8. STABILNOŚĆ UKŁADÓW REGULACJI

Zamknięcie układu pętlą sprzężenia zwrotnego poprawia dokładność regulacji i szybkość, ale powstaje możliwość, że układ będzie niestabilny.
Transmitancja układu zamkniętego:

$$G_z(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Definicja (warunek konieczny i wystarczający)
Badamy położenie pierwiastków równania charakterystycznego $1+G(s)H(s)$ na płaszczyźnie zespolonej. Zamknięty UAR jest stabilny wówczas gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym, aby nie było pierwiastków równania charakterystycznego zamkniętego UAR o dodatniej wartości części rzeczywistej jest, aby:
- wszystkie współczynniki wielomianu miały ten sam znak;
- wszystkie współczynniki wielomianu były różne od zera.

Dla układu I i II stopnia warunek powyższy jest wystarczający, ale dla układów wyższych rzędów należy dodatkowo zastosować kryterium Routha lub Hurwitza np.:

$$s^3+2s^2+2s+40=(s+4)\left(s^2-2s+10\right)$$

- układ ma dwa pierwiastki o części rzeczywistej dodatniej.

8.1. Kryterium Routha [8]

$$1+G(s)H(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+a_{n-3}s^{n-3}+\ldots+a_1 s+a_0=0$$

$$\begin{array}{llll}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \\
b_1 & b_3 & b_5 & \\
c_1 & c_3 & & \\
d_1 & d_3 & & \\
e_1 & & & \\
f_1 & & &
\end{array}$$

gdzie $b_1=\dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$; $b_3=\dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$; $b_5=\dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$;

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_3\end{vmatrix}}{-b_1};\quad c_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_5\end{vmatrix}}{-b_1}$$

Wszystkie współczynniki pierwszej kolumny mają mieć ten sam znak.
Każdej zmianie znaku odpowiada jeden pierwiastek z częścią rzeczywistą dodatnią.

Przykład 8.1

$$s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & \\ 6 & 3 & \\ 3 & & \\ 3 & & \end{array}$$

Wszystkie współczynniki pierwszej kolumny są dodatnie.

Przykład 8.2

$$s^5 + s^4 + 3s^3 + 4s^2 + s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & \\ 5 & 2 & \\ -1{,}4 & & \\ 2 & & \end{array}$$

Dwa pierwiastki są z części rzeczywistej dodatniej.

Przykład 8.3

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 40 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 40 \\ -18 & \\ 40 & \end{array}$$

Dwa pierwiastki znajdują się w prawej części.

8.2. Kryterium Hurwitza [10]

Równanie charakterystyczne zamkniętego UAR ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie jeżeli :

1. wszystkie współczynniki równania istnieją i mają ten sam znak;
2. poszczególne podwyznaczniki (minory) wyznacznika Δ_n są większe od zera.

$$1 + G(s)H(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Przykład 8.4

$$4s^4+2s^3+8s^2+3s+1{,}5=0$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 3 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 \end{matrix}$$

$$2>0$$

$$2\cdot 8-3\cdot 4>0$$

$$2\cdot 8\cdot 3-3\cdot 3\cdot 4-2\cdot 2\cdot 1{,}5>0$$

Inny sposób:

1. Podzielić na część parzystą i nieparzystą;
2. Utworzyć iloraz z tym, że część o wyższym stopniu będzie stanowić licznik;
3. Rozwinąć iloraz wielomianów na ułamek łańcuchowy Stieltjesa.

$$\frac{P(s)}{N(s)}=\alpha_1 s+\cfrac{1}{\alpha_2 s+\cfrac{1}{\alpha_3 s+\cfrac{1}{\alpha_4 s+\ldots}}}$$

3. Układ jest stabilny gdy wszystkie współczynniki α są dodatnie. Istnieje możliwość istnienia pierwiastków nie mających części rzeczywistych typu $\left(s^2+\omega_1^2\right)$.

Przykład 8.5

$$4s^4+2s^3+8s^2+3s+1{,}5=0$$

$$\frac{4s^4+8s^2+1{,}5}{2s^3+3s}$$

Sposób zapisu:

$$4s^4+8s^2+1{,}5 \quad \div \quad 2s^3+3s=2s$$

$$\underline{4s^4+6s^2}$$

$$2s^2+1{,}5$$

$$2s^3+3s \quad \div \quad 2s^2+1{,}5=s$$

$$\underline{2s^3+1{,}5s}$$

$$1{,}5s$$

$$2s^2+1{,}5 \quad \div \quad 1{,}5s=\frac{4}{3}s$$

$$\underline{2s^2}$$

$$1{,}5$$

$$1{,}5s \quad \div \quad 1{,}5=s$$

$$\underline{1{,}5s}$$

$$0$$

$$\frac{4s^4+8s^2+1{,}5}{2s^3+3s}=$$

$$=2s+\cfrac{1}{\cfrac{2s^3+2s}{2s^2+1{,}5}}=$$

$$=2s+\cfrac{1}{1{,}5s+\cfrac{1}{\cfrac{2s^2+1{,}5}{1{,}5s}}}=$$

$$=2s+\cfrac{1}{1{,}5s+\cfrac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{1{,}5}{1{,}5s}}}=$$

$$=2s+\cfrac{1}{1{,}5s+\cfrac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{1}{s}}}$$

8.3. Kryterium Michajłowa [4]

Mając transmitancję układu otwartego $G_o(s) = \dfrac{L(s)}{M(s)} = G(s)\,H(s)$

$$G_z(s) = \frac{G_o}{1+G_o} = \left.\frac{\dfrac{L(s)}{M(s)}}{1+\dfrac{L(s)}{M(s)}}\right|^{\cdot M} = \frac{L(s)}{M(s)+L(s)}$$

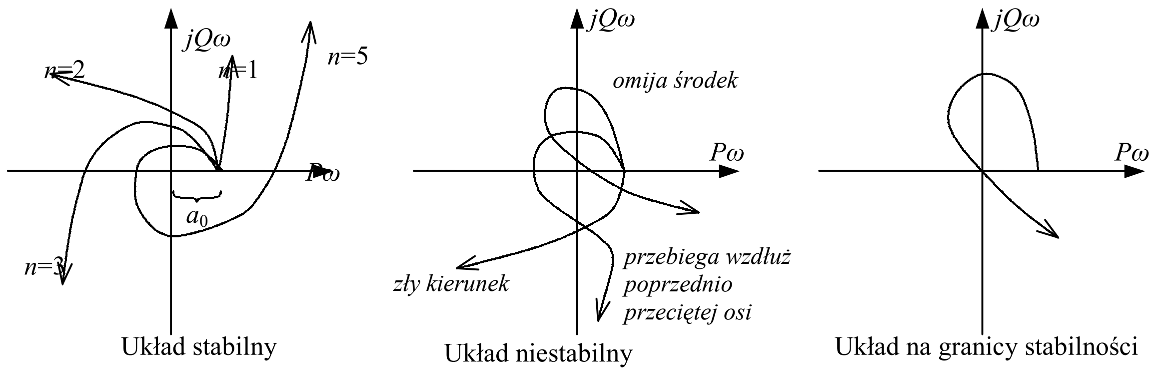
czyli równanie charakterystyczne układu zamkniętego będzie: $M(s)+L(s)$.
Mając wielomian charakterystyczny układu zamkniętego $M(s)+L(s)=N(s)$

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

a_n – są rzeczywiste, mogą być +, _, lub równe 0.

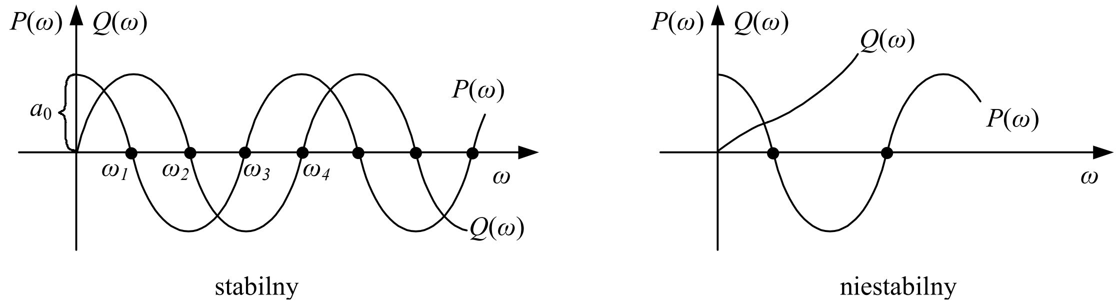
Podstawiamy $s{=}j\omega$, gdyż z wielu możliwych punktów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wybieramy zbiór punktów położonych na osi liczb urojonych, co odpowiada wymuszeniu harmonicznemu $N(j\omega) = \mathrm{Re}[N(j\omega)] + \mathrm{Im}[N(j\omega)]$ i sporządzamy wykres. Koniec wektora wykreśli nam tzw. hodograf Michajłowa.

Układ automatycznej regulacji jest stabilny, gdy zmiana argumentu funkcji $N(j\omega)$ przy zmianie pulsacji ω od zera do $+\infty$ wynosi $n\cdot\dfrac{\pi}{2}$, gdzie n oznacza stopień równania charakterystycznego.



Rys. 8.1

<u>Metoda mnemotechniczna</u>



Rys. 8.2

Przykłady 8.6

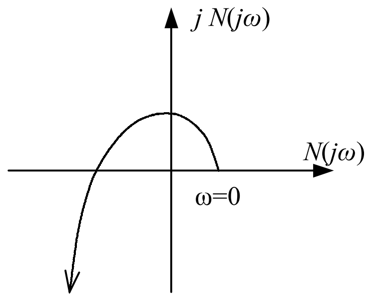
$$G_o(s) = \frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

gdzie K= 60 [rad/sek]

T_1=0,6s;
T_2=0,01s;

Re $N(j\omega) = K - (T_1 - T_2)\omega^2 = 60 - 0{,}6\omega^2$

Im $N(j\omega) = \omega + T_1 T_2 \omega^3 = \omega - 6 \cdot 10^{-3}\omega^3$



Rys. 8.3

8.4. Kryterium Nyquista [9]

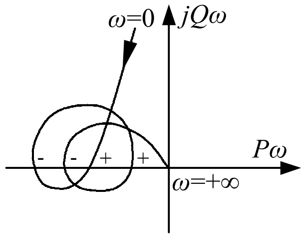
Służy do oceny stabilności układu zamkniętego UAR przy pomocy oceny funkcji $N(j\omega)$ układu otwartego. Układ zamknięty jest stabilny wówczas, gdy całkowita zmiana argumentu mianownika transmitancji widmowej $(1+G(j\omega)H(j\omega))$przy zmianie pulsacji -∞ wynosi *m* – kątów pełnych, gdzie *m* oznacza ilość pierwiastków równania charakterystycznego układu otwartego w prawej półpłaszczyźnie.

$$\Delta agr[1+G(j\omega)H(j\omega)] = m2\pi \text{ przy zmianie } -\infty \rightarrow +\infty$$

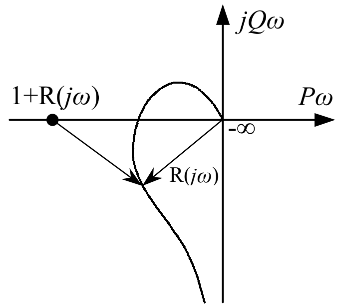
1. Jeżeli układ otwarty jest stabilny i jego charakterystyka amplitudowo – fazowa $G(j\omega)H(j\omega)$ dla pulsacji ω od 0 do +∞ nie obejmuje punktu (-1;+j0) to wtedy i tylko wtedy po zamknięciu będzie on również stabilny.
2. Jeżeli układ otwarty jest niestabilny i ma *m* – pierwiastków swego równania charakterystycznego w prawej półpłaszczyźnie, to układ zamknięty jest stabilny wówczas, gdy charakterystyka amplitudowo – fazowa $G(j\omega)H(j\omega)$ układu otwartego okrąża $+\frac{m}{2}$ razy punkt (-1;+j0) w kierunku dodatnim (przy czym znak dodatni odnosi się do przeciwnego kierunku obrotu niż obroty wskazówek zegara, przy zmianie od 0 do +∞)

Ad. 1. „Reguła lewej strony": układ zamknięty jest stabilny, kiedy punkt (-1;+j0) znajduje się w obszarze leżącym po lewej stronie charakterystyki $G(j\omega)H(j\omega)$ idąc w stronę rosnących ω.

W układach z większą ilością sprzężeń zwrotnych lepiej stosować metody mnemotechniczne.



Układ jest niestabilny



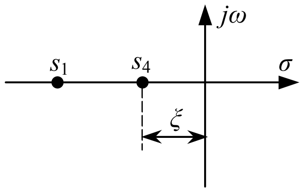
Rys. 8.4

Dodatni kierunek przecinania zakładamy z góry na dół. Konieczna jest znajomość liczby pierwiastków równania charakterystycznego układu otwartego, które leżą w prawej półpłaszczyźnie (w ilości m). Rozwiązane to jest za pomocą kryterium Routha, Michajłowa lub znajomości pierwiastków tego równania co jest możliwe w układach z jednym sprzężeniem. W układach z większą ilością sprzężeń lepiej stosować kryterium Michajłowa.
Układ zamknięty wówczas, gdy różnica pomiędzy dodatnimi i ujemnymi przecięciami charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego dla ω od 0 do $+\infty$ z ujemną osią liczb rzeczywistych na lewo od punktu(-1;+j0) równa się $\frac{m}{2}$, gdzie m oznacza ilość pierwiastków równania charakterystycznego układu otwartego, leżących w dodatniej półpłaszczyźnie. Gdy układ otwarty jest stabilny lub neutralny (pierwiastki na osi $j\omega$) różnica wynosi 0.

8.5. Zapas stabilności

Układ pracujący w warunkach przemysłowych narażony jest na działanie szeregu czynników szkodliwych: temperatura, wilgotność, zapylenie, wibracje itp. Czynniki te powodują między innymi zmiany stałych czasowych układu. W związku z czym układ dobrany optymalnie po pewnym czasie mógłby stać się niestabilny. Dlatego projektując układ uwzględnia się tzw. zapas stabilności. Zapas ten zapewnia również właściwy kształt procesów przejściowych.
Zapas stabilności można wyznaczyć:

1. Za pomocą zbadania położenia pierwiastków dominujących. Pierwiastki dominujące to pierwiastki znajdujące się najbliżej granicy stabilności a odpowiadające im czas regulacji i przeregulowanie przyjmują duże wartości.
   a) Dominujący pierwiastek jest rzeczywisty



Rys. 8.5

ξ – tłumienie (bezwzględne), miara szybkości działania układu – stopień stabilności.

$$\xi = \min\left|\mathrm{Re}\, s_k\right|$$

Znamy równanie charakterystyczne UAR i jego pierwiastki:

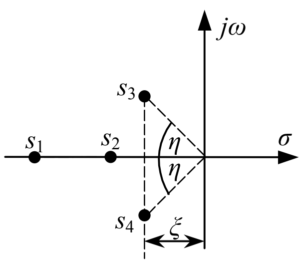
$$1 + H(s)G(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$(s - s_1)(s - s_2)\ldots\underbrace{(s - s_4)}_{(T_k s + 1)}\ldots(s - s_n) = 0$$

$$T_k = -\frac{1}{s_4} = \frac{1}{\xi}$$ - dominująca stała czasowa

Jeżeli jest znane położenie pierwiastka dominującego rzeczywistego to można wyznaczyć stałą czasową T_k, a następnie na podstawie badań członu I rzędu ocenić czas regulacji, który powinien wynosić (3 ÷ 4) T_k.

b) Dominujący pierwiastek jest zespolony



$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\eta \text{ - oscylacyjność} \\ \zeta_z = \cos\eta \text{ - tłumienie względne} \end{array}\right\}$ miary zapasu stabilności

Rys. 8.6

$$(s-s_1)(s-s_2)\underbrace{(s-s_3)(s-s_4)}_{\left(T_z^2 s^2 + 2\xi_z T_z s + 1\right)}\ldots$$

$T_z \xi_z$ - dominujące stałe czasowe i liczba tłumienia związana z pierwiastkami dominującymi zespolonymi równania charakterystycznego.

Na podstawie badań członów II rzędu, można powiedzieć, że ξ_z wpływa na oscylacyjny lub aperiodyczny charakter odpowiedzi a T_z wpływa na czas regulacji.

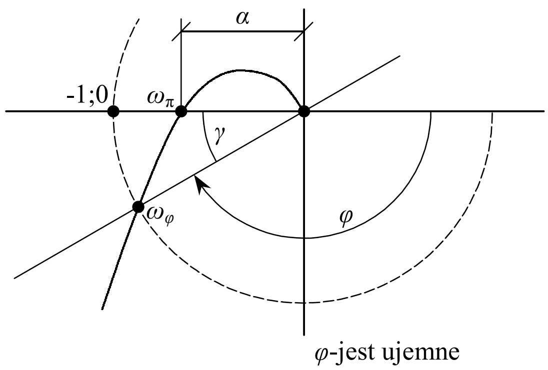
$$r_k = \frac{1}{T_z} = \omega_0 \quad ; \quad \eta = arc\cos\xi_z$$

W większości przypadków dla układów dobrze zaprojektowanych przyjmuje się:

$$0{,}4 \le \xi_z \le 0{,}8 \quad \left(oraz\ 2\% \le \Delta C_{mr} \le 25\%\right)$$

Powyższą wartość zapasu stabilności ξ_z z reguły wykorzystuje się w syntezie układów za pomocą metody Evansa (metoda miejsc geometrycznych pierwiastków równania charakterystycznego).

2. Za pomocą zapasu wzmocnienia i fazy w układzie otwartym.



Rys. 8.7

Przejście układu stabilnego na granicę stabilności może dokonać się poprzez:

a) wzrost wzmocnienia;

b) wzrost jednej ze stałych czasowych (dominującej).

W przypadku (a) wydłuża się wektor odpowiadający pulsacji fazy $\omega_\pi(\alpha)$. W przypadku (b) zachodzi obrót wektora odpowiadający pulsacji modułu ω_φ.

a) Zapas wzmocnienia;

Dla układu stabilnego jest $\left|H(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)\right| = \alpha$

Dla układu na granicy stabilności $K_d\left|H(j\omega_\pi)G(j\omega_\pi)\right| = 1$

stąd $K_d = \dfrac{1}{\alpha}$

dodatkowe wzmocnienie, które można odczytać z wykresu

b) Zapas fazy;

Jest to kąt określony wzorem $\gamma = 180 + \varphi$ (φ jest ujemne). W przypadku układów dobrze zaprojektowanych przyjmuje się następujące wartości:

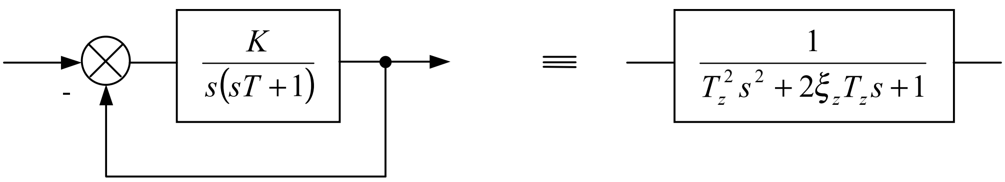
$$2 \le K_d \le 4$$
$$6dB \le \Delta L_M \le 12db$$

Znaczenie drugorzędne

$$30° \le \gamma \le 60°$$

Znaczenie pierwszorzędne

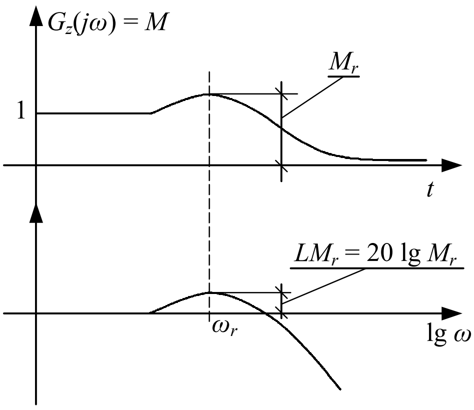
3. Za pomocą amplitudy rezonansowej układu zamkniętego.
   Mamy układ:



$$T_z = \sqrt{\frac{T}{K}} \quad ; \quad \xi_z = \frac{1}{2\sqrt{TK}}$$

Rys. 8.8

Stosując klasyczne metody poszukiwania ekstremów funkcji można wyznaczyć maksymalną wartość modułu M_r (amplituda rezonansowa), która jest miarą zapasu stabilności.



$$M_r = \frac{1}{2\xi_z\sqrt{1-\xi_z^2}}$$

Dla układów dobrze zaprojektowanych:

$$1{,}1 \le M_r \le 1{,}5$$
$$1dB \le L_{Mr} \le 4dB$$

Szybkość działania układu charakteryzuje pulsacja rezonansowa ω_r

$$\omega_r = \frac{1}{T_z}\sqrt{1-2\xi_z^2} \quad ; \quad \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi_z^2}$$

Rys. 8.9

4. Zapas stabilności względem parametrów układu.
5. Bezpośrednia ocena przebiegu przejściowego np. przeregulowanie.

Przykład 8.7

Za pomocą charakterystyki amplitudowo-fazowej zbadać zapas stabilności układu opisanego funkcją przejścia w układzie otwartym:

$$H(s)G(s) = \frac{KK_Z}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

dla danych liczbowych:

$KK_z = 0{,}8$ [1/s]

$T_1 = 1$ [s]

$T_2 = 10$ [s]

Rozwiązanie

Na podstawie funkcji przejścia w układzie otwartym otrzymujemy na stepujące związki, niezbędne do wykreślenia charakterystyki:

$$|H(j\omega)G(j\omega)| = \frac{KK_Z}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}\,\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}$$

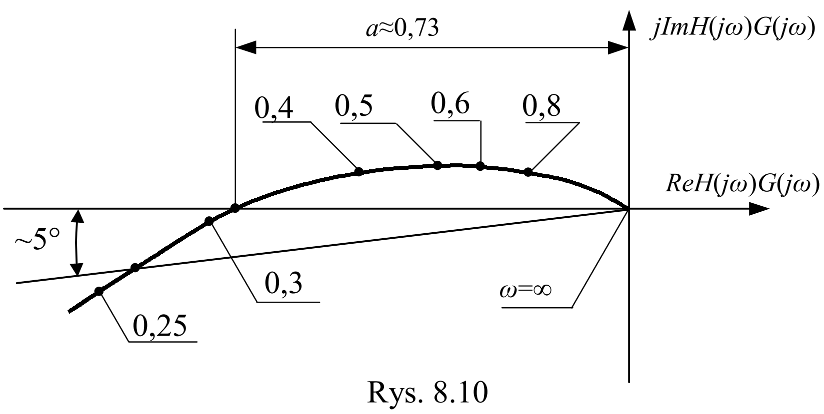
$$\varphi = -90^{\circ} - \mathrm{arctg}\,\omega T_1 - \mathrm{arctg}\,\omega T_2$$

Przyjmując wartości pulsacji ω sygnału harmonicznego z przedziału [0,25; ∞] otrzymamy współrzędne punktów charakterystyki zestawione w tabeli 8.1.

Tabela 8.1.

ω [1/s]	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	∞
|H(jω)G(jω)|	1,15	0,81	0,45	0,28	0,19	0,10	0,06	0
φ [°]	-172	-178	-188	-195	-201	-212	-219	-270

Na podstawie tabeli 8.1. wykreślamy charakterystykę amplitudowo-fazową przedstawioną na rysunku. 8.11.



Rys. 8.10

Zgodnie z definicją zapasu stabilności, wyrażonego przez zapas wzmocnienia i fazy otrzymujemy:

$$K_d = \frac{1}{a} \approx \frac{1}{0{,}73} \approx 1{,}37$$

$$\gamma = 180 + \varphi \approx 5\ [^{\circ}]$$

Bezpieczna praca układu regulacji oraz właściwy kształt jego charakterystyk czasowych wymagają, aby zapas stabilności charakteryzowały następujące wielkości:

$2 \leq K_d \leq 4$

$30\,[^o] \leq \gamma \leq 60\,[^o]$

W związku z tym można stwierdzić, że rozpatrywany układ ma za mały zapas wzmocnienia, a szczególnie za mały zapas fazy. Można oszacować wartość przeregulowania odpowiadającą wyznaczonemu zapasowi fazy, mianowicie:

$\Delta c_{mr} \approx 95\,[\%]$

Tak dużej wartości przeregulowania będzie odpowiadał również bardzo duży czas regulacji, wykluczający praktyczne zastosowanie rozpatrywanego układu, o ile nie zastosuje się odpowiedniego regulatora lub członu korekcyjnego.

Przykład 8.8.

Za pomocą charakterystyk logarytmicznych amplitudowej i fazowej zbadać zapas stabilności układu regulacji opisanego funkcją przejścia w układzie otwartym:

$$H(s)G(s) = \frac{KK_z}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

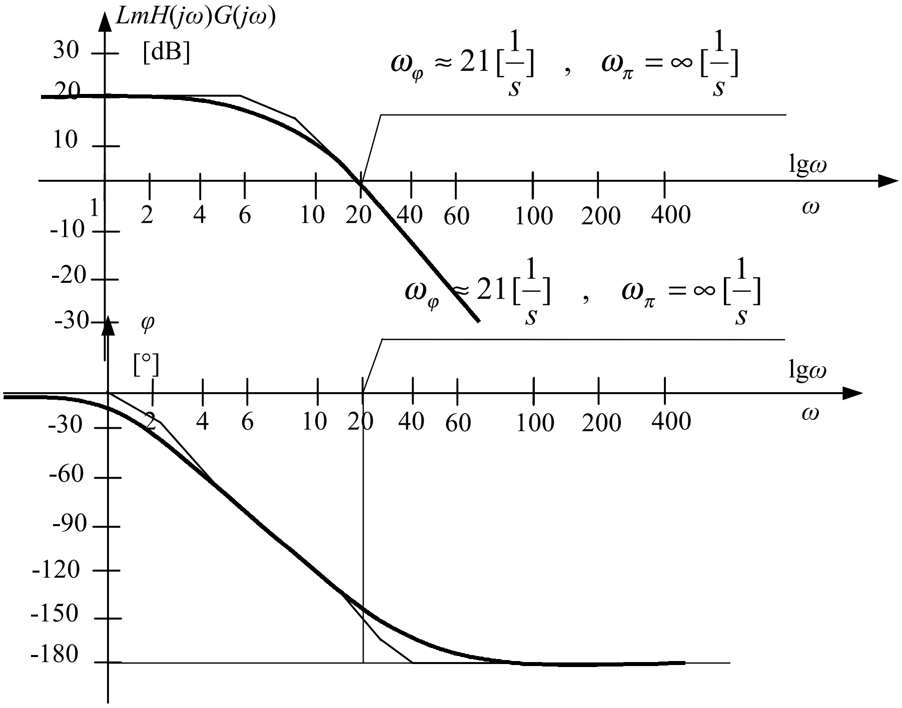
dla danych liczbowych:

$KK_z = 10\,[-]$

$T_1 = 0{,}1\,[s]$

$T_2 = 0{,}2\,[s]$

Rozwiązanie



Rys. 8.11

Na podstawie funkcji przejścia w układzie otwartym otrzymujemy następujące związki, niezbędne do wykreślenia charakterystyk logarytmicznych:

$$LmH(j\omega)G(j\omega) = 20\lg KK_Z - 20\lg\sqrt{1+T_1^2\omega^2} - 20\lg\sqrt{1+T_2^2\omega^2}$$

$\varphi = -\text{arctg}\ \omega T_1 - \text{arctg}\ \omega T_2$

Wyznaczając charakterystyki przybliżone za pomocą asymptot, a następnie uwzględniając wartości błędów powstałych wskutek przybliżania, otrzymamy charakterystyki o większej dokładności pokazane na Rys. 8.12.

Zgodnie z definicją zapasu stabilności, wyrażonego poprzez zapas wzmocnienia i fazy, otrzymujemy:

$\Delta Lm = 20 \lg K_d = \infty$ [dB]

$\gamma = 180 + \varphi = 36$ [^{o}]

Bezpieczna praca układu regulacji oraz właściwy kształt jego charakterystyk czasowych wymagają, aby zapas stabilności charakteryzowały następujące wartości:

6 [dB] $\le \Delta Lm \le$ 12 [dB]

30 [^{o}] $\le \gamma \le$ 60 [^{o}]

W związku z tym można stwierdzić, że:

a) rozpatrywany układ ma za duży zapas wzmocnienia; jest to jednak cecha strukturalna układów zawierających co najwyżej dwie stałe czasowe i dopuszczalna w układach regulacji, gdyż zapas wzmocnienia pełni rolę drugorzędną w porównaniu z zapasem fazy;

b) rozpatrywany układ ma zapas fazy zgodny z wytycznymi projektowymi; należy jednak pamiętać, że małym wartościom zapasu fazy odpowiadają duże wartości przeregulowania i czasu regulacji oraz odwrotnie: w rozpatrywanym przypadku otrzymamy:

$\Delta c_{mr} = 43$ [%]

$$t_r = \frac{\omega_r t_r}{\omega_r} \approx \frac{\omega_r t_r}{\omega_\varphi} = \frac{10{,}6}{21} = 0{,}5[s].$$