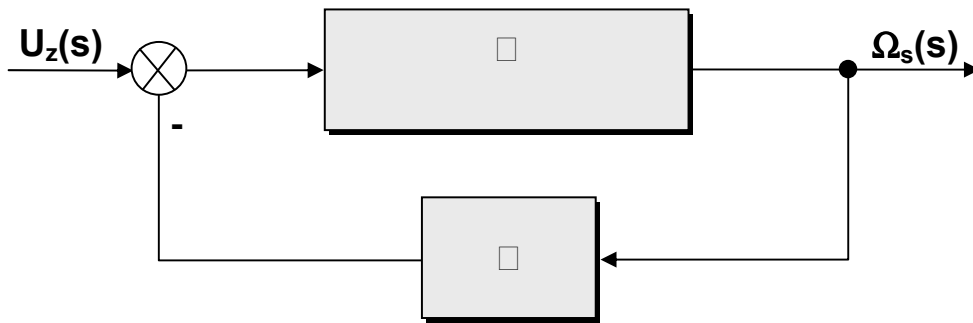
Na podstawie powyższych równań można narysować schemat blokowy silnika, przedstawiony na rysunku 6.3.



Rys. 6.3. Schemat blokowy silnika prądu stałego

## Model matematyczny silnika zapisany w postaci transmitancji operatorowej

Przyjmując jako wielkość wyjściową prędkość kątową wirnika ( $\omega_k$ ) a jako wielkość wejściową napięcie zasilające wirnik ( $U_z$ ) oraz rozpatrując silnik bez obciążenia ( $M_{obc} = 0$ ) możemy wyznaczyć transmitancję tego układu, dokonując kolejnych modyfikacji powyższego schematu blokowego (rysunek 6.4).



Rys. 6.4. Przekształcony schemat blokowy silnika prądu stałego

Na podstawie schematu blokowego z rysunku 6.4 transmitancję  $G(s)$  można zapisać jako

$$G(s) = \frac{\Omega_s(s)}{U_z(s)} = \frac{\frac{k_m}{(sL_w + R_w)(sJ + B)}}{1 + \frac{k_m k_e}{(sL_w + R_w)(sJ + B)}}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez  $(sL_w + R_w)(sJ + B)$  otrzymujemy

$$G(s) = \frac{k_m}{(sL_w + R_w)(sJ + B) + k_m k_e}$$

Przekształcając dalej otrzymamy

$$G(s) = \frac{k_m}{JL_w s^2 + (R_w J + BL_w)s + R_w B + k_m k_e}$$

## Model matematyczny silnika zapisany w postaci transmitancji operatorowej

Zazwyczaj współczynnik tarcia  $B$  jest niewielki, w efekcie czego przyjmujemy, że  $R_w J \gg BL_w$  oraz  $k_e k_m \gg R_w B$ . Transmitancję silnika  $G(s)$  zapisujemy wtedy w postaci uproszczonej

$$G(s) = \frac{k_m}{JL_w s^2 + R_w J s + k_m k_e}$$

Dzieląc licznik i mianownik przez  $k_m k_e$  otrzymujemy

$$G(s) = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{J R_w}{k_m k_e} \frac{L_w}{R_w} s^2 + \frac{R_w J}{k_m k_e} s + 1}$$

Podstawiając  $T_m = \frac{J R_w}{k_m k_e}$ ,  $T_e = \frac{L_w}{R_w}$  oraz  $K = \frac{1}{k_e}$  otrzymujemy

$$G(s) = \frac{\Omega_s(s)}{U_z(s)} = \frac{K}{T_m T_e s^2 + T_m s + 1}$$

Przyjmując zatem prędkość kątową ( $\omega_s$ ) jako wielkość wyjściową, uzyskano transmitancję silnika w postaci **członu II-go rzędu**. Mechaniczna stała czasowa  $T_m$  jest zazwyczaj co najmniej o rząd wielkości większa od elektrycznej stałej czasowej  $T_e$ . W takim przypadku stałą  $T_e$  można pominąć a silnik staje się **członem inercyjnym I-go rzędu**.

$$G(s) = \frac{\Omega_s(s)}{U_z(s)} = \frac{K}{T_m s + 1}$$

Jeżeli wielkością wyjściową jest **przesunięcie kątowe wału wirnika ( $\alpha_s$ )**, który możemy wyznaczyć po scałkowaniu prędkości kątowej wirnika ( $\alpha(s) = \Omega(s)/s$ ), transmitancja  $G(s)$  przyjmie postać

$$G(s) = \frac{\alpha_s(s)}{U_z(s)} = \frac{K}{s(T_m s + 1)} \tag{6.11}$$

W tym przypadku silnik jest **członem całkującym rzeczywistym** (tzn. szeregowym połączeniem członu całkującego i inercyjnego I-go rzędu).

## Wyznaczenie odpowiedzi skokowej silnika w Matlabie/Simulinku

**Odpowiedź skokową silnika** wyznaczono w oparciu o dwie metody. W pierwszej metodzie posłużono się transmitancją operatorową silnika (6.8)

$$G(s) = \frac{k_m}{JL_w s^2 + (R_w J + BL_w)s + R_w B + k_m k_e}$$

Poniżej przedstawiono źródło programu napisanego w Matlabie, w którym zamodelowano transmitancję  $G(s)$  i wyznaczono odpowiedź skokową silnika przy pomocy funkcji *step*.

```
clear all, close all
```

```
% Zdefiniowanie parametrów modelu
```

```
Rw = 2;   Lw = 0.1;   ke = 0.1;
J = 0.1;  B = 0.5;   km = 0.1;
```

```
% Wyznaczenie transmitancji operatorowej silnika
```

```
licz = km;
mian = [J*Lw Rw*J + B*Lw Rw*B + km*ke];
system = tf(licz,mian);
```

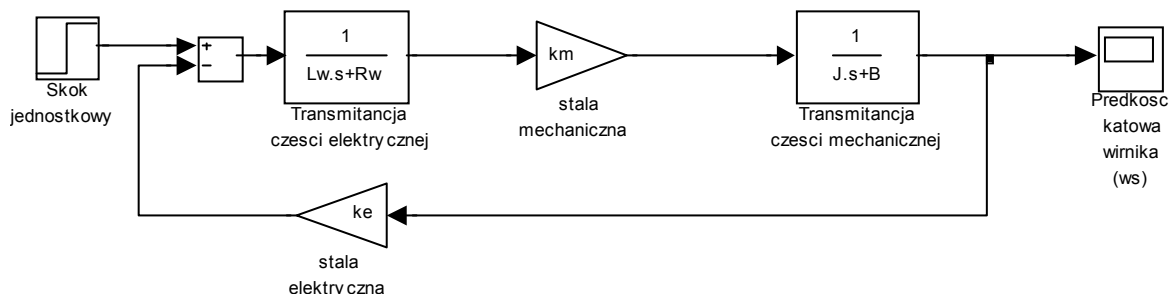
```
% Określenie parametrów odpowiedzi skokowej
```

```
t = 0:0.02:1.4;
odp=step(system,t);
```

```
% Wykreślenie charakterystyki skokowej
```

```
plot(t,odp,'ro'); grid
xlabel('czas (s)'),ylabel('predkosc katowa ωs (rad/s)')
title('Odpowiedz skokowa silnika pradu stalego')
```

W drugiej metodzie na podstawie schematu blokowego silnika, pokazanego na rysunku 6.3, zbudowano odpowiadający mu schemat w Simulinku, przedstawiony na rysunku 6.5, zakładając, że  $M_{obc}=0$ . Sygnałem wejściowym jest sygnał skoku jednostkowego.



**Rys. 6.5.** Schemat blokowy silnika zbudowany w Simulinku



## Wyznaczenie odpowiedzi skokowej silnika w Matlabie/Simulinku

Aby móc przeprowadzić numeryczną symulację działania silnika należy zdefiniować jego parametry (współczynniki i stałe). Załóżmy, że:

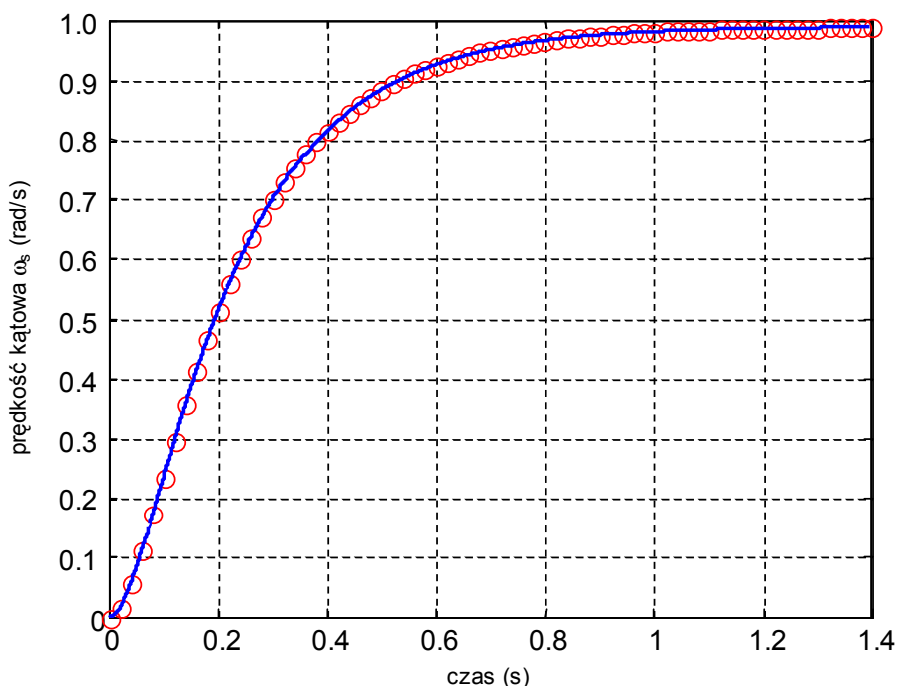
- $R_w = 2 \Omega$ ,
- $L_w = 0.1 \text{ H}$ ,
- $k_e = 0.1 \text{ Vs/rad}$ ,
- $J = 0.1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$ ,
- $B = 0.5 \text{ Nms/rad}$ ,
- $k_m = 0.1 \text{ Nm/A}$ ,

Przed uruchomieniem symulacji należy powyższe parametry wprowadzić do przestrzeni roboczej Matlab, wpisując:

```
>> Rw=2; Lw=0.1; ke=0.1; J=0.1; B=0.5; km=0.1;
```

W efekcie wykonania programu w Matlabie i uruchomienia symulacji w Simulinku otrzymano przebiegi pokazane na rysunku 6.6.

EMBED Word.Picture.8



**Rys. 6.6.** Odpowiedź skokowa silnika prądu stałego, uzyskana przy pomocy:  
 a) transmitancji operatorowej silnika – **kółka**  
 b) modelu silnika wyznaczonego w Simulinku – **linia**

Jak widać przebiegi uzyskane zaprezentowanymi metodami są identyczne, co potwierdza przydatność zarówno Matlab, jak i Simulinka do symulacji działania układów. Charakter otrzymanych przebiegów wskazuje, że silnik przy tak przyjętym modelu, rzeczywiście jest członem II-go rzędu.

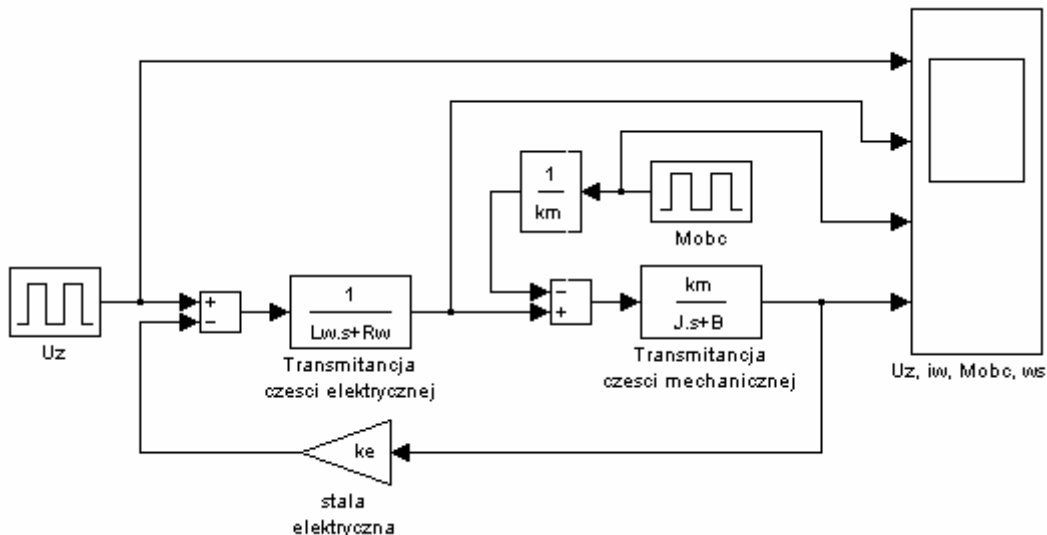
## Wyznaczenie odpowiedzi silnika na sygnały prostokątne w Matlabie/Simulinku

Na podstawie schematu blokowego silnika, pokazanego na rysunku 6.3, zbudowano odpowiadający mu schemat w Simulinku, przedstawiony na rysunku 6.7. Aby móc przeprowadzić numeryczną symulację działania silnika należy zdefiniować jego parametry (współczynniki i stałe). Załóżmy jak poprzednio, że:

- $R_w = 2 \Omega$ ,
- $L_w = 0.1 \text{ H}$ ,
- $k_e = 0.1 \text{ Vs/rad}$ ,
- $J = 0.1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$ ,
- $B = 0.5 \text{ Nms/rad}$ ,
- $k_m = 0.1 \text{ Nm/A}$ ,

oraz, że zarówno sygnał wejściowy jak i moment obciążenia są sygnałami prostokątnymi o odpowiednich parametrach

- $U_z = 10 \text{ V}$ ,
- $M_{obc} = 0.2 \text{ Nm}$



Rys. 6.7. Schemat blokowy silnika zbudowany w Simulinku

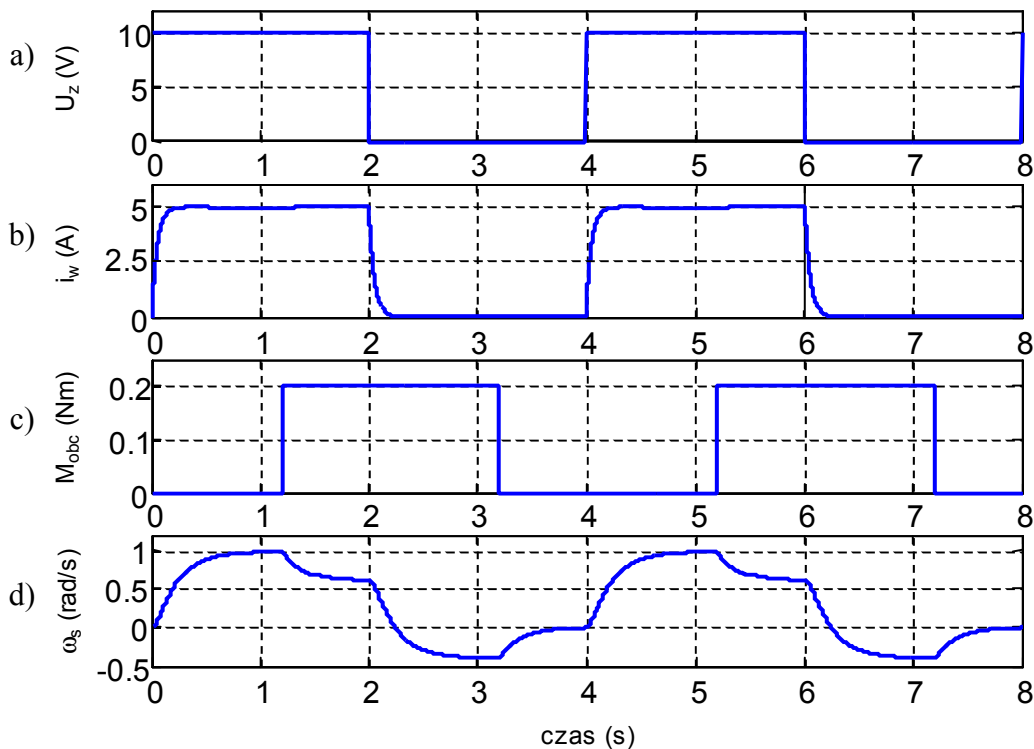
Przed uruchomieniem symulacji należy powyższe parametry wprowadzić do przestrzeni roboczej Matlab, wpisując:

```
>> Rw=2; Lw=0.1; ke=0.1; J=0.1; B=0.5; km=0.1;
```

Po uruchomieniu symulacji na wykresach, pokazanych na rysunku 6.8 otrzymujemy przebiegi: napięcia zasilającego wirnik ( $U_z$ ), prądu płynącego przez wirnik ( $i_w$ ), momentu obciążenia silnika ( $M_{obc}$ ) oraz prędkości kątowej wirnika ( $\omega$ ) w funkcji czasu.

## Wyznaczenie odpowiedzi silnika na sygnały prostokątne w Matlabie/Simulinku

Po uruchomieniu symulacji na wykresach, pokazanych na rysunku 6.8 otrzymujemy przebiegi: napięcia zasilającego wirnik ( $U_z$ ), prądu płynącego przez wirnik ( $i_w$ ), momentu obciążenia silnika ( $M_{obc}$ ) oraz prędkości kątowej wirnika ( $\omega_s$ ) w funkcji czasu.



**Rys. 6.8.** Przebiegi uzyskane podczas symulacji: a) napięcie zasilające wirnik ( $U_z$ ), b) prąd płynący przez wirnik ( $i_w$ ), c) moment obciążenia silnika ( $M_{obc}$ ), d) prędkość kątowa wirnika ( $\omega_s$ )

## Wyznaczenie odpowiedzi silnika na sygnały prostokątne w Matlabie/Simulinku

Symulację działania silnika przeprowadzono także wykorzystując jego model zapisany w postaci równań stanu i wyjścia. Zakładając, że moment obciążenia  $M_{obc} = 0$ , oraz warunki początkowe

$$\begin{bmatrix} i_{w0} \\ \omega_{s0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

oraz przyjmując oznaczenia

$$x_1 = i_w$$

$$x_2 = \omega_s$$

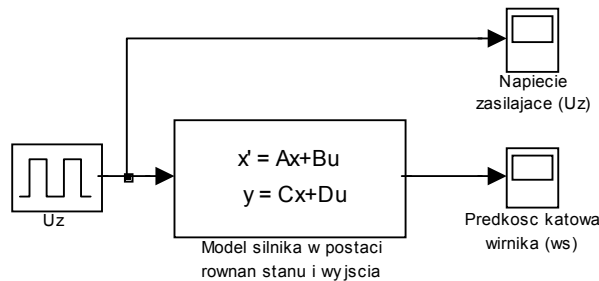
$$u_1 = U_z$$

$$y = \omega_s$$

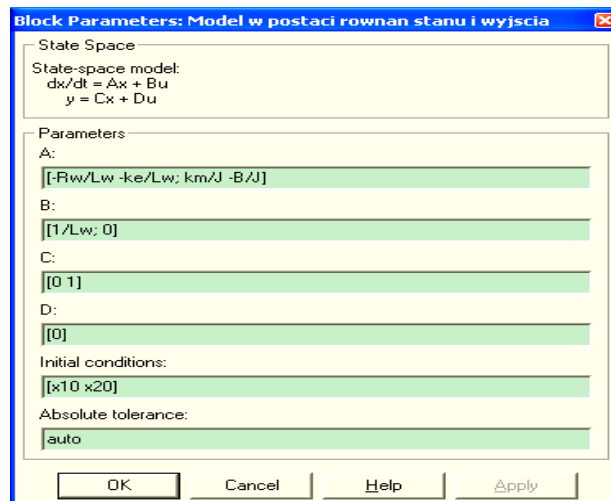
na podstawie równań (6.7) otrzymujemy

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_w}{L_w} & -\frac{k_e}{L_w} \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_w} \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\ y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Schemat blokowy układu pokazano na rysunku 6.9. Blok „Model silnika w postaci równań stanu i wyjścia”, w którym zapisano parametry modelu układu, przedstawiono na rysunku 6.10.



Rys. 6.9. Schemat blokowy silnika zbudowany w Simulinku



Rys. 6.10. Parametry modelu silnika

## Wyznaczenie odpowiedzi silnika na sygnały prostokątne w Matlabie/Simulinku

Aby móc przeprowadzić numeryczną symulację działania silnika należy zdefiniować jego parametry (współczynniki i stałe). Załóżmy jak poprzednio, że:

- $R_w = 2 \Omega$ ,
- $L_w = 0.1 \text{ H}$ ,
- $k_e = 0.1 \text{ Vs/rad}$
- $U_z = 10 \text{ V}$ ,
- $J = 0.1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$
- $B = 0.5 \text{ Nms/rad}$
- $k_m = 0.1 \text{ Nm/A}$

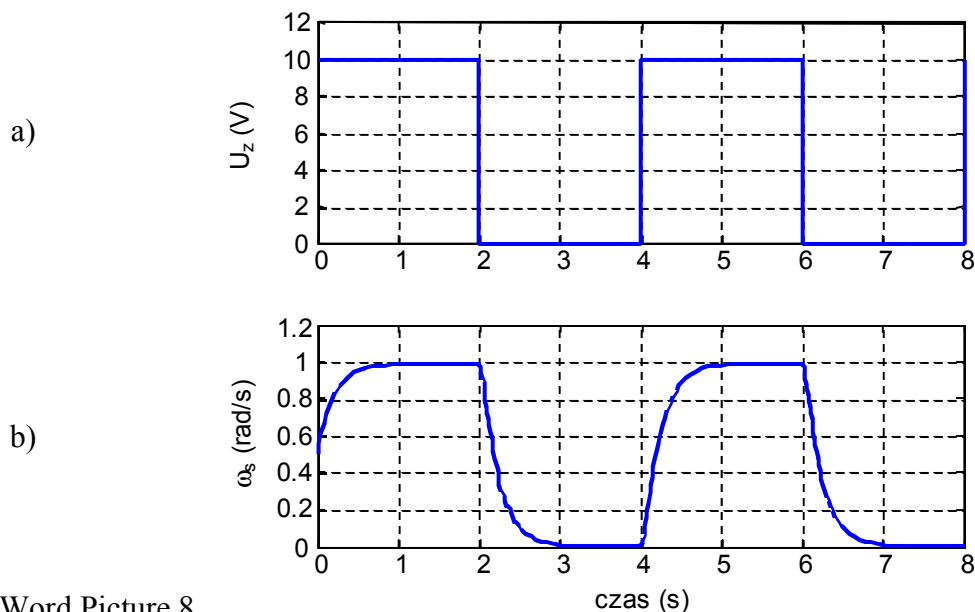
oraz, że warunki początkowe

- $x_{10} = 5$ ;
- $x_{20} = 0.5$ ;

Przed uruchomieniem symulacji należy, jak poprzednio powyższe parametry wprowadzić do przestrzeni roboczej Matlab, wpisując

```
>> Rw=2; Lw=0.1; ke=0.1; J=0.1; B=0.5; km=0.1; x10=5; x20=0.5;
```

Po uruchomieniu symulacji na wykresach, pokazanych na rysunku 6.11, otrzymujemy przebiegi: napięcia zasilającego wirnik ( $U_z$ ) oraz prędkości kątownej wirnika ( $\omega_s$ ) w funkcji czasu.



EMBED Word.Picture.8

**Rys. 6.11.** Przebiegi uzyskane podczas symulacji:  
a) napięcie zasilające wirnik ( $U_z$ ), b) prędkość kątowna wirnika ( $\omega_s$ )

Przebiegi te można również uzyskać wykorzystując funkcję *plot*, wpisując w Matlabie:

```
>> plot (Uz(:,1),Uz(:,2));
>> ylabel('Uz (V)');

>> plot (ws(:,1),ws(:,2));
>> xlabel('czas (s)'); ylabel ('ws (rad/s)');
```