5. WYKORZYSTANIE GRAFÓW PRZEPŁYWU SYGNAŁÓW DO BUDOWY MODELI MATEMATYCZNYCH

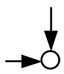
5.1. Wprowadzenie do grafów przepływowych

Najczęściej spotykaną postacią graficzną układów automatyki są schematy strukturalne (blokowe). Obliczenie transmitancji tak narysowanego układów stwarza bardzo duże trudności, zwłaszcza układów złożonych a w szczególności przy występowaniu sprzężeń zwrotnych. Wady tej pozbawiona jest metoda grafów przepływowych.

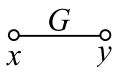
Tworzenie grafów przepływowych obwodów jest możliwe na podstawie:

- schematu blokowego;
- znanej transmitancji;
- bezpośrednio z obiektu poprzez znajomość praw zachodzących w nim.

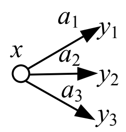
Podstawowymi elementami grafów są:



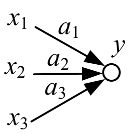
Węzeł - symbolizuje sygnał (zmianę układu);



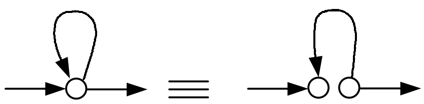
Gałąź – wzajemne zależnośći $G = \frac{y}{x}$



Źródło (węzeł czynny, źródłowy) – jest to węzeł jeśli istnieją tylko gałęzie wychodzące $y_1 = a_1 x$, $y_2 = a_2 x$, $y_3 = a_3 x$



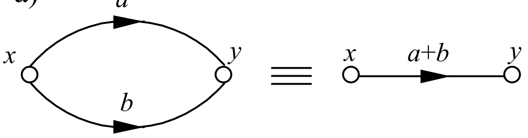
Odbiornik (węzeł bierny, odbiorczy) - jest to węzeł jeśli istnieją tylko gałęzie wchodzące $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$



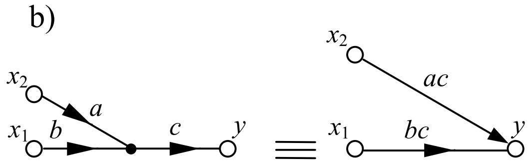
Pośredni węzeł (wtórny węzeł) grafu można podzielić na źródło i odbornik (czynny i bierny). Tak podzielony węzeł nie ma transmitancji.

Podstawowe przekształcenia grafów przepływowych:

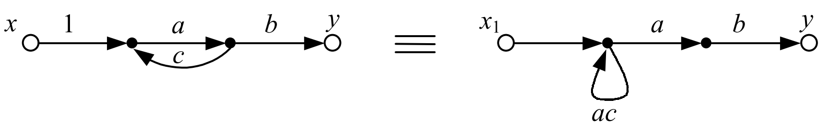
a)



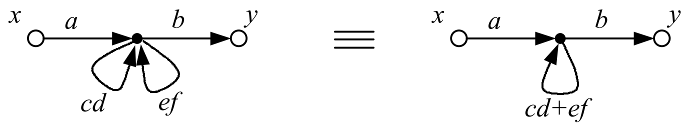
b)



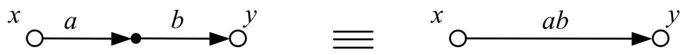
c)



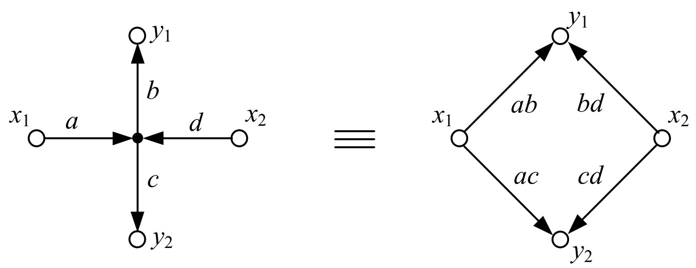
d)



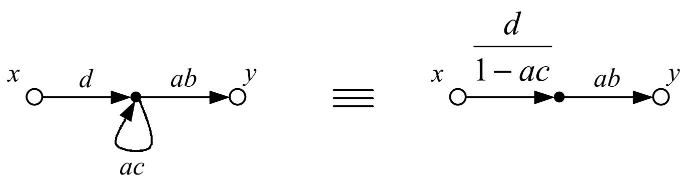
e)



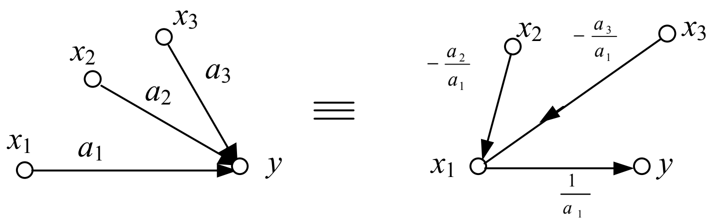
f)



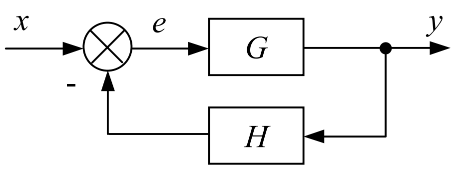
g)



h)



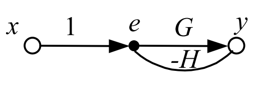
Przykład 5.1.
Redukując grafy znaleźć wypadkową transmitancję układu jak na rysunku 5.1.

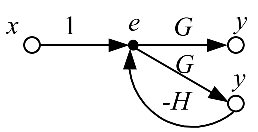


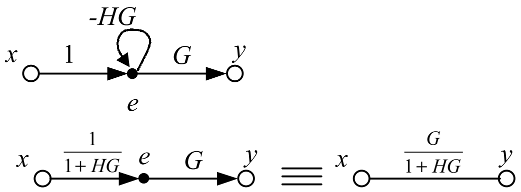
Rys. 5.1

$$e = x - Hy$$

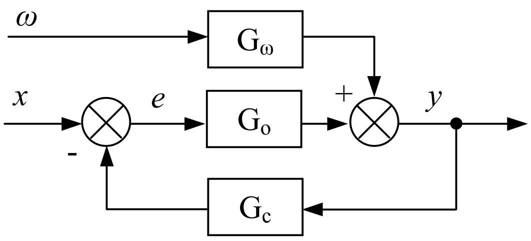
$$y = eG$$







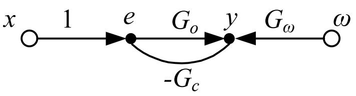
Przykład 5.2.
Redukując grafy znaleźć wypadkową transmitancję układu jak na rysunku 5.2.

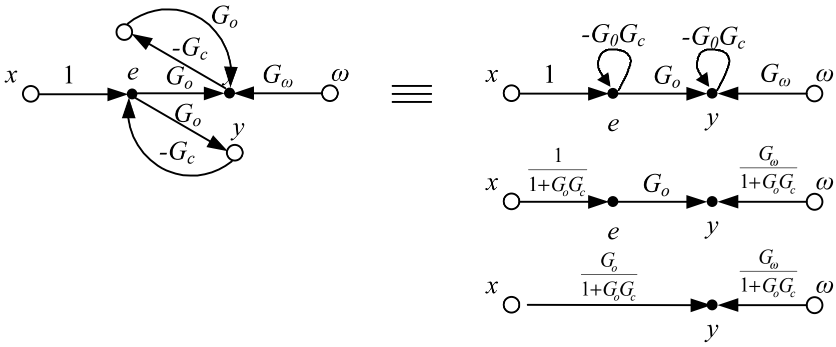


Rys. 5.2

$$y = eG_o + \omega G_\omega$$

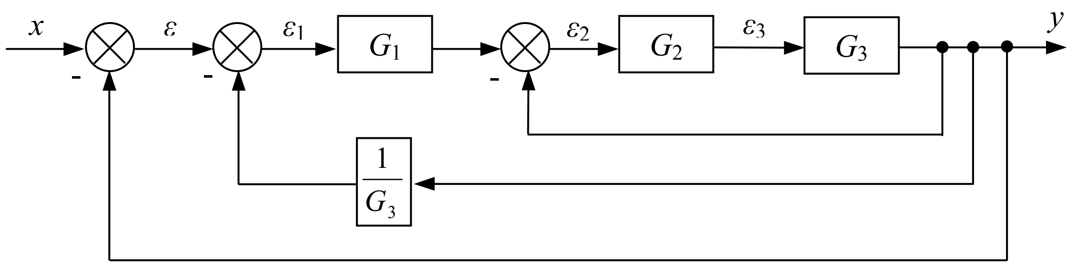
$$x - yG_c = e$$



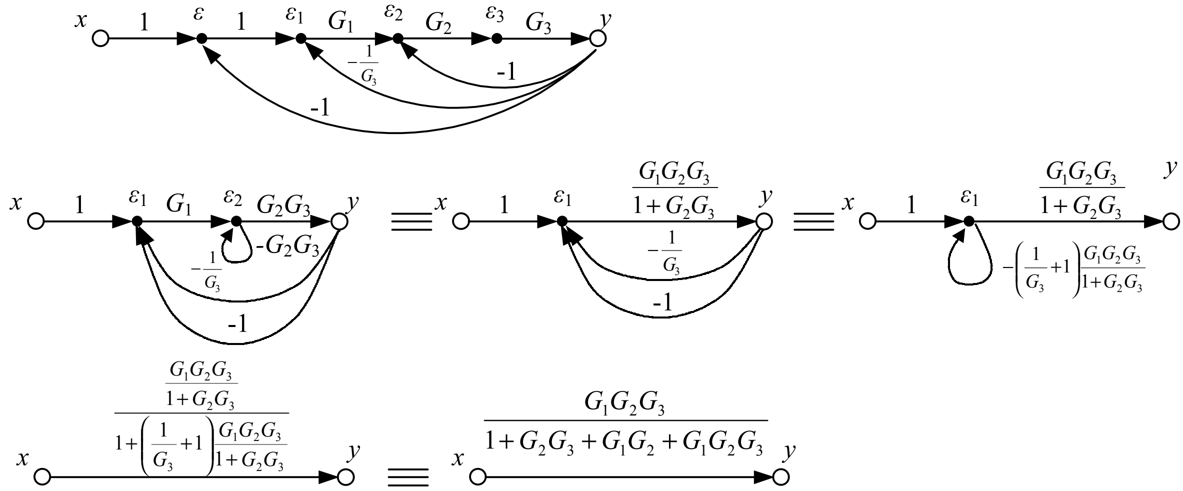


$$y = \frac{G_o}{1 + G_o G_c} x + \frac{G_\omega}{1 + G_o G_c} \omega$$

Przykład 5.3.
Redukując grafy znaleźć wypadkową transmitancję układu jak na rysunku 5.3.

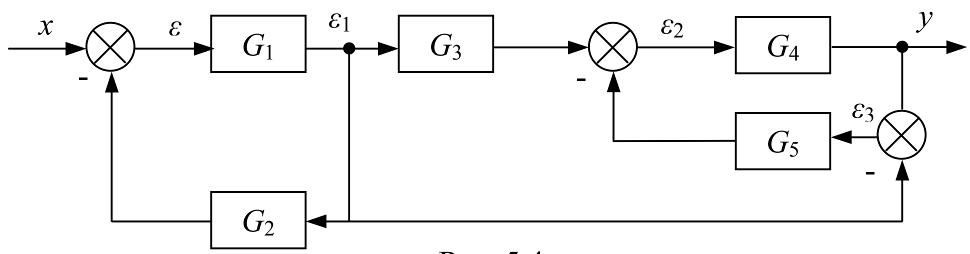


Rys. 5.3

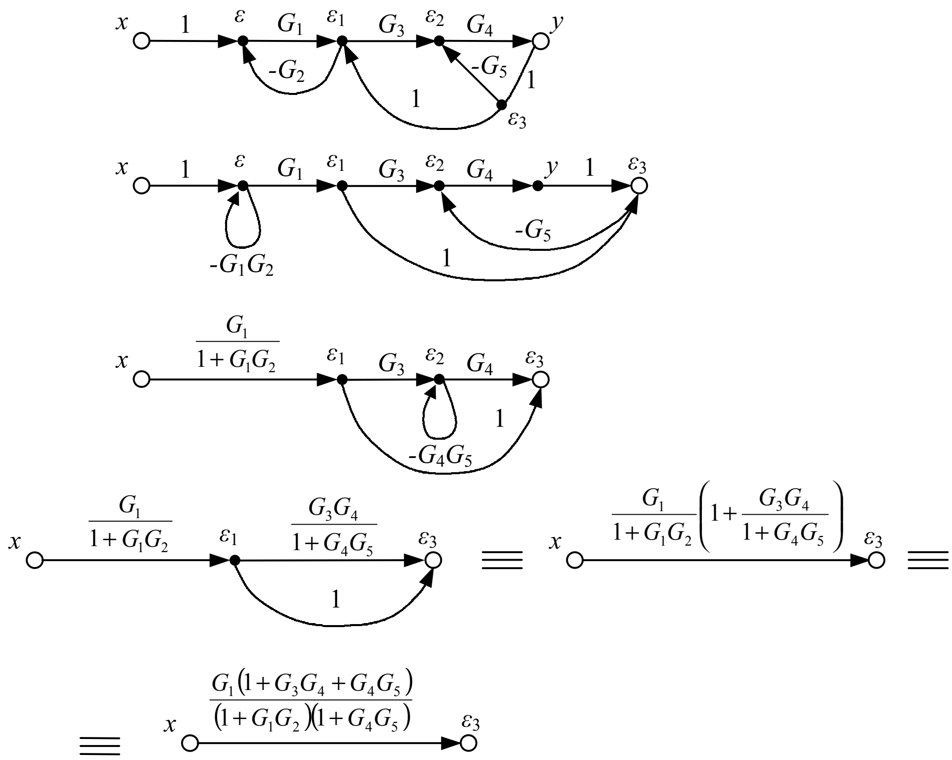


Przykład 5.4.

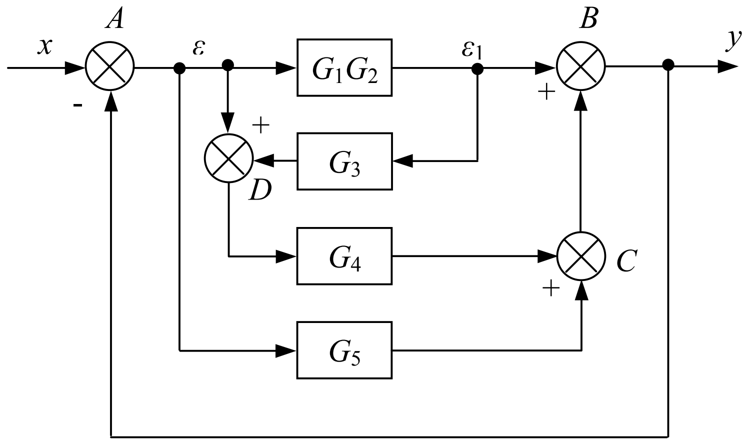
Redukując grafy znaleźć wypadkową transmitancję układu jak na rysunku 5.4.



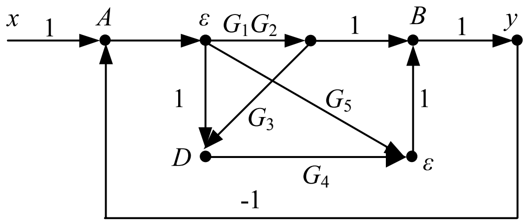
Rys. 5.4

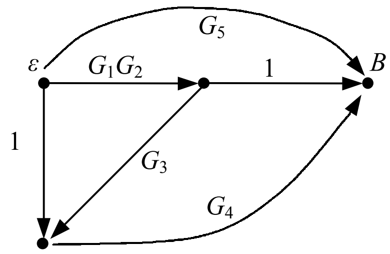


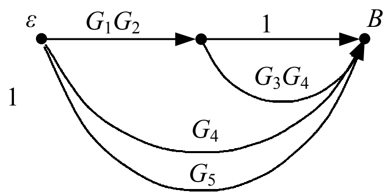
Przykład 5.5.
Redukując grafy znaleźć wypadkową transmitancję G_0 układu jak na rysunku 5.5.



Rys. 5.5







$$G_1G_2(1+G_3G_4)+G_4+G_5=G_0$$

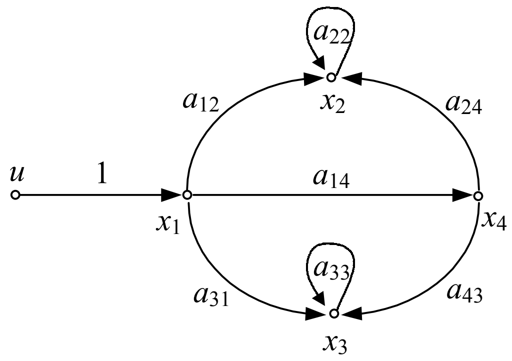
5.2. Reguła Masona dla obliczania transmitancji grafem

Podstawowe pojęcia umożliwiające stosowanie reguły Masona:

Pętla – taka sekwencja gałęzi, która tworzy obieg zamknięty a_{14}, a_{43}, a_{31}, (Rys.5.6)
Pętle sprzężone – są przyległe, mają wspólne węzły lub gałęzie

$$\begin{pmatrix} a_{12}\ a_{24}\ a_{43}\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{14}\ a_{43}\ a_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{33} \\ \vdots \\ a_{14}\ a_{43}\ a_{31} \end{pmatrix},$$

Pętle rozprężone – nie są przyległe, nie mają wspólnych węzłów lub gałęzi,
Ścieżka – taka sekwencja gałęzi, które nie przechodzą powtórnie przez te same węzły,
Pętla własna – np.: a_{22},
Kaskada – to ścieżka, która prowadzi od punktu początkowego do końcowego.



Rys. 5.6

Transmitancję grafu można wyrazić za pomocą wzoru:

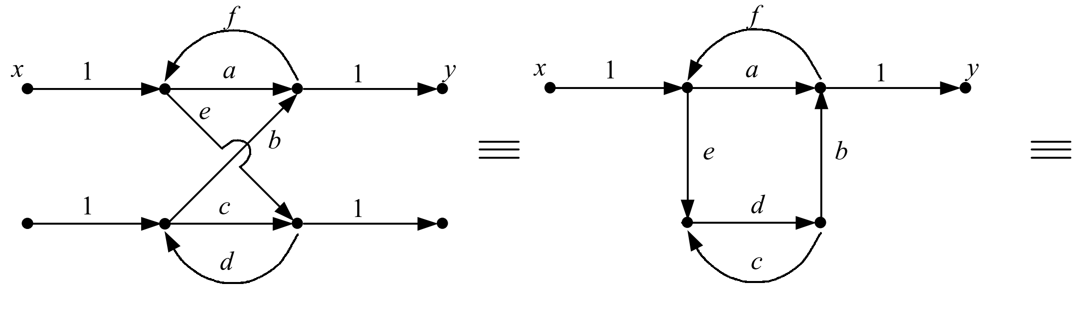
$$G = \frac{\Sigma(G_k \cdot \Delta_k)}{\Delta}$$

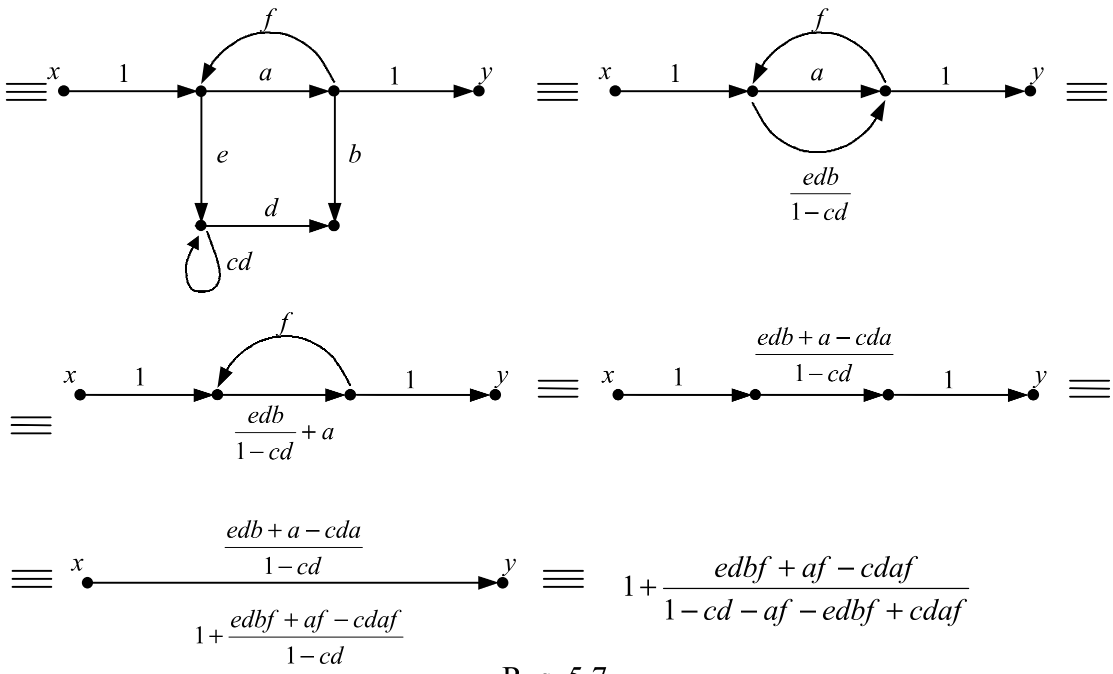
gdzie:
G_k – kaskada, funkcja przejścia k- tej (ścieżki grafu) kaskady grafu;
Δ – wyróżnik (wyznacznik) grafu;

$$\Delta = 1 - \Sigma p_i + \Sigma p_i p_j - \Sigma p_i p_j p_l + \ldots$$

p_i – współczynnik wzmocnienia i – tej pętli grafu, usuwamy te wyrazy, które zawierają iloczyn współczynników wzmocnienia pętli sprzężonych;
Δ_k – powstaje z Δ przez usunięcie wyrazów zawierających wzmocnienia tych pętli, które przylegają do k – tej kaskady.
Σp_i - suma transmitancji wszystkich pętli,
$\Sigma p_i p_j$ - suma iloczynów transmitancji pętli nie stykających się ze sobą (nie sprzężonych) branych po dwie,
$\Sigma p_i p_j p_l$ - suma iloczynów transmitancji pętli nie stykających się ze sobą (nie sprzężonych) branych po trzy,
$\Sigma G_k \cdot \Delta_k$ - suma iloczynów transmitancji G_k wszystkich kaskad grafu przez wartość Δ_k odpowiadającą wielkości Δ dla części grafu nie stykającej się z k - tą kaskadą.

Przykład 5.6.
Wyznaczyć transmitancję grafu jak na rysunku 5.6.





Rys. 5.7

Kaskady:

$G_1 = 1 \cdot a \cdot 1 = a$

$G_2 = 1 \cdot e \cdot d \cdot b \cdot 1 = edb$

Pętle:

$p_1 = af$

$p_2 = cd$

$p_3 = edbf$

sprzężone: $p_1 p_3$, $p_2 p_3$ nie sprzężone: $p_1 p_2$

$\Delta = 1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3$

$\Delta = 1 - af - cd - edbf + afcd$

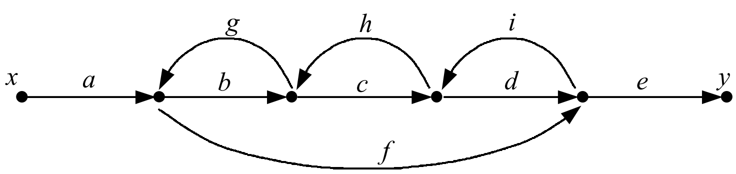
$\Delta_1 = 1 - cd$

$\Delta_2 = 1$

$$G = \frac{\sum G_k \cdot \Delta_k}{\Delta} = \frac{G_1 \Delta_1 + G_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{a(1 - cd) + edb}{1 - af - cd - edbf + afcd}$$

Przykład 5.7.

Wyznaczyć transmitancję grafu jak na rysunku 5.7.



Rys. 5.8

Pętle:

$p_1 = bg$

$p_2 = ch$

$p_3 = di$

$p_4 = fghi$

Tylko dwie pętle nie stykają się ze sobą p_1 i p_2, stąd: $\Delta = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + p_1 p_3$

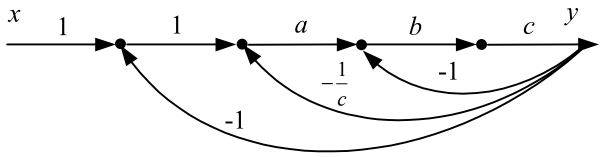
Kaskady:

$G_1 = abcde$ nie ma pętli nie złączonej z kaskadą G_1, stąd $\Delta_1 = 1$

$G_2 = afe$ jest pętla p_2 nie złączona z kaskadą G_2, stąd: $\Delta_2 = 1 - G_2 = 1 - ch$

$$G = \frac{abcde + afe - afech}{1 - (bg + ch + di + fghi) + bgdi}$$

Przykład 5.8.
Dla grafu wyznaczyć transmitancję metodą Masona.



Rys. 5.9

Pętle:

$p_1 = -bc$

$p_2 = -ab$

$p_3 = -abc$

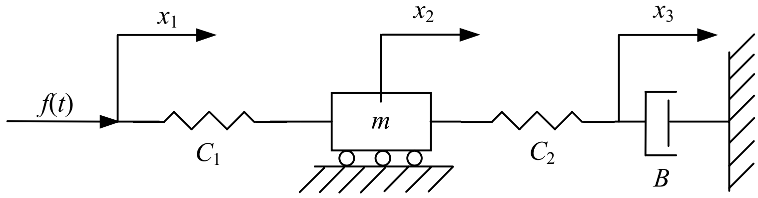
Wszystkie pętle stykają się ze sobą, stąd: $\Delta = 1 + ab + abc + bc$

Kaskady:

$G_1 = abc$ nie ma pętli nie złączonej z kaskadą G_1, stąd Δ_1=1

$$G = \frac{\sum G_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{abc}{1 + ab + abc + bc}$$

Przykład 5.9.
Dla układu jak na rysunku 5.10 wyznaczyć transmitancję metodą Masona.



Rys. 5.10

$x_1(t) = f(t)$ - wejście

$y(t) = B\dot{x}_3$

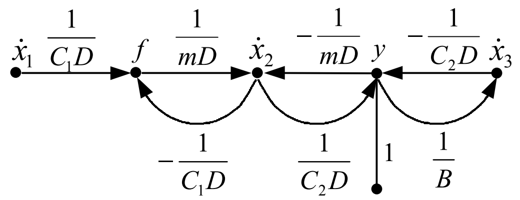
$$\frac{1}{C_1 D}\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = f(t)$$

$$mD\dot{x}_2 + \frac{1}{C_1 D}\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + \frac{1}{C_2 D}\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_3\right) = 0 \quad \rightarrow \quad mD\dot{x}_2 - f(t) + y = 0$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{mD} f(t) + \frac{1}{mD} y$$

$$B\dot{x}_3 + \frac{1}{C_2 D}\left(\dot{x}_3 - \dot{x}_2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{C_2 D}\left(\dot{x}_{2,} - \dot{x}_3\right)$$

$$y = B\dot{x}_3 \rightarrow \dot{x}_3 = \frac{1}{B} y$$



Pętle:

$$p_1 = \frac{1}{mD}\left(-\frac{1}{C_1 D}\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{C_2 D}\left(-\frac{1}{mD}\right)$$

$$p_3 = \frac{1}{B}\left(-\frac{1}{C_2 D}\right)$$

Nie stykają się p_1 i p_3, stąd: $\Delta = 1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1 p_3$

Kaskady:

$G_1 = \frac{1}{C_1 D} \cdot \frac{1}{mD} \cdot \frac{1}{C_2 D}$ nie ma pętli nie złączonych z kaskadą G_1, stąd $\Delta_1 = 1$

$$G = \frac{\sum G_k \Delta_k}{\Delta} = -\frac{\dfrac{1}{C_1 C_2 m D^3}}{1 + \dfrac{1}{mC_1 D^2} + \dfrac{1}{mC_2 D^2} + \dfrac{1}{BC_2 D} + \dfrac{1}{mC_1 C_2 B D^3}}$$