
PIOTR GRABOWSKI

STABILNOŚĆ UKŁADÓW LURIE

Wersja z października 13, 2005

KRAKÓW 1999

WYDAWNICTWA AGH

Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

© Wydawnictwa AGH, Kraków 1999

ISBN 83-911656-7-1

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Andrzej Wichur*

Z-ca Redaktora Naczelnego: *mgr Beata Barszczewska - Wojda*

Recenzent: *prof. dr hab. Krzysztof Kuźmiński*

Książka powstała w oparciu o badania własne (umowa nr 10.10.120.190)
dofinansowane przez J.M. Rektora AGH.

Projekt okładki i strony tytułowej: *Beata Barszczewska - Wojda*

Opracowanie edytorskie: *Ewa Betka*

Druk wykonano ze składu dostarczonego przez Autora

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
tel. 617-32-28, tel./fax 636-40-38

SPIS TREŚCI

WYKAZ OZNACZEŃ	6
1. WSTĘP	11
2. STABILNOŚĆ CIĄGLYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH	15
2.1. CIĄGLE UKŁADY DYNAMICZNE	15
2.2. AUTONOMICZNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE	17
2.3. WARUNKI DOSTATECZNE ASYMPTOTYCZNEJ STABILNOŚCI	20
2.4. POMOCNICZE LEMATY	23
2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE	37
2.6. WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TWIERDZEŃ Z ROZDZIAŁU 2.5	53
2.6.1. Równoczesna dekompozycja równań stanu i układów Lurie	53
2.6.2. Weryfikacja głównych założeń Twierdzeń 2.5.1 i 2.5.3	55
2.6.3. Równoczesna dekompozycja równań stanu i układu Lurie	57
2.6.4. Weryfikacja głównych założeń Twierdzenia 2.5.2	58
2.7. METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ LURIE	60
2.7.1. Metoda faktoryzacyjno-realizacyjna	60
2.7.2. Uwagi praktyczne	62
2.7.3. Numeryczny algorytm weryfikacji nierówności Popova	63
2.7.3.1. Przypadek stabilnego układu otwartego.	63
2.7.3.2. Układ otwarty z pojedynczym biegunem w zerze.	64
2.7.4. Dodatek: m-pliki victory.m, boa.m, victoro.m, boo.m	66
3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE	71
3.1. UKŁADY TRZECIEGO RZĘDU	71
3.1.1. Układ z nieliniowością zależną od pierwszej zmiennej stanu	71
3.1.2. Układ z nieliniowością zależną od drugiej zmiennej stanu	73
3.1.3. Układ z nieliniowością zależną od trzeciej zmiennej stanu	76
3.1.4. Uwagi o drugim kontrprzykładzie Fittsa	81
3.2. UKŁADY CZWARTEGO RZĘDU	84
3.2.1. Układy z nieliniowością zależną od pierwszej zmiennej stanu	84
3.2.1.1. Przykłady liczbowe	86
3.2.2. Układy z nieliniowością zależną od drugiej zmiennej stanu	87
3.2.3. Układ z nieliniowością zależną od trzeciej zmiennej stanu	88
3.2.4. Układ z nieliniowością zależną od czwartej zmiennej stanu	90
3.2.4.1. Przykłady liczbowe.	92
3.2.5. Uwagi o pierwszym kontrprzykładzie Fittsa	92

SPIS TREŚCI

4.	SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI	95
4.1.	PRZYKŁAD KRASOWSKIEGO	95
4.2.	PROSTY SYSTEM ELEKTROENERGETYCZNY	98
4.2.1.	Oszacowanie obszaru atrakcji w oparciu o Twierdzenie 2.5.1	99
4.2.2.	Oszacowanie obszaru atrakcji w oparciu o Twierdzenie 2.5.2	101
4.2.3.	Oszacowanie krytycznego czasu oczyszczenia zwarcia	102
4.3.	MASZYNA SYNCHRONICZNA Z REGULATOREM PRĘDKOŚCI	103
4.4.	PRZYKŁAD DEWEY’A–JURY’EGO	106
5.	UKŁAD LURIE Z NIELINIOWOŚCIĄ WIELOMIANOWĄ	112
5.1.	ESTYMATA OBSZARU ATRAKCJI UKŁADU LURIE	112
5.2.	PRZYKŁAD. OSCYLATOR ASYMETRYCZNY	113
6.	STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH	116
6.1.	SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE	116
6.1.1.	Przykład. Generatory z filtrami RC	120
6.1.2.	Twierdzenie Popova dla systemów z jedną nieliniowością	123
6.1.3.	Przykład. Aspekty strukturalne metody Popova	129
6.2.	SYSTEMY SEMILINIOWE W PRZESTRZENI HILBERTA	134
6.3.	PRZYKŁADY I PROBLEMY OTWARTE	146
6.3.1.	Przykład 1. Obwód Braytona	146
6.3.2.	Przykład 2. System klasy Gromowej–Pelewiny	150
6.3.2.1.	Zastosowanie. Stabilność reaktora jądrowego.	152
6.3.3.	Przykład 3. Jednowymiarowe, semiliniowe równania fizyki matematycznej	155
6.3.3.1.	Równania paraboliczne.	155
6.3.3.2.	Równania hiperboliczne.	161
6.3.4.	Przykład 4. Generator na linii transmisyjnej RC	163
7.	DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH	169
7.1.	Lg–STABILNOŚĆ I DYSSYPATYWNOŚĆ	169
7.2.	DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU E.N. LORENZA	171
7.3.	DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LIÉNARDA	172
7.3.1.	Przykład 1. Generator z mostkiem Wiena	175
7.3.2.	Przykład 2. Uproszczony model błony komórkowej	177
7.3.3.	Przykład 3. Dynamika reakcji biochemicznej	178
7.4.	DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LURIE STEROWANIA	179
7.5.	PRZYKŁAD	189
8.	STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH	192
8.1.	WSTĘP	192
8.2.	DYSKRETNE UKŁADY DYNAMICZNE	192
8.2.1.	Przykład dyskretnego systemu dynamicznego	194
8.3.	STABILNOŚĆ PUNKTÓW RÓWNOWAGI W PRZESTRZENI \mathbb{R}^n	196

8.4.	FORMY KWADRATOWE JAKO FUNKCJONAŁY LAPUNOWA . . .	200
8.5.	UKŁAD RÓWNAŃ LURIE ZE STEROWALNĄ PARĄ (A, B)	201
8.6.	WIELOWYMIAROWE KRYTERIUM KOŁA	202
8.7.	PRZYKŁADY	203
8.7.1.	Przykład 1	203
8.7.2.	Przykład 2	206
8.7.3.	Przykład 3	212
9.	UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM	217
9.1.	TEORIA CRANDALLA–LIGGETTA–MIYADERY	217
9.2.	UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM	220
9.3.	WŁASNOŚCI OPERATORA B	221
9.3.1.	Dyssypatywność operatora $-(B + \omega I)$	221
9.3.2.	Domkniętość operatora B	223
9.3.3.	Surjektywność operatora $I + \lambda B$	225
9.4.	ZACHOWANIE SIĘ TRAJEKTORII UKŁADU (9.7), (9.8)	226
9.4.1.	Trajektorie startujące z hiperpłaszczyzny przełączeń	226
9.4.2.	Punkty osobliwe	232
9.5.	WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI	233
9.5.1.	Wersja twierdzenia LaSalle'a	233
9.5.2.	Własności przekrojów pewnej klasy funkcjonałów	236
9.5.3.	Wyznaczanie obszaru atrakcji	239
9.6.	PRZYKŁAD	245
10.	SPECJALNE UKŁADY LURIE	252
10.1.	UKŁADY Z BEZPOŚREDNIM STEROWANIEM	252
10.1.1.	Sprowadzenie problemu do standardowego układu Lurie	252
10.1.2.	Przykład. Oscylator z filtrem typu T	252
10.1.3.	Przykład. Generator z filtrem typu 2T	254
10.2.	UKŁADY Z NIELINIOWOŚCIAMI RÓŻNICZKOWALNYMI	256
10.2.1.	Konstrukcja funkcjonału Lapunowa. Kryterium stabilności	256
10.2.2.	Numeryczny algorytm weryfikacji nierówności (10.16)	263
10.2.3.	Przykład 1	264
10.2.4.	Przykład 2	266
10.2.5.	Dodatek: m–pliki <code>victord.m</code> , <code>bod.m</code>	267
10.3.	NIEAUTONOMICZNE UKŁADY LURIE	269
10.3.1.	Estymata obszaru atrakcji	269
10.3.2.	Przykład objaśniający	271
10.3.3.	Układy semiliniowe. Uogólnione kryterium koła	273
10.3.4.	Przykład Powera i Tsoi	276
	LITERATURA	278
	INDEKS	286

WYKAZ OZNACZEŃ

- $\bar{\Omega}$ – domknięcie zbioru Ω
- $\partial\Omega$ – brzeg zbioru Ω
- $\text{Int } \Omega$ – wnętrze zbioru Ω
- \inf, \sup – kresy dolny, górny
- \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych
- \mathbb{Z} – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- \mathbb{Z}^* – zbiór liczb całkowitych nieujemnych
- \mathbb{R} – zbiór liczb rzeczywistych
- \mathbb{C} – zbiór liczb zespolonych
- \mathbb{R}^n – n -wymiarowa rzeczywista przestrzeń wektorowa. Iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n ma postać

$$\langle x, y \rangle = x^T y .$$

Norma indukowana iloczynem skalarnym określona jest jako

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} .$$

Norma ta generuje metrykę

$$\rho(x, y) = \|x - y\| .$$

- $j\mathbb{R}$ – oś urojona, $j = \sqrt{-1}$
- $II^+ = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > 0\}$ – prawa otwarta półpłaszczyzna
- $II^- = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s < 0\}$ – lewa otwarta półpłaszczyzna
- $\{\infty\}$ – punkt w nieskończoności, $\{\infty\} = \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}$
- $\text{Re}, \text{Im}, \arg$ – część rzeczywista, część urojona i argument liczby zespolonej
- $\deg M(s)$ – stopień wielomianu $M(s)$
- $\text{Res}_{s=a} y(s)$ – residuum funkcji meromorficznej y w punkcie a
- $\partial\Omega^+$ – zorientowany matematycznie dodatnio brzeg $\partial\Omega$, w przypadku gdy $\partial\Omega$ jest krzywą Jordana

- $\mathcal{D}(A)$ – dziedzina operatora liniowego działającego z H w H
- $\mathcal{R}(A)$ – obraz (zbiór wartości) operatora liniowego działającego z H w H
- $\ker A$ – jądro (podprzestrzeń zerowa) operatora A
- $\mathbf{L}(H)$ – przestrzeń operatorów liniowych i ograniczonych działających z przestrzeni Banacha H w H
- $*$, T – sprzężenie, transpozycja macierzy A
- $\det A$ – wyznacznik macierzy $A \in \mathbf{L}(\mathbb{C}^n)$
- $\text{adj}(A)$ – macierz dołączona do A
- $\text{tr } A$ – ślad macierzy A
- $\text{rank } A$ – rząd macierzy A
- $\sigma(A)$ – widmo macierzy A
- $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ – najmniejsza, największa (rzeczywista) wartość własna macierzy $H = H^T$, $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$
- $\text{Re } \sigma(A) < 0 \iff \sigma(A) \subset \mathbb{H}^-$, A jest macierzą Hurwitza
- $|\sigma(A)| < 1 \iff \sigma(A) \subset \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$
- $X \oplus Y$ – suma prosta podprzestrzeni wektorowych X , Y
- $A \otimes B$ – iloczyn Kroneckera (tensorowy) macierzy A , B . Jeżeli $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A = [a_{ik}]_{i=1, \dots, m, k=1, \dots, n}$ i $B \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ to iloczyn Kroneckera definiuje się następująco:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & \dots & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{nq}, \mathbb{R}^{mp}) .$$

- (X, ρ) – przestrzeń metryczna z metryką ρ
- $K(x, \varepsilon)$ – kula o środku w punkcie x i promieniu ε
- $K(M, \varepsilon)$ – kula o środku w zbiorze M i promieniu ε
- **LCSDS** – lokalny układ semidynamiczny
- **CSDS** – lokalny układ dynamiczny

WYKAZ OZNACZEŃ

- **DSD** – dyskretny układ dynamiczny
- **S** – stabilność
- **JS** – jednostajna stabilność
- **NS** – niestabilność
- **AS** – asymptotyczna stabilność
- **JAS** – jednostajna asymptotyczna stabilność
- **EXS** – eksponencjalna stabilność
- **GAS** – globalna asymptotyczna stabilność
- C^0 – klasa funkcji ciągłych
- C^1 – klasa funkcji różniczkowalnych z pochodnymi w C^0
- \dot{f} , \ddot{f} – pochodne czasowe pierwszego i drugiego rzędu
- ∇V – gradient funkcjonału V klasy C^1
- $JF(x) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right]_{i,k=1,2,\dots,n}$ – macierz Jacobiego odwzorowania $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^1
- $\|\cdot\|_H$ – norma w przestrzeni H (w przypadkach oczywistych indeks jest opuszczany)
- $\langle f, g \rangle_H$ – iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta H (w przypadkach oczywistych indeks jest opuszczany)
- $L^1(\mathbb{R})$ – przestrzeń Banacha funkcji absolutnie całkowalnych na \mathbb{R} z normą

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

- $L^2(\mathbb{R})$ – przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem modułu na \mathbb{R} , wyposażona w iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

- $L^\infty(\mathbb{R})$ – przestrzeń Banacha funkcji istotnie ograniczonych na \mathbb{R} z normą

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

- $BUC(\mathbb{R})$ – przestrzeń Banacha funkcji ograniczonych i jednostajnie ciągłych na \mathbb{R} z normą

$$\|f\|_{BUC(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

- $BUC^0(\mathbb{R})$ – domknięta podprzestrzeń w $BUC(\mathbb{R})$ złożona z funkcji dążących do 0 przy $|x| \rightarrow \infty$
- $C_0^\infty(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji nieskończenie różniczkowalnych na \mathbb{R} i dążących do 0 przy $|x| \rightarrow \infty$
- $L^1(0, \infty)$ – przestrzeń Banacha funkcji absolutnie całkowalnych na $(0, \infty)$ z normą

$$\|f\|_{L^1(0, \infty)} = \int_0^\infty |f(t)| dt, \quad f \in L^1(0, \infty)$$

- $L^2(0, \infty)$ – przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem modułu na $(0, \infty)$, z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0, \infty)} = \int_0^\infty f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

- $\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^n \times L^2(-r, 0; \mathbb{R}^n)$ – przestrzeń Hilberta stanowiąca standardową przestrzeń stanu dla systemów z opóźnieniem
- $L^1(0, T; H)$ – przestrzeń Banacha funkcji określonych i całkowalnych w sensie Bochnera na przedziale $(0, T)$ o wartościach w przestrzeni Hilberta H , z normą

$$\|f\|_{L^1(0, T; H)} = \int_0^T \|f(t)\|_H dt, \quad f \in L^1(0, T; H)$$

- $C(0, T; H)$ – przestrzeń Banacha funkcji ciągłych na przedziale $[0, T]$ o wartościach w przestrzeni Hilberta H z normą

$$\|f\|_{C(0, T; H)} = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_H, \quad f \in C(0, T; H)$$

- $C^1(0, T; H)$ – przestrzeń Banacha funkcji ciągle-różniczkowalnych na przedziale $[0, T]$ o wartościach w przestrzeni Hilberta H
- $L^2(0, T; H)$ – przestrzeń Hilberta funkcji określonych i całkowalnych w sensie Bochnera na przedziale $(0, T)$ o wartościach w przestrzeni Hilberta H , z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_H dt, \quad f, g \in L^2(0, T; H)$$

WYKAZ OZNACZEŃ

- $f \star g$ – splot funkcji f i g
- \hat{f} – transformata Laplace'a lub Fouriera funkcji f
- $H^\infty(\Pi^+)$ – przestrzeń Banacha funkcji analitycznych i ograniczonych na $\Pi^+ = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$ z normą

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{s \in \Pi^+} |f(s)|, \quad f \in H^\infty(\Pi^+)$$

- $H^2(\Pi^+)$ – przestrzeń Hilberta funkcji analitycznych na Π^+ i takich, że

$$\sup_{x \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + jy)|^2 dy < \infty .$$

Standardowy iloczyn skalarny w $H^2(\Pi^+)$ ma postać

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\Pi^+)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(j\omega) \overline{\hat{g}(j\omega)} d\omega .$$

1. WSTĘP

Celem niniejszej książki jest przedstawienie metod stosowanych do analizy stabilności szerokiej klasy układów sterowania, zwanych układami Lurie. Układy Lurie stanowią model matematyczny dynamiki wielu układów fizycznych, chociaż oryginalnie zostały zaproponowane do opisu jednopętlowych układów sterowania automatycznego z pojedynczym, nieliniowym elementem sterującym. Wśród zastosowań tej klasy modeli można, oprócz teorii automatycznej regulacji, wymienić modele dynamiki obwodów elektrycznych z nieliniowymi elementami aktywnymi, modele dynamiki układów elektroenergetycznych, modele populacji, reakcji chemicznych i biochemicznych, modele dynamiki reaktorów chemicznych i jądrowych, kopalnianych systemów wentylacyjnych itd. Niektóre z tych zastosowań zostały omówione w niniejszej monografii, odnośnie innych podano odsyłki bibliograficzne.

Pierwsze prace na temat stabilności układów Lurie zaczęły się ukazywać pod koniec lat czterdziestych. W 1949 roku Ajzerman sformułował proste kryterium stabilności zerowego punktu równowagi układu Lurie [52], zwane hipotezą Ajzermana. Ze względu na lukę w dowodzie, twierdzenie to okazało się nieprawdziwe, w związku z czym zaczęto poszukiwać ścisłych kryteriów stabilności układów Lurie. W badaniach stabilności tych układów, nieomal od ich zarania, zaznaczyły się dwa kierunki. Już Lurie i Ajzerman próbowali stosować metodę funkcjonałów Lapunowa do analizy stabilności, jednak uzyskane metody obliczeniowe charakteryzowały się niewielką efektywnością w praktycznych zastosowaniach. Równolegle, w 1959 roku Popov zaproponował kompletnie inne podejście do analizy stabilności. Istotą jego metody był opis liniowej części układu w relacji wejście–wyjście, w dziedzinie czasowej (równania całkowite) i częstotliwościowej (transformacje Laplace’a i Fouriera). Metody te zostały później znacznie rozwinięte – patrz książki [1], [71], [114], [33], [138] i [119]. W tym podejściu kryteria stabilności zerowego punktu równowagi układu Lurie wyrażono w postaci silnych nierówności częstotliwościowych, podczas gdy na charakterystyki statyczne elementu sterującego nakładano słabe warunki sektorowe. W 1962 roku Kalman zauważył, że również zadanie konstrukcji funkcjonału Lapunowa gwarantującego stabilność, może być rozwiązane metodami częstotliwościowymi. Wyniki Kalmana doczekały się również kontynuacji w literaturze. Wymieńmy tu monografie [80], [96] i [40]. Metodą funkcjonału Lapunowa udało się osłabić częstotliwościowe kryteria stabilności poprzez słabe nierówności częstotliwościowe i silne warunki sektorowe. Jest to istotne, gdyż najlepsze możliwe do otrzymania warunki sektorowe pokrywają się z warunkami Hurwitza, mającymi postać silnych nierówności. Umożliwiło to dokładniejszą weryfikację zachodzenia hipotezy Ajzermana oraz pozwoliło precyzyjniej analizować tzw. przypadki krytyczne stabilności, kiedy część liniowa układu posiada bieguny (wartości własne) na osi urojonej. Niniejsza monografia jest w całości poświęcona zastosowaniom metody funkcjonału Lapunowa do analizy stabilności układu Lurie.

W opinii autora, metoda funkcjonałów Lapunowa w porównaniu z podejściem poprzez opis wejście–wyjście, wykazuje pewne zalety. Oprócz, wspomnianych wyżej,

1. WSTĘP

możliwości precyzyjnej analizy przypadków krytycznych i otwartych stożków stabilności, dogodniej jest otrzymać kryteria lokalnej asymptotycznej stabilności z zerowego punktu równowagi z oszacowaniem obszaru atrakcji. Umożliwia to np. lepszą ocenę odporności układu na zakłócenia. Możliwe jest też dokładniejsze potraktowanie zagadnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązań analizowanego modelu, tj. rozwiązania problemu dobrego postawienia modelu. Metodą relacji wejście–wyjście wydaje się łatwiej uogólnić wyniki na modele szerszej klasy niż opisane zwyczajnymi równaniami różniczkowymi, jednak jest to okupione, niekiedy całkowitym, zignorowaniem zagadnienia dobrego postawienia modelu. W wielu pracach z użyciem opisu wejście–wyjście analizuje się w istocie globalną atraktywność początku układu, a nie globalną asymptotyczną stabilność.

Na krajowym rynku zaznacza się całkowity brak literatury ściśle prezentującej podstawy i przykładowe zastosowania metody funkcjonałów Lapunowa do analizy stabilności układów Lurie. Monografie z teorii sterowania najczęściej ograniczają się do samej prezentacji fragmentarycznych wyników teorii, bez ukazania czytelnikowi narzędzi analitycznych. Prezentacja przykładów użycia kryteriów stabilności ogranicza się niekiedy do trywialnych zadań, które w żadnym stopniu nie ukazują siły i zakresu stosowalności wyników. Na rynku międzynarodowym jest dostępnych kilka dobrych monografii z zakresu teorii stabilności układów Lurie. Jednak i w tych pozycjach słabą stroną jest przełożenie wyników na konkretne przykłady zastosowań i słaba dyskusja zakresu stosowalności poszczególnych kryteriów, co utrudnia inżynierom automatom zorientowanie się co do praktycznej przydatności poszczególnych rezultatów. Zamierzeniem autora było wypełnienie tej luki literaturowej.

W zasadzie autor zakłada znajomość u czytelnika podstaw teorii sterowania. Wiele pojęć i wyników tej teorii jest wyjaśnionych w tekście, dzięki czemu osoby nie mające szerszego kontaktu z teorią sterowania również mogą korzystać z niniejszej książki. Początkowy rozdział przedstawia wykaz oznaczeń stosowanych w całej książce.

Podrozdział 2.1 stanowi prezentację podstaw teorii ciągłych układów dynamicznych. Omawia się abstrakcyjne pojęcia stabilności zbiorów. Przedstawia się uogólnienia zasady inwariantności i twierdzenia LaSalle’a, stanowiących podstawę teoretyczną dla wyprowadzenia, w dalszych rozdziałach, kryteriów stabilności układów Lurie. W zwarty sposób potraktowano problem generacji układów dynamicznych przez rozwiązania autonomicznych zwyczajnych równań różniczkowych, zwracając przy tym uwagę na kwestię efektywnej sprawdzalności założeń. Przedstawiono podstawowe wyniki metody funkcjonałów Lapunowa.

W podrozdziale 2.4 dokonuje się najpierw prezentacji postaw teorii układów regulacji automatycznej z uwzględnieniem kryteriów Michajłowa–Leonarda i Nyquista. Następnie przechodzi się do przedstawienia lematu Kalmana i jego uzupełnień. Wyniki te dają możliwość wyrażenia kryteriów stabilności w terminach charakterystyk częstotliwościowych liniowej części układu. Dalej podaje się wersje twierdzeń Lapunowa z podrozdziału 2.3, ale dla układów Lurie. Szeroko potraktowano kwestię sprawdzania założeń tych twierdzeń, a metodę faktoryzacyjno-realizacyjną zastosowano do efektywnej konstrukcji funkcjonału Lapunowa. Rozdział zamyka prezentacja dwu prostych algorytmów numerycznych weryfikacji częstotliwościowej nierówności Popova wraz

z ich implementacją komputerową w środowisku obliczeniowym MATLAB. W stosunku do rezultatów znanych w literaturze, zwraca się uwagę na redakcję kryteriów, także jako warunków lokalnej asymptotycznej stabilności zerowego punktu równowagi z podaniem estymaty obszaru atrakcji. Stwarza to możliwość dwutorowego stosowania wyników: jako kryteriów absolutnej stabilności i jako metody oszacowania obszaru atrakcji lokalnie asymptotycznie stabilnego punktu równowagi.

Szersze potraktowanie przykładów wykorzystania wyników jako kryteriów stabilności absolutnej przynosi rozdział 3. Omawia się szeroką gamę układów trzeciego i czwartego rzędu, dokonując analitycznej weryfikacji nierówności częstotliwościowej Popova. Niektóre z omawianych przykładów liczbowych ilustrują najważniejsze aspekty hipotezy Ajzermana.

Systemy Lurie ze skończonymi obszarami atrakcji omawiane są w rozdziale 4, gdzie kontynuuje się dyskusję rozmaitych aspektów hipotezy Ajzermana. Przykłady prostych systemów elektroenergetycznych ukazują czytelnikowi praktyczny sens otrzymanych estymat obszaru atrakcji.

Estymaty obszaru atrakcji układu Lurie mogą być uzyskane metodami nieczęstotliwościowymi. Przykład takiego wyniku dla układów Lurie z nieliniowościami wielomianowymi prezentowany jest w rozdziale 5.

W rozdziale 6 omawia się wielowymiarowe układy Lurie i pokazuje alternatywny sposób wyprowadzenia równoważnych kryteriów stabilności. Celem takiego postępowania jest uchwycenie roli poszczególnych założeń, dzięki czemu udało się odtworzyć ogólny schemat wyprowadzania kryteriów stabilności układów semiliniowych. Było to bardzo istotne dla uogólnienia kryteriów stabilności na układy semiliniowe w nieskończone-wymiarowych przestrzeniach Hilberta. W celu uczynienia prezentacji wyników bardziej zwartą, na początku rozdziału przypomina się najważniejsze wyniki z teorii pólgrup liniowych. Dyskutuje się tylko klasę układów z ograniczonymi operatorami sterowania i obserwacji. Wyniki te w zasadzie nie ujmują sterowań typu brzegowego i punktowych obserwacji. W konsekwencji, wielu układów, które można analizować za pomocą podejścia wejście-wyjście, nie daje się analizować proponowanym podejściem poprzez funkcjonały Lapunowa. Z drugiej jednak strony pokazuje się, że dla tych układów, dla których jest to możliwe, uzyskane wyniki są częstokroć lepsze. Rozdział ten otwiera nowe perspektywy badawcze związane z nierozwiązanym problemem wyprowadzenia kryteriów stabilności dla układów z nieograniczonymi obserwacjami i sterowaniami. Sformułowane kryteria mają abstrakcyjny charakter i dlatego pokazano szereg przykładów zastosowań dla objaśnienia praktycznej implementacji wyników teoretycznych.

Rozdział 7 poświęcony jest kryteriom dyssypatywności układów Lurie. Analizuje się ostateczną ograniczoność rozwiązań układów Lurie, tj. stabilność zbioru typu kuli. W literaturze istnieje szereg prac stanowiący kontynuację tej tematyki. Chodzi tu o różne częstotliwościowe kryteria istnienia i stabilności rozwiązań okresowych wykorzystujące zasadę torusa [65], [98] i [99] oraz ogólniej problem oscylacyjności wyjścia układu Lurie [65]. Rozdział ten stanowić może zatem także dogodne wprowadzenia dla czytelnika interesującego się tą problematyką.

1. WSTĘP

Dyskretne układy Lurie omawiane są w rozdziale 8 stanowiącym autonomiczną całość. Omawia się wielowymiarowe kwadratowe kryterium stabilności i kryterium koła. Wyniki ilustruje się analizą stabilności układów sterowania z modulatorem szerokości impulsów. Modulatory tego typu są stosowane np. w napędach tyrystorowych.

Układy Lurie z idealnym przekaźnikiem dwupołożeniowym są badane w rozdziale 9. Przedstawiono oryginalną teorię istnienia i jednoznaczności rozwiązań opartą na wykorzystaniu twierdzeń Crandalla–Liggetta o generacji półgrup nieliniowych. Wyprowadzono także modyfikację twierdzenia LaSalle'a. Wyniki te stanowią podstawę do uściślenia metody Weissenbergera wyznaczania estymat obszaru atrakcji. Rozważania są ilustrowane przykładem ukazującym perspektywy zastosowań do analizy regulatorów czasowo-suboptymalnych.

Specjalnym układom Lurie poświęcony jest ostatni rozdział monografii. Obejmuje on trzy grupy zagadnień. Pierwszą grupę stanowią kryteria stabilności układów Lurie, których część liniowa wykazuje bezpośrednie oddziaływanie sterowania na wyjście, a nieliniowość opisuje się operatorem wielowartościowym. Układy takie znajdują zastosowanie w analizie obwodów elektrycznych z nieliniowymi elementami aktywnymi. Pokazano sposób redukcji szerokiej klasy tego typu układów do standardowego układu Lurie. Drugą grupę tematyczną stanowią kryteria stabilności układów Lurie z nieliniowością różniczkowalną. Przedstawiono algorytm numeryczny weryfikacji odnośnej wersji nierówności częstotliwościowej i jego komputerową implementację. Rozdział zamyka trzecia grupa tematyczna, którą stanowi kryterium koła dla nieautonomicznych, wielowymiarowych układów Lurie.

Miłym obowiązkiem autora jest wyrażenie podziękowań mgr Aleksandrze Jakóbczak za współpracę przy opracowywaniu algorytmów numerycznych i pracach edytorskich.

Przygotowanie niniejszej monografii było finansowane w ramach grantu KBN nr 8T11A02609.

Kraków, 13 czerwca 1997

Problematyka monografii była prezentowana w ramach wykładu na II roku Studium Doktoranckiego z zakresu Automatyki i Robotyki, w roku akademickim 1998/99.

Monografia była pierwotnie złożona do druku w Wydawnictwie PWN w 1997 roku. Pomimo jednoznacznie pozytywnej recenzji, nie została wydana z powodu braku środków finansowych. Przygotowanie aktualnej wersji dla Wydawnictw AGH było finansowane w ramach badań własnych (umowa nr 10.10.120.190), przy wydatnym wsparciu J.M. Rektora AGH.

Kraków, 22 lipca 1999

2. STABILNOŚĆ CIĄGLYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

2.1. CIĄGLE UKŁADY DYNAMICZNE

Definicja 2.1.1. *Ciągłym, lokalnym układem semidynamicznym (LCSDS)* na przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy czwórkę $(X, \mathbb{R}^*, A, \pi)$, gdzie $\{0\} \times X \subset A \subset \mathbb{R}^* \times X$ oraz $\pi : A \ni (t, x) \mapsto \pi(t, x) \in X$ są takie, że:

(LCSDS 1) Odwzorowanie π jest ciągle,

(LCSDS 2) $\pi(0, x) = x$ dla każdego $x \in X$,

(LCSDS 3) Niech $I_{(\cdot) \in X} := \{t \in \mathbb{R}^* : (t, \cdot) \in A\}$. Jeżeli $t \in I_x$ i $s \in I_{\pi(t, x)}$ to $s + t \in I_x$ oraz $\pi(t, \pi(s, x)) = \pi(t + s, x)$ dla dowolnego $x \in X$,

(LCSDS 4) Spełniony jest aksjomat maksymalności: $I_x = [0, \omega_x)$, $\omega_x = \sup I_x$,

(LCSDS 5) Odwzorowanie $x \mapsto [0, \omega_x)$ jest półciągle z dołu, tzn. dla dowolnego ciągu zbieżnego $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ mamy $[0, \omega_x) \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} [0, \omega_{x_n})$.

Definicja 2.1.2. *Ciągłym układem semidynamicznym (CSDS)* na przestrzeni metrycznej X z metryką ρ nazywamy trójkę (X, \mathbb{R}^*, Π) , gdzie $\mathbb{R}^* = [0, \infty)$, a Π jest odwzorowaniem $\mathbb{R}^* \times X$ w X spełniającym następujące postulaty:

(CSDS 1) Π jest ciągle względem (t, x) (*aksjomat ciągłości*),

(CSDS 2) $\Pi(0, x) = x$ dla każdego $x \in X$ (*aksjomat identityczności*),

(CSDS 3) $\Pi(t, \Pi(s, x)) = \Pi(t + s, x)$ dla $x \in X$ i $t, s \in \mathbb{R}^*$ (*aksjomat półgrupy*).

Definicja 2.1.3. Niech (X, \mathbb{R}^*, π) będzie CSDS na przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Zbiory: $\pi(x) := \{\pi(t, x) : t \in \mathbb{R}^*\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^*} \pi(t, x)$, $\pi(A) := \bigcup_{y \in A} \pi(y)$ i $\overline{\pi(x)}$ nazywamy odpowiednio *trajektorią punktu x* , *trajektorią zbioru A* i *powłoką punktu x* . Mówimy, że zbiór $W \subset X$ jest *inwariantny*, jeśli $\pi(W) \subset W$ i *mocno-inwariantny* jeśli $\pi(W) = W$. Zbiór

$$A(x) := \{y \in X : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^* : \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\pi(t_n, x), y) = 0\}$$

nazywamy *zbiorem granicznym punktu x* .

Następujące twierdzenie podaje najprostsze własności zbiorów granicznych [15], [109].

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Twierdzenie 2.1.4. Niech (X, \mathbb{R}^*, π) będzie **CSDS** na przestrzeni metrycznej (X, ρ) oraz $x \in X$. Wtedy $\overline{\pi(x)} = \pi(x) \cup \Lambda(x)$, $\Lambda(x) = \Lambda(\pi(t, x))$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^*$, $\Lambda(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^*} \overline{\pi_t(\pi(x))}$, gdzie π_t oznacza odwzorowanie powstające z π przez ustalenie argumentu t , oraz $\Lambda(x)$ jest zbiorem domkniętym.

Bardzo ważnym wynikiem jest kolejne twierdzenie, które podali, niezależnie od siebie i z odmiennymi dowodami, Walker [141, Twierdzenia 4.1 i 4.2, str. 167 - 168] i autor [44, Twierdzenie 5, str. 89].

Twierdzenie 2.1.5 (Zasada inwariantności LaSalle'a). Niech (X, \mathbb{R}^*, π) będzie **CSDS** na przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Przypuśćmy, że powłoka $\overline{\pi(x)}$ punktu $x \in X$ jest zbiorem zwartym w topologii wyznaczonej w X przez metrykę ρ . Wtedy zbiór graniczny $\Lambda(x)$ punktu x jest niepusty, zwarty, spójny i $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\pi(t, x), \Lambda(x)) = 0$. Więcej, jeżeli przestrzeń metryczna (X, ρ) jest *zupełna* to $\Lambda(x)$ jest także zbiorem mocno-inwariantnym.

Twierdzenie 2.1.6 (Uogólnione twierdzenie LaSalle'a). Niech (X, \mathbb{R}^*, π) będzie **CSDS** na przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Przypuśćmy, że $\Omega \subset X$ jest niepustym, zwartym zbiorem inwariantnym. Załóżmy, że dany jest ciągły funkcjonal $\Phi : X \ni x \mapsto \Phi(x) \in \mathbb{R}$, który maleje na trajektoriach (o takim funkcjonale Φ mówimy, że jest *funkcjonałem Lapunowa* na zbiorze Ω),

$$\Phi(\pi(t, x)) \leq \Phi(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \in \Omega .$$

Rozważmy zbiór $E := \{x \in \Omega : \Phi(\pi(t, x)) = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*\}$. Niech N będzie największym, w sensie relacji inkluzji zbiorów, zbiorem mocno-inwariantnym zawartym w E . Wtedy $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\pi(t, x), N) = 0$.

Powyższe twierdzenie pochodzi z pracy [44, Twierdzenie 6, str. 101 - 102]. Uogólnia ono rezultaty znane w teorii zwyczajnych równań różniczkowych [73], [55], [16], [41] oraz funkcyjnych równań różniczkowych [56].

Przypomnijmy definicje kuli otwartej o środku w punkcie $x \in X$ i promieniu $r > 0$ oraz kuli otwartej o środku w zbiorze $Z \subset X$ i promieniu $r > 0$:

$$\begin{aligned} K(x, r) &:= \{y \in X : \rho(x, y) < r\} , \\ K(Z, r) &:= \{y \in X : \rho(Z, y) = \inf_{x \in Z} \rho(x, y) < r\} . \end{aligned}$$

Definicja 2.1.7. Niech (X, \mathbb{R}^*, π) będzie **CSDS** na przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Niepusty, domknięty zbiór $M \subset X$ nazywamy *stabilnym (S)* jeśli dla dowolnego $x \in M$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ taka, że $\pi(K(x, \delta)) \subset K(M, \varepsilon)$. Zbiór M nazywamy *jednostajnie stabilnym (JS)* jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że $\pi(K(M, \delta)) \subset K(M, \varepsilon)$.

2.2. AUTONOMICZNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Oczywiście **JS** zbioru M implikuje **S** zbioru M . Dla zwartego zbioru M oba pojęcia są równoważne. Charakteryzacje obu pojęć w terminach funkcjonałów Lapunowa podano w [15], [109].

Definicja 2.1.8. Niech (X, \mathbb{R}^*, π) będzie **CSDS** na przestrzeni metrycznej (X, ρ) . *Obszarem atrakcji (przyciągania)* niepustego, domkniętego zbioru $M \subset X$ nazywamy zbiór

$$A(M) := \{y \in X : \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\pi(y, t), M) = 0\} .$$

Jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\pi(y, t), M) = 0 \quad \forall y \in K(M, \delta) ,$$

tzn. w obszar atrakcji zbioru M można wpisać pewną kulę otwartą o środku w M , to o zbiorze M mówimy, że jest *atraktorem (ATR)*. Zbiór M nazywamy *jednostajnym atraktorem (JATR)* jeśli istnieje dodatnie α takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki czas $T = T(\varepsilon) > 0$, że

$$\rho(\pi(y, t), M) < \varepsilon \quad \forall t \geq T, \forall y \in K(M, \alpha) .$$

Obszar atrakcji $A(M)$ jest zbiorem inwariantnym. Jeżeli brzeg $\partial A(M)$ obszaru atrakcji jest niepusty to również jest zbiorem inwariantnym.

Definicja 2.1.9. Niech (X, \mathbb{R}^*, π) będzie **CSDS** na przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Zbiór $M \subset X$ nazywamy *asymptotycznie stabilnym (AS)* gdy jest **JS** i **ATR**. Mówimy, że M jest *jednostajnie asymptotycznie stabilny* jeśli jest **JS** i **JATR**. Jeżeli obszar atrakcji **AS** zbioru M jest równy przestrzeni X to mówimy, że M jest *globalnie asymptotycznie stabilny (GAS)* i podobnie o M mówimy, że jest *globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny (GJAS)*, gdy jego obszar atrakcji jest równy X .

Oczywiście **JATR** zbioru M implikuje **ATR** zbioru M , a stąd **JAS** zbioru M implikuje jego **AS**. W przestrzeniach metrycznych lokalnie zwartych pojęcia **AS** oraz **JAS** zbiorów zwartych są równoważne. Charakteryzacje **AS** i **JAS** w terminach funkcjonałów Lapunowa można znaleźć w [15], [109]. Charakteryzacje te mają duże znaczenie teoretyczne i poznawcze, jednak praktyka metody funkcjonałów Lapunowa pokazuje, że często lepsze efekty daje łączenie twierdzeń charakteryzujących **S** oraz **JS** z Twierdzeniami 2.1.5 i 2.1.6, które w tym przypadku służą do oszacowania obszarów atrakcji.

2.2. AUTONOMICZNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Lemat 2.2.1 (Hartmana). Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, a funkcja $f : \Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ będzie ciągła. Załóżmy, że dany jest ciąg $\{L^k\}_{k=1}^m$, gdzie $L^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

jest funkcjonalem klasy C^1 takim, że

$$\dot{L}^k(x_0) = f^T(x_0)\nabla L(x_0) \leq 0 \quad \forall x_0 \in \Pi^k ,$$

przy czym

$$\Pi^k = \{x : L^k(x) = 0, L^j(x) \leq 0 \text{ dla } 1 \leq j \leq m\} .$$

Niech

$$I(x_0) := \{k : x_0 \in \Pi^k \implies \dot{L}^k(x_0) = 0\} ,$$

a jeśli $I(x_0) \neq \emptyset$ to zakładamy dodatkowo, że albo wektory $\{\nabla L^k(x_0)\}_{k \in I(x_0)}$ są liniowo-niezależne, albo: $L^k[x_0 + hf(x_0)] \leq 0$ dla $k \in I(x_0)$ i małych $h > 0$. Wtedy funkcja f spełnia warunek *słabej styczności* do zbioru F (warunek Nagumo [90]),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} d(x + hf(x), F) = 0 \quad \forall x \in F \quad (2.1)$$

gdzie d jest metryką indukowaną przez normę w \mathbb{R}^n oraz

$$F := \{x_0 \in \Omega : L^k(x_0) \leq 0 \text{ dla } 1 \leq k \leq m\} .$$

Dowód tego rezultatu można znaleźć w [58] lub [57, str. 190].

Definicja 2.2.2. Niech $x \in F = \overline{F} \subset \mathbb{R}^n$. Jeżeli istnieje punkt $y \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$\left[\text{Int } \overline{K(y, \|y - x\|)} \right] \cap F = \emptyset ,$$

gdzie $K(u, r) \subset \mathbb{R}^n$ oznacza kulę o środku w u i promieniu $r > 0$, to wektor $y - x$ nazywamy *normalnym w sensie Bony* do F w punkcie $x \in F$.

Lemat 2.2.3 (Crandalla). Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, a funkcja $f : \Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ będzie ciągła. Niech $F = \overline{F} \subset \Omega$ i $\nu(x) \neq \emptyset$ dla wszystkich $x \in F$, przy czym $\nu(u)$ oznacza zbiór wektorów normalnych w sensie Bony do F w punkcie $u \in F$. Wtedy *warunek Bony*:

$$z^T f(x) \leq 0 \quad \forall x \in F, \quad \forall z \in \nu(x)$$

implikuje warunek słabej styczności (2.1).

Rezultat powyższy pochodzi od Crandalla [30]. Założenie ciągłości f zapewnia, na mocy twierdzenia Peano [57, Twierdzenie 2.1, str. 21], lokalne istnienie rozwiązania problemu początkowego

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f[x(t)] \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

2.2. AUTONOMICZNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

W [58], [30] wykazano, że (2.1) jest wtedy warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dla dowolnego $x_0 \in F$ istniało rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ problemu (2.2), pozostające w F na swym prawym maksymalnym przedziale istnienia. Po ukazaniu się pracy [18], w której wykazano, że przy założeniu lokalnej lipschitzowskości f , dla dowolnego $x_0 \in F$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ problemu (2.2), pozostające w F na swym prawym maksymalnym przedziale istnienia, zaczęto osłabiać założenia, przy których wynik ten pozostaje prawdziwy. Przypomnijmy, że f jest *lokalnie lipschitzowska*, jeśli dla każdego zwarteo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ istnieje liczba $L = L(\Omega) > 0$ taka, że

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega .$$

Redheffer [120] pokazał, że wynik powyższy pozostaje prawdziwy po zastąpieniu granicy zwykłej w (2.1) przez granicę dolną i warunku lokalnej lipschitzowskości f przez uogólniony warunek lokalnej dyssypatywności f . Mówimy, że f spełnia *uogólniony warunek lokalnej dyssypatywności* jeśli dla dowolnego zwarteo $Z \subset \mathbb{R}^n$ istnieje funkcja jednoznaczności ρ taka, że

$$(x_1 - x_2)^T [f(x_1) - f(x_2)] \leq \rho(\|x_1 - x_2\|) \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in Z \quad (2.3)$$

Definicja 2.2.4. Funkcja rzeczywista ρ jest funkcją *jednoznaczności*, gdy dla dowolnej ciągłej funkcji $\delta(\cdot)$, $\delta(t) \geq 0$, $\delta(0) = 0$ warunki

$$\left\{ \begin{array}{l} D^- \delta(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\delta(t) - \delta(t-h)] = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [\delta(t+h) - \delta(t)] \leq \rho[\delta(t)] \\ D^+ \delta(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\delta(t+h) - \delta(t)] \leq \rho[\delta(t)] \end{array} \right\} ,$$

przy $t \in (0, \varepsilon)$ i dostatecznie małym $\varepsilon > 0$, implikują $\delta(t) = 0$ dla $t \in (0, \varepsilon)$.

Definicja 2.2.5. Funkcję rzeczywistą ρ nazywamy *funkcją Osgooda*, gdy ρ jest ciągła, $\rho(s) \geq 0$ dla $s \geq 0$ i

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\varepsilon \frac{ds}{\varepsilon + \rho(s)} = \infty .$$

Każda funkcja Osgooda jest funkcją jednoznaczności [120]. Dla funkcji Osgooda $\rho(s) = Ls$ uogólniony warunek lokalnej dyssypatywności przechodzi w zwykły warunek lokalnej dyssypatywności f .

Wynik Redheffera można sformułować w postaci następującego twierdzenia o generacji **LCSDS** oraz **CSDS** przez rozwiązania autonomicznych równań różniczkowych.

Twierdzenie 2.2.6. Niech $F = \overline{F} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest otwarty. Załóżmy, że funkcja $f : \Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ będzie ciągła i spełnia warunki (2.1) z granicą dolną zamiast granicy zwykłej oraz (2.3) z pewną funkcją jednoznaczności ρ . Wtedy

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

czwórka $(\Omega, \mathbb{R}^*, A, \pi)$, gdzie: $A = \{(T(x_0), x_0)\}_{x_0 \in \Omega}$, przy czym $T(x_0)$ oznacza kres górny prawego maksymalnego przedziału istnienia rozwiązania $x = x(\cdot, x_0)$ problemu początkowego (2.2) oraz $\pi(t, x_0) := x(t, x_0)$, jest **LCSDS**-em na przestrzeni metrycznej $(\Omega, d|_{\Omega})$. Więcej, F jest *zbiorem inwariantnym* względem strumienia π tego **LCSDS**, tzn. dla dowolnego $x_0 \in F$ mamy $\pi(t, x_0) \in F$ dla każdego $t \in [0, T(x_0))$. Wreszcie, jeżeli dla dowolnego $x_0 \in F$ mamy $T(x_0) = \infty$ to trójka (F, \mathbb{R}^*, π) definiuje **CSDS** na przestrzeni metrycznej zupełnej $(F, d|_F)$.

Poniższy lemat podaje warunek wystarczający na to, aby $T(x_0) = \infty$ dla dowolnego $x_0 \in F$.

Lemat 2.2.7. Niech będą spełnione założenia Twierdzenia 2.2.6. Przyjmijmy dodatkowo, że albo F jest ograniczony, albo F jest nieograniczony, ale istnieje ciągły, lokalnie lipschitzowski $V : \Omega \ni u \mapsto V(u) \in \mathbb{R}^*$ funkcjonal o własnościach:

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty ,$$

$$D^+V(x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(x + hf(x)) - V(x)] \leq \psi[V(x)] \quad \forall x \in F$$

gdzie $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ciągłą, że dla każdego $x_0 \in F$ *prawe maksymalne rozwiązanie* $\bar{y}(\cdot, V(x_0))$ problemu początkowego

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \psi[y(t)] \\ y(0) = V(x_0) \end{array} \right\}$$

jest określone na \mathbb{R}^* . Wtedy $T(x_0) = \infty$ dla dowolnego $x_0 \in F$ oraz

$$V[x(t, x_0)] \leq \bar{y}[t, V(x_0)] \quad \forall x_0 \in F, \quad \forall t \in \mathbb{R}^* .$$

2.3. WARUNKI DOSTATECZNE ASYMPTOTYCZNEJ STABILNOŚCI

Większość wyników prezentowanych w niniejszej monografii będzie dotyczyła stabilności zbioru $M = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ względem **CSDS**, opisanego w Twierdzeniu 2.2.6, generowanego przez rozwiązania układu (2.2). W tym przypadku M jest zwarty, zatem pojęcia **S** oraz **JS** są sobie równoważne i przyjmują postać klasycznej, pochodzącej od Lapunowa, definicji stabilności zerowego punktu równowagi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x_0\| < \delta \implies \|x(t, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 .$$

Więcej, przestrzeń stanu jako podzbiór przestrzeni \mathbb{R}^n jest lokalnie zwarta, a zatem pojęcia **AS** oraz **JAS** też pokrywają się i sprowadzają do klasycznej definicji

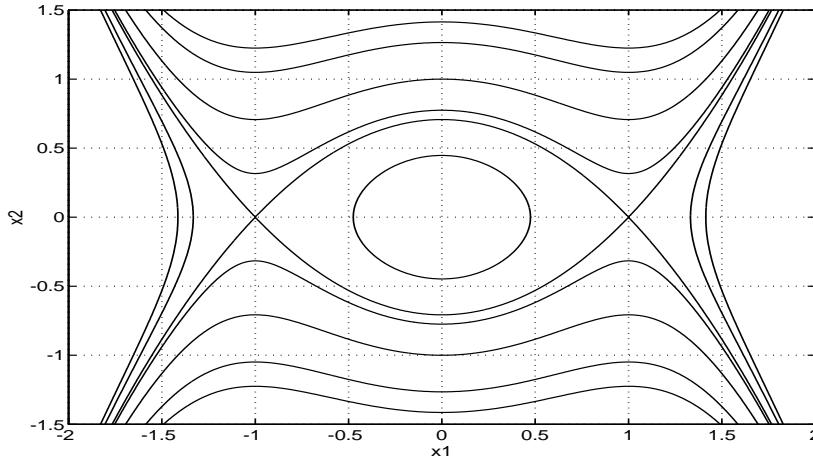
2.3. WARUNKI DOSTATECZNE ASYMPTOTYCZNEJ STABILNOŚCI

Lapunowa asymptotycznie stabilnego zerowego punktu równowagi. Zgodnie z tą definicją, zerowy punkt równowagi jest **AS**, gdy jest **S** oraz

$$\exists r > 0 : K(0, r) \subset A(\{0\}) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0\} .$$

Lemat 2.3.1 (Bhatii–Szegö). Załóżmy, że Ω jest otwartym otoczeniem $0 \in \mathbb{R}^n$, a $V : \Omega \ni x \mapsto V(x) \in \mathbb{R}$ – funkcjonalem ciągłym i takim, że $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ dla $x \in \Omega \setminus \{0\}$. Wtedy istnieje $l_0 > 0$ takie, że dla dowolnego $l \in (0, l_0)$ zbiór $\Omega_l^* = \{x \in \Omega : V(x) \leq l\}$ posiada zwarty podzbiór Ω_l , otaczający 0 i taki, że $\Omega_l \cap \overline{\Omega_l^*} \setminus \Omega_l = \emptyset$.

Dowód Lematu 2.3.1 można znaleźć w [15, Twierdzenie 2, str. 69].



Rysunek 2.1. Ilustracja topologicznych własności poziomicy funkcjonalów ciągłych, dodatnio –określonych na przykładzie funkcjonau $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^4$

Na rysunku 2.1 opisana w Lemacie 2.3.1 topologiczna własność poziomicy funkcjonalów ciągłych, dodatnio–określonych została zinterpretowana na przykładzie funkcjonau $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^4$. Dla tego funkcjonau $l_0 = \frac{1}{4}$.

Twierdzenie 2.3.2 (Lapunowa–LaSalle’a). Niech funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie ciągła i na tyle regularna, że klasyczne rozwiązania układu

$$\dot{x}(t) = f[x(t)] \tag{2.4}$$

generują na \mathbb{R}^n **LCSDS**. Przyjmijmy, że para (V, l) jest taka, że V jest funkcjonalem klasy C^1 , dodatnio–określonym na zbiorze Ω – otwartym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$ z liczbą

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

l_0 opisaną w Lemacie 2.3.1, $l \in (0, l_0)$ oraz

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_l ,$$

$x \equiv 0$ jest jedynym rozwiązaniem układu (2.4) określonym na \mathbb{R} , zlokalizowanym całkowicie w zbiorze

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} \cap \text{Int } \Omega_l ,$$

gdzie Ω_l oznacza zwarty podzbiór zbioru $\Omega_l^* = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) \leq l\}$, otaczający 0, taki, że $\Omega_l \cap \overline{\Omega_l^*} \setminus \Omega_l = \emptyset$, \dot{V} oznacza pochodną funkcjonału V wzdłuż rozwiązań (2.4). Wtedy $x \equiv 0$ jest **AS** trywialnym rozwiązaniem (2.4), a zbiór $\text{Int } \Omega_l$ jest podzbiorem obszaru atrakcji tego rozwiązania.

Dowód. Z Lematu 2.2.1 wynika inwariantność zbioru Ω_l względem strumienia **LCSDS** generowanego przez rozwiązania układu (2.4). Teraz wobec zwartości zbioru Ω_l , trójka $(\Omega_l, \mathbb{R}^*, x(\cdot, x_0))$, gdzie $x(\cdot, x_0)$ jest rozwiązaniem (2.4) odpowiadającym warunkowi początkowemu $x_0 \in \Omega_l$, definiuje **CSDS**. Jeżeli podstawimy $X = \Omega_l$, $\Pi = x(\cdot, x_0)$, $\Omega = \Omega_{l_1}$ ($l_1 < l$), $\Phi = V$ w uogólnionym Twierdzeniu LaSalle'a 2.1.6, to wobec spełnienia założeń tego twierdzenia, otrzymamy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \Omega_{l_1} ,$$

a stąd

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \bigcup_{l_1 \in [0, l)} \Omega_{l_1} = \text{Int } \Omega_l .$$

Ponieważ w zbiór $\text{Int } \Omega_l$ można wpisać otwarte otoczenie zera, więc zbiór $\{0\}$ jest atraktorem. Ponadto z twierdzenia Lapunowa o stabilności (**S**) wynika, że jest to atraktor stabilny. Zatem $x \equiv 0$ jest **AS** trywialnym rozwiązaniem (2.4). \square

Uwaga 2.3.3 (Krasowskiego–Barbašina). Jeżeli w Twierdzeniu 2.3.2 $\Omega = \mathbb{R}^n$ oraz $l_0 = \infty$ to tezę Twierdzenia 2.3.2 można wzmocnić następująco [10, Twierdzenie 3.4, str. 21]: $x \equiv 0$ jest globalnie asymptotycznie stabilnym **GAS** trywialnym rozwiązaniem układu (2.4).

Dowód. Z Twierdzenia 2.3.2 wynika, że dla dowolnego $l > 0$ zbiór $\text{Int } \Omega_l$ jest obszarem atrakcji **AS** rozwiązania zerowego układu (2.4). Wystarczy zatem wykazać, że

$$\bigcup_{l \in (0, \infty)} \text{Int } \Omega_l = \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

Ponieważ $l_0 = \infty$ w Lemacie 2.3.1, więc wszystkie składniki tej sumy są zbiorami niepustymi, a ponadto rozpatrując tę sumę jako zbiór w $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ stwierdzamy, że $\partial \bigcup_{l \in (0, \infty)} \text{Int } \Omega_l = \{\infty\}$. Na zbiorze $\{\infty\}$ mamy $V = \infty$ i równość (2.5) jest konsekwencją ciągłości V . \square

2.4. POMOCNICZE LEMATY

Definicja 2.4.1. Para (A, B) jest *sterowalna*, jeśli

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n .$$

Para (A, C) jest *obserwowalna* jeśli

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n .$$

Twierdzenie 2.4.2 (O macierzowym równaniu Lapunowa). Załóżmy, że $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$. Wtedy zachodzą poniższe tezy.

- (i) Jeżeli istnieje $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ taka, że para (A, G) jest obserwowalna oraz istnieje $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$, spełniające macierzowe równanie Lapunowa

$$A^T H + H A = -G^T G \quad (2.6)$$

to $\text{Re } \lambda(A) < 0$.

- (ii) Jeżeli $\text{Re } \lambda(A) < 0$ to dla dowolnej $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ istnieje dokładnie jedno $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T \geq 0$, rozwiązaniem równania (2.6) oraz

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : G e^{tA} x = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (2.7)$$

Dowód. Ad (i). Rozważmy liniowy układ autonomiczny $\dot{x}(t) = Ax(t)$ i (dodatnio określoną) formę kwadratową $V(x) = x^T H x$. Ponieważ

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T H x + x^T H \dot{x} = -\|Gx\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n ,$$

więc V jest funkcją Lapunowa, a ponadto

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Gx = 0\} .$$

Rozwiązanie zerowe jest jedynym rozwiązaniem układu $\dot{x} = Ax$ zawartym w zbiorze E . Istotnie, rozwiązanie takie ma postać $x(t) = e^{tA} x_0$, a ponieważ leży w E , więc mamy także: $G e^{tA} x_0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wyliczając pochodne kolejnych rzędów od 0 do $n - 1$ w $t = 0$ dostajemy

$$\begin{bmatrix} G \\ GA \\ GA^2 \\ \vdots \\ GA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = 0 .$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Stąd, wobec obserwowalności pary (A, G) otrzymujemy $x_0 = 0$. Na mocy Twierdzenia 2.3.2 i Uwagi 2.3.3 zerowy punkt równowagi jest **GAS**. Twierdzimy, że $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że tak nie jest, tzn. wszystkie wartości własne A leżą w $\overline{\Pi^+}$. Niech λ będzie wartością własną A , a h odpowiadającym jej wektorem własnym. Wtedy $\|x(t)\| = \|h\| e^{t \operatorname{Re} \lambda} \geq \|h\|$, co przeczy **GAS**.

Ad (i). Wobec $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ macierz

$$H = \int_0^\infty e^{tA^T} G^T G e^{tA} dt = H^T \geq 0 \quad (2.8)$$

jest poprawnie określona. Jest ona rozwiązaniem (2.6). Istotnie,

$$\begin{aligned} A^T H + H A &= \int_0^\infty \left[A^T e^{tA^T} G^T G e^{tA} + e^{tA^T} G^T G e^{tA} A \right] dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[e^{tA^T} G^T G e^{tA} \right] dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{tA^T} G^T G e^{tA} \right] - G^T G = -G^T G . \end{aligned}$$

Pozostaje wykazać, że jest to jedyne symetryczne, nieujemne rozwiązanie równania (2.6). Niech $H_1 = H_1^T \geq 0$, $H_2 = H_2^T \geq 0$ będą rozwiązaniami (2.6). Wtedy $\Delta = H_1 - H_2 = \Delta^T$ spełnia równanie $A^T \Delta + \Delta A = 0$. Mnożąc to równanie z lewej strony przez e^{tA^T} , a z prawej strony przez e^{tA} otrzymamy

$$e^{tA^T} A^T \Delta e^{tA} + e^{tA^T} \Delta A e^{tA} = \frac{d}{dt} \left(e^{tA^T} \Delta e^{tA} \right) = 0 .$$

Stąd

$$e^{tA^T} \Delta e^{tA} = \Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{tA^T} \Delta e^{tA} \right) = 0 ,$$

co oznacza, że (2.6) ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Teraz reprezentacja (2.8) implikuje równość (2.7). \square

Powyższy rezultat stanowi modyfikację wyniku klasycznego [72, str. 247], patrz także [40]. Dowód twierdzenia bez odwoływania się do Twierdzenia 2.3.2 i Uwagi 2.3.3 znajduje się w [2, Twierdzenie 3.7.3, str. 131].

Twierdzenie 2.4.3 (Kryterium Michajłowa–Leonarda). Warunkiem dostatecznym i koniecznym na to, aby wielomian W ,

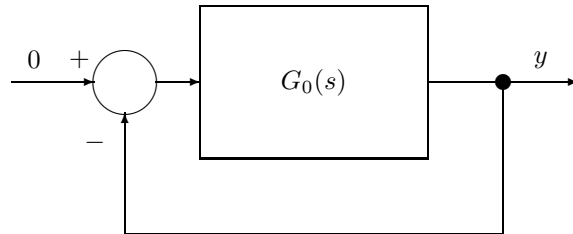
$$W(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0 ,$$

nie posiadający zer na $j\mathbb{R}$, miał dokładnie m zer w Π^+ jest

$$\Delta \arg_{\omega \in (-\infty, \infty)} W(j\omega) = n\pi - 2m\pi$$

przy czym $W(j\omega)$ dąży do punktu należącego do $\{\infty\}$ o argumentcie $\frac{n\pi}{2}$ gdy $\omega \mapsto \infty$.

Rozważmy **UAR** przedstawiony na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2. Schemat układu regulacji automatycznej

Transmitancja układu otwartego ma postać

$$G_0(s) = \frac{L(s)}{s^k M(s)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Liczbę k nazywamy *rzędem astatyzmu UAR*. $L(s)$, $M(s)$ są *wzajemnie pierwszymi* wielomianami, M ma m pierwiastków w Π^+ i nie posiada pierwiastków na $j\mathbb{R}$, $\deg L(s) < k + \deg M(s)$, $\frac{L(0)}{M(0)} \neq 0$. *Plotem Nyquista* nazywamy plot charakterystyki amplitudowo-fazowej $G_0(j\omega)$ uzupełniony torem na $\{\infty\}$, zorientowanym ujemnie, rozpoczynającym się w punkcie o argumentcie

$$\arg \frac{L(0)}{M(0)} + \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \frac{k\pi}{2}, & \text{gdy } \frac{L(0)}{M(0)} > 0 \\ \frac{k\pi}{2} - \pi, & \text{gdy } \frac{L(0)}{M(0)} < 0 \end{cases}$$

i kończącym się w punkcie o argumentcie

$$\arg \frac{L(0)}{M(0)} - \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} -\frac{k\pi}{2}, & \text{gdy } \frac{L(0)}{M(0)} > 0 \\ -\frac{k\pi}{2} - \pi, & \text{gdy } \frac{L(0)}{M(0)} < 0 \end{cases}.$$

Twierdzenie 2.4.4 (Kryterium Nyquista). Przy powyższych oznaczeniach i założeniach warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności układu zamkniętego jest, aby:

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

- (i) plot Nyquista układu otwartego nie przechodził przez punkt $(-1, 0)$,
- (ii) plot Nyquista przy zmianie pulsacji ω od $-\infty$ do ∞ okrążył punkt $(-1, 0)$ m razy w kierunku matematycznie dodatnim.

Zauważmy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wielomian $L(s) + s^k M(s)$ nie posiadał zer na $j\mathbb{R}$ jest, aby plot $G_0(j\omega)$ nie przechodził przez punkt $(-1, 0)$. Dowody Twierdzeń 2.4.3 i 2.4.4 można znaleźć w [52].

Uwaga 2.4.5. W przypadku układu z regulatorem proporcjonalnym transmitancja otwartego **UAR** jest równa $\frac{KL(s)}{s^k M(s)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ i jeśli K jest parametrem to użycie standardowej wersji kryterium Nyquista prowadzi do konieczności rozpatrzenia całej rodziny plotów Nyquista. Można tego uniknąć, rozważając tylko plot Nyquista transmitancji $G_0(s) = \frac{L(s)}{s^k M(s)}$, a następnie licząc jego obroty względem punktu $(-1/K, 0)$, a nie $(-1, 0)$.

Lemat 2.4.6 (Kalmana). Załóżmy, że $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $h, b \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, przy czym $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ i para (A, b) jest sterowalna. Wtedy warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby istniała para (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T \geq 0$, $g \in \mathbb{R}^n$ stanowiąca rozwiązanie układu

$$\begin{cases} A^T H + HA &= -gg^T \\ Hb + h &= -\sqrt{\gamma}g \end{cases} \quad (2.9)$$

jest aby zachodziła nierówność Kalmana

$$\gamma + 2 \operatorname{Re} h^T (A - j\omega I)^{-1} b \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Jeżeli (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T \geq 0$, $g \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem (2.9) to obserwowalność pary (A, h^T) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby $H > 0$.

Poniższy dowód Lematu 2.4.6 zawiera szereg uproszczeń i modyfikacji oryginalnego dowodu Kalmana [69].

Dowód. Konieczność. Niech (H, g) , $H = H^T \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H \geq 0$, $g \in \mathbb{R}^n$ będzie rozwiązaniem (2.9). Dla wygody zapisu wprowadźmy następujące oznaczenie

$$n(j\omega) := (A - j\omega I)^{-1} b .$$

Wynikającą z pierwszego równania układu (2.9) tożsamość

$$gg^T = -H(A - j\omega I) - (A - j\omega I)^* H$$

mnożymy lewostronnie przez $n^*(j\omega)$ i prawostronnie przez $n(j\omega)$ otrzymując

$$|g^T n(j\omega)|^2 = n^*(j\omega) g g^T n(j\omega) = -n^*(j\omega) H b - b^T H n(j\omega) .$$

Uwzględniając teraz drugie równanie układu (2.9) i definicję $n(j\omega)$, po kilku elementarnych przekształceniach, otrzymamy

$$|g^T n(j\omega)|^2 = 2\sqrt{\gamma} \operatorname{Re} g^T n(j\omega) + 2 \operatorname{Re} h^T (A - j\omega I)^{-1} b .$$

Po przeniesieniu $2\sqrt{\gamma} \operatorname{Re} g^T n(j\omega)$ na lewą stronę i dodaniu do obu stron γ dostajemy tożsamość

$$|g^T n(j\omega) - \gamma|^2 = \gamma + 2 \operatorname{Re} h^T (A - j\omega I)^{-1} b ,$$

z której wynika (2.10).

Zauważmy, że nie korzystaliśmy ani ze sterowalności pary (A, b) , ani z nierówności $H \geq 0$, ani ze stabilności macierzy A , a tylko z faktu, że $j\omega \notin \lambda(A)$.

Dostateczność.

$$\begin{aligned} & \gamma + 2 \operatorname{Re} h^T (A - j\omega I)^{-1} b = \\ & = \gamma + h^T \left[\frac{1}{\det(A - j\omega I)} \operatorname{adj}(A + j\omega I) + \frac{1}{\det(A + j\omega I)} \operatorname{adj}(A - j\omega I) \right] b = \\ & = \gamma + \frac{\det(A + j\omega I) h^T \operatorname{adj}(A - j\omega I) b + \det(A - j\omega I) h^T \operatorname{adj}(A + j\omega I) b}{\det(A^2 + \omega^2 I)} = \quad (2.11) \\ & = \frac{\gamma \det(A^2 + \omega^2 I) + 2 h^T A \operatorname{adj}(A^2 + \omega^2 I) b}{\det(A^2 + \omega^2 I)} = \frac{\theta(j\omega)}{|\psi(j\omega)|^2} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

przy czym

$$\psi(s) := \det(A - sI), \quad \theta(s) := \gamma \det(A^2 - s^2 I) + 2 h^T A \operatorname{adj}(A^2 - s^2 I) b .$$

$\theta(s)$ jest wielomianem rzeczywistym, parzystym, tzn. $\theta(s) = \theta(-s)$ dla $s \in \mathbb{C}$, stopnia formalnie $2n$, o wiodącym współczynnikiem $(-1)^n \gamma$. Ponadto, jeśli $\theta(s)$ posiada zera na osi urojonej to każde takie zero jest parzystej krotności. Istotnie, jeżeli 0 jest k -krotnym zerem $\theta(s)$ to

$$\theta(s) = s^k \theta_1(s), \quad \theta_1(0) \neq 0 \quad (2.12)$$

oraz, po uwzględnieniu (2.11),

$$\theta(j\omega) = j^k \omega^k \theta_1(j\omega) \geq \mathbb{R} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Hipoteza, że k jest nieparzyste może być łatwo obalona, gdyż wtedy dla utrzymania ostatniej nierówności, $\theta_1(j\omega)$ musi zmienić znak dla $\omega = 0$. Oznacza to, że $\theta_1(0) = 0$, co jest sprzeczne z (2.12). Jeżeli $\pm j\omega_0$ ($\omega_0 > 0$) jest k -krotnym zerem $\theta(s)$ to

$$\theta(s) = (s^2 + \omega_0^2)^k \theta_1(s), \quad \theta_1(-j\omega_0) \theta_1(j\omega_0) \neq 0 \quad (2.13)$$

2. STABILNOŚĆ CIĄGLYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

oraz

$$\theta(j\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^k \theta_1(j\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Hipoteza, że k nieparzyste, może być łatwo obalona, gdyż wtedy dla utrzymania ostatniej nierówności $\theta_1(j\omega)$ musi zmieniać znak dla $(\mp\omega_0)$. Oznacza to, że $\theta_1(-j\omega_0) = \theta_1(j\omega_0) = 0$, co jest sprzeczne z (2.13). W ten sposób pokazaliśmy, że gdy $\theta(s)$ ma zera na osi urojonej to są one parzystej krotności.

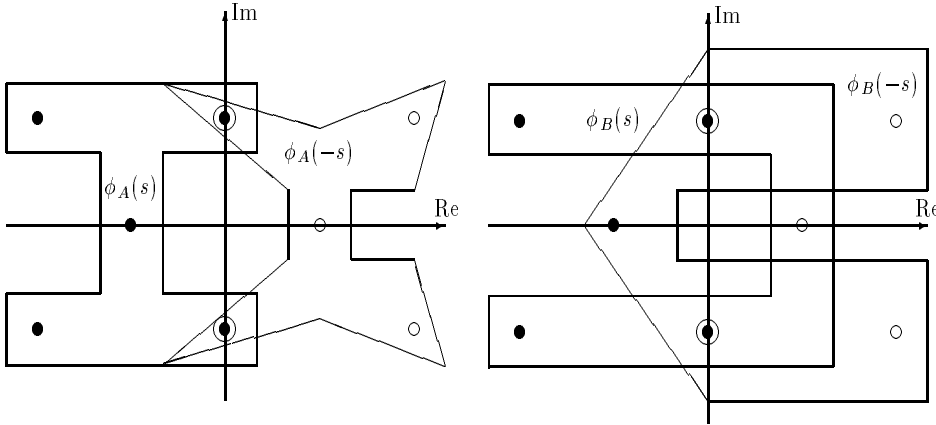
Dzięki własnościom wielomianu $\theta(s)$ możliwa jest faktoryzacja

$$\theta(s) = \phi(s)\phi(-s) \quad (2.14)$$

gdzie $\phi(s)$ jest tak wybranym wielomianem, że $\phi(s) = (-1)^n \sqrt{\gamma} s^n + \dots$ dla $\gamma \neq 0$. Faktoryzacja taka jest najogólniej niejednoznaczna i w szczególności za $\phi(s)$ można wziąć

$$\phi(s) = (-1)^{\frac{N}{2}} \sqrt{|a_N|} \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} (s - s_i) \quad (2.15)$$

gdzie N oznacza najwyższą potęgę s w wielomianie $\theta(s)$, $\theta(s) = a_N s^N + \dots$, s_i jest zerem $\theta(s)$, $\text{Re } s_i \leq 0$. Na rysunku 2.3 zilustrowano problem faktoryzacji wielomianu $\theta(s)$ na przykładzie wielomianu $\theta(s) = -s^{10} + 5s^8 - 18s^6 - 30s^4 + 19s^2 + 25$. Rysunek lewy odpowiada faktorowi $\phi_A(s) = -s^5 - 5s^4 - 10s^3 - 10s^2 - 9s - 5$ wyliczonemu ze wzoru (2.15). Rysunek prawy odpowiada faktorowi $\phi_B(s) = -s^5 - 3s^4 - 2s^3 + 2s^2 - s + 5$. W obu przypadkach $\theta(s) = \phi_A(s)\phi_A(-s) = \phi_B(s)\phi_B(-s)$, co dowodzi, że faktoryzacja może nie być jednoznaczna.



Rysunek 2.3. Ilustracja niejednoznaczności faktoryzacji wielomianu $\theta(s)$

Potraktujmy teraz tożsamość

$$\sqrt{\gamma}\psi(s) - \phi(s) = g^T \text{adj}(A - sI)b \quad (2.16)$$

gdzie $\phi(s)$ jest ustalonym wielomianem spełniającym (2.14),

$$(-1)^n \psi(s) = (-1)^n \det(A - sI) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i ,$$

jako równanie względem $g \in \mathbb{R}^n$. Badanie równania (2.16) jest silnie związane z analizą transmitancji układu liniowego

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + bu \\ y = g^T x \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

Jeżeli bowiem przyjąć, że wejściem jest u , a wyjściem $(-y)$, to transmitancja (2.17) przyjmuje postać

$$G_g(s) = g^T (A - sI)^{-1} b .$$

Wiadomo [2], że dzięki sterowalności pary (A, b) , transformacja

$$z = Sx, \quad S^{-1} = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]^T ,$$

gdzie T jest macierzą Toeplitza zestawioną ze współczynników wielomianu $(-1)^n \psi(s)$

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ a_3 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \end{bmatrix} ,$$

jest nieosobliwa i sprowadza (2.17) do postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = SAS^{-1}z + Sbu \\ y = g^T S^{-1}z \end{array} \right\} ,$$

gdzie

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdot & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} = F, \quad Sb = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Ponieważ $G_g(s)$ jest niezmiennicza względem tej transformacji, więc równanie (2.16) przyjmuje równoważną postać

$$\sqrt{\gamma} \psi(s) - \phi(s) = g^T S^{-1} \text{adj}(F - sI) Sb = (-1)^n g^T S^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -s \\ \vdots \\ -s_{n-1} \end{bmatrix} ,$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

a stąd

$$g = (-1)^{n+1} S^T \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

gdzie α_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ oznaczają współczynniki wielomianu

$$\sqrt{\gamma}\psi(s) - \phi(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i .$$

W ten sposób pokazaliśmy, że dla ustalonego wielomianu $\phi(s)$ spełniającego (2.14), równanie (2.16) posiada dokładnie jedno rozwiązanie g określone wzorem (2.18).

Wobec stabilności macierzy A , równanie Lapunowa

$$A^T H + H A = -g g^T \quad (2.19)$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $H = H^T$, $H \geq 0$.

Twierdzimy, że wyznaczona wyżej para (H, g) jest rozwiązaniem układu (2.9). W tym celu należy pokazać, że para (H, g) spełnia drugie równanie układu (2.9). Z (2.11), (2.14) i (2.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma + 2 \operatorname{Re} h^T (A - j\omega I)^{-1} b &\equiv |\sqrt{\gamma} - g^T n(j\omega)|^2 \equiv \\ &\equiv \gamma + n^*(j\omega) g g^T n(j\omega) - 2\sqrt{\gamma} \operatorname{Re} g^T n(j\omega) . \end{aligned}$$

Uwzględniając (2.19) w tej tożsamości, po elementarnych przekształceniach, dostajemy

$$\begin{aligned} h^T n(j\omega) + n^*(j\omega) h + \sqrt{\gamma} g^T n(j\omega) + \sqrt{\gamma} n^*(j\omega) g + \\ + n^*(j\omega) A^T H n(j\omega) + n^*(j\omega) H A n(j\omega) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Z tożsamości

$$A(A - sI)^{-1} \equiv I + s(A - sI)^{-1}, \quad s \notin \lambda(A) \quad (2.21)$$

wynika, że

$$\left\{ \begin{array}{l} n^*(j\omega) H A n(j\omega) \equiv n^*(j\omega) H b + j\omega b^T [(A - j\omega I)^*]^{-1} H (A - j\omega I)^{-1} b \\ n^*(j\omega) A^T H n(j\omega) \equiv b^T H n(j\omega) - j\omega b^T [(A - j\omega I)^*]^{-1} H (A - j\omega I)^{-1} b \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

Uwzględniając (2.22) w (2.20) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n^*(j\omega) [H b + h + \sqrt{\gamma} g] + [h^T + \sqrt{\gamma} g^T + b^T H] n(j\omega) &\equiv \\ \equiv 2 \operatorname{Re} [H b + h + \sqrt{\gamma} g^T] n(j\omega) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Jeżeli pokażemy, że tożsamość (2.23) implikuje równość $a := H b + h + \sqrt{\gamma} g = 0$ to tym samym wykazemy, że (H, g) spełnia drugie równanie układu (2.9). Dla dowodu

2.4. POMOCNICZE LEMATY

wprowadzamy pomocniczą transmitancję $G_a(s) = a^T(A - sI)^{-1}b$, co umożliwia następujący zapis (2.23)

$$0 \equiv 2 \operatorname{Re} G_a(j\omega) \equiv G_a(j\omega) + G_a(-j\omega) \equiv \frac{B_a(j\omega)}{\psi(j\omega)} + \frac{B_a(-j\omega)}{\psi(-j\omega)} \quad (2.24)$$

gdzie

$$B_a(s) = a^T \operatorname{adj}(A - sI)b = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Dokonyując rozkładów

$$\begin{aligned} \psi(j\omega) &= \operatorname{Re} \psi + j \operatorname{Im} \psi, & \psi(-j\omega) &= \operatorname{Re} \psi - j \operatorname{Im} \psi \\ B_a(j\omega) &= \operatorname{Re} B_a + j \operatorname{Im} B_a, & B_a(-j\omega) &= \operatorname{Re} B_a - j \operatorname{Im} B_a \end{aligned}$$

otrzymujemy równoważny zapis (2.24)

$$\operatorname{Re} \psi \operatorname{Re} B_a + \operatorname{Im} \psi \operatorname{Im} B_a \equiv 0 \quad (2.26)$$

Stąd, wobec (2.16) i (2.25), tożsamość (2.26) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} &(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + a_8\omega^8 - \dots)(\beta_0 - \beta_2\omega^2 + \beta_4\omega^4 - \beta_6\omega^6 + \beta_8\omega^8 - \dots) + \\ &+ (a_1 - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + a_9\omega^9 - \dots)(\beta_1 - \beta_3\omega^3 + \beta_5\omega^5 - \beta_7\omega^7 + \beta_9\omega^9 - \dots) \equiv 0 \end{aligned}$$

Z porównania współczynników przy tych samych potęgach ω^2 wynika liniowy układ równań

$$\mathcal{H} \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

przy czym dla nieparzystego n

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

a dla parzystego n

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -a_{n-3} & a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-5} & -a_{n-4} & a_{n-3} & -a_{n-2} & a_{n-1} & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Zauważmy, że macierz \mathcal{H} powstaje z macierzy Hurwitza, dla wielomianu charakterystycznego macierzy A , przez przemnożenie przez (-1) co drugiej kolumny i/lub wiersza. Stąd wobec stabilności A , $\det \mathcal{H} \neq 0$. W ten sposób pokazaliśmy, że $[\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \dots, \beta_1, \beta_0] = \mathbf{0}^T$. Stosując do $G_a(s)$ analogiczne wywody jak to zrobiliśmy dla $G_g(s)$ otrzymujemy

$$a^T \operatorname{adj}(A - sI)^{-1} b = B_a(s) = a^T S^{-1} \operatorname{adj}(F - sI) S b = (-1)^n a^T S^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -s \\ \vdots \\ -s^{n-1} \end{bmatrix} .$$

Na mocy (2.25)

$$(-1)^{n+1} a^T S^{-1} = \beta^T = \mathbf{0}^T ,$$

a więc $a = 0$ i dowód warunku dostatecznego jest zakończony.

Niech (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T \geq 0$ będzie rozwiązaniem (2.9). Wobec stabilności A i Twierdzenia 2.4.2 zastosowanego do pierwszego równania układu (2.9) dostajemy

$$H = \int_0^\infty e^{tA^T} g g^T e^{tA} dt = H^T \geq 0 .$$

Wprowadźmy podprzestrzenie liniowe

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : g^T e^{tA} x \equiv 0\} , \\ X_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^n : h^T e^{tA} x \equiv 0\} . \end{aligned}$$

Dla dowodu inkluzji

$$X_1 \subset X_2 \tag{2.27}$$

ustalamy $x_1 \in X_1 \setminus \{0\}$ i rozpatrujemy rozwiązanie $x(t, x_1) = e^{tA} x_1$ problemu początkowego $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_1$. Ponieważ z (2.9) wynika, że pochodna formy kwadratowej $V(x) = x^T H x$ wzdłuż rozwiązania tego układu ma postać $\dot{V}(x) = -x^T g g^T x$, więc rozwiązanie $x(t, x_1)$ leży w zbiorze $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$. Stąd

$$V(x_1) = x_1^T H x_1 = 0 \equiv V[x(t, x_1)] = x_1^T e^{tA^T} H e^{tA} x_1 ,$$

a ponieważ $H \geq 0$, więc

$$H e^{tA} x_1 \equiv 0 \tag{2.28}$$

Z drugiej strony, po prawostronnym przemnożeniu transpozycji drugiego równania układu (2.9) przez $e^{tA} x_1$, otrzymujemy

$$b^T H e^{tA} x_1 + h^T e^{tA} x_1 \equiv -\sqrt{\gamma} g^T e^{tA} x_1 \tag{2.29}$$

Uwzględniając (2.28) w (2.29) stwierdzamy, że $h^T e^{tA} x_1 \equiv 0$, a zatem $x_1 \in X_2$. Dowód inkluzji (2.27) jest zakończony.

Jeżeli para (A, h^T) jest obserwowalna to $X_2 = \{0\}$, co wobec (2.27), daje $X_1 = \{0\}$, a więc dla dowolnej pary (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T \geq 0$, $g \in \mathbb{R}^n$ stanowiącej rozwiązanie (2.9) mamy $H > 0$.

Z wykazanych uprzednio własności podprzestrzeni X_1 wynika, że każda para (A, g^T) taka, że (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$, $g \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem (2.9), jest obserwowalna. Przypuśćmy, że para (A, h^T) nie jest obserwowalna. Wtedy na mocy twierdzenia Popova [128, str. 534 - 535], [40, str. 48] istnieje s_0 , $\text{Re } s_0 < 0$ takie, że $\psi(s_0) = \det(A - s_0 I) = h^T \text{adj}(A - s_0 I)b = 0$, skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A + s_0 I)h^T \text{adj}(A - s_0 I)b + \det(A - s_0 I)h^T \text{adj}(A + s_0 I)b = \\ &= h^T [(A + s_0 I) \text{adj}(A^2 - s_0^2 I) + (A - s_0 I) \text{adj}(A^2 - s_0^2 I)]b = 2h^T A \text{adj}(A^2 - s_0^2 I) . \end{aligned}$$

Zatem na mocy (2.11), $\theta(s_0) = 0$. Zgodnie z (2.14) zachodzi to gdy $\phi(s_0) = 0$ lub $\phi(-s_0) = 0$. W pierwszym przypadku dla rozwiązania (H_1, g_1) , $H_1 = H_1^T > 0$ wyznaczonego przez zależności (2.16) i (2.19) mamy

$$\sqrt{\gamma}\psi(s_0) - \phi(s_0) = 0 = g_1^T \text{adj}(A - s_0 I)b ,$$

co na mocy twierdzenia Popova [128, str. 534 - 535], [40, str. 48] oznacza, że (A, g_1^T) nie jest obserwowalna. W drugim przypadku zauważa się, że jeżeli $\phi(s)$ jest dobrym elementem faktoryzacji (2.14) to także $\phi_1(s) = (-1)^n \phi(-s)$ jest dobrym elementem tej faktoryzacji. W efekcie dla rozwiązania (H_2, g_2) , $H_2 = H_2^T > 0$ wyznaczonego przez (2.16), z podstawieniem $\phi_1(s)$ w miejsce $\phi(s)$ i (2.19) mamy

$$\sqrt{\gamma}\psi(s_0) - (-1)^n \phi(-s_0) = 0 = g_2^T \text{adj}(A - s_0 I)b$$

i para (A, g_2^T) nie jest obserwowalna. Na mocy rozumowania dowodu nie wprost ustalamy, że para (A, h^T) jest obserwowalna, co kończy dowód lematu. \square

Lemat 2.4.7. Niech $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$ i $h, b \in \mathbb{R}^n$, przy czym para (A, b) jest sterowalna, a para (A, h^T) jest obserwowalna. Wtedy, jeżeli układ

$$\begin{cases} HA + A^T H &= 0 \\ Hb + h &= 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

posiada rozwiązanie $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$ to jest ono jedyne i nieosobliwe. Ponadto warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniało dokładnie jedno rozwiązanie $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$ układu (2.30) jest, aby spełnione były następujące dwa warunki:

$$\text{wartości własne } A \text{ leżą na osi urojonej i są pojedyncze} \quad (2.31)$$

$$j\alpha \in \lambda(A) \implies \text{Res}_{s=j\alpha} h^T (A - sI)^{-1} b > 0 \quad (2.32)$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Dowód. Niech H_1, H_2 będą rozwiązaniami układu (2.12). Wówczas macierz $\Delta H = H_1 - H_2$ spełnia układ

$$\begin{cases} A^T \Delta H + \Delta H A = 0 \\ \Delta H b = 0 \end{cases} .$$

Mnożąc pierwsze z tych równań kolejno przez $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ i wykorzystując drugie równanie otrzymujemy

$$b, Ab, \dots, A^{n-1}b \in \ker \Delta H = \{x \in \mathbb{R}^n : \Delta H x = 0\} .$$

Wobec sterowalności (A, b) , $\ker \Delta H = \mathbb{R}^n$, co oznacza, że $H_1 = H_2$. Zatem rozwiązanie (2.30), o ile istnieje, jest jedyne.

Niech $x \in \ker H$. Mnożąc prawostronnie pierwsze z równań układu (2.30) kolejno przez $x, Ax, \dots, A^{n-1}x$ otrzymujemy:

$$H Ax = 0, \quad H A^2 x = 0, \quad \dots, \quad H A^{n-1} x = 0 .$$

Stąd w wyniku kolejnych mnożeń drugiego równania układu (2.30) lewostronnie przez $x^T, x^T A^T, \dots, x^T (A^T)^{n-1}$ dostajemy

$$x^T [h \quad A^T h \quad (A^T)^2 h \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} h] = 0 .$$

Wobec obserwowalności (A, h^T) , $x = 0$. Zatem $\ker H = \{0\}$ co oznacza, że rozwiązanie H jest nieosobliwe.

Konieczność warunków (2.31), (2.32). Poziomice dodatnio-określonej formy kwadratowej $x^T H x$ są ograniczonymi zbiorami inwariantnymi dla rozwiązań systemu liniowego $\dot{x} = Ax$, z czego wynika, że wartości własne A leżą na osi urojonej oraz mają proste dzielniki elementarne. Przypadek, gdy nie są pojedyncze, jest nie do pogodzenia ze sterowalnością (A, b) i obserwowalnością (A, h^T) .

Z (2.31) wynika, że bez straty ogólności rozważań, można w dalszym ciągu przyjąć

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

przy czym ze względu na sterowalność (A, b) i obserwowalność (A, h^T) mamy:

$$b_1 \neq 0, \quad b_2^2 + b_3^2 \neq 0, \quad h_1 \neq 0, \quad h_2^2 + h_3^2 \neq 0 .$$

Wtedy to z jednej strony

$$h^T (A - sI)^{-1} b = \frac{-h_1 b_1}{s} + \frac{s(-b_2 h_2 - b_3 h_3) + \alpha(b_2 h_3 - b_3 h_2)}{s^2 + \alpha^2} \quad (2.34)$$

a z drugiej strony rozwiązanie układu (2.30) ma postać macierzy diagonalnej

$$H = \text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \delta_2 \}, \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0 ,$$

przy czym:

$$\delta_1 b_1 + h_1 = 0, \quad \delta_2 b_2 + h_2 = 0, \quad \delta_2 b_3 + h_3 = 0 \quad (2.35)$$

Kombinując (2.33) ÷ (2.35) otrzymamy związki

$$0 > h_1 b_1 = - \text{Res}_{s=0} h^T (A - sI)^{-1} b ,$$

$$b_2 h_3 - b_3 h_2 = 0, \quad b_2 h_2 + b_3 h_3 = -2 \text{Res}_{s=j\alpha} h^T (A - sI)^{-1} b < 0 ,$$

z których wynika implikacja (2.32).

Dostateczność. Z (2.33), (2.34) i rzeczywistości $-\text{Res}_{s=j\alpha} h^T (A - sI)^{-1} b$ wynika, że $b_2 h_3 - b_3 h_2 = 0$. W konsekwencji

$$\text{Re } h^T (A - j\omega I)^{-1} b = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) \quad (2.36)$$

Z (2.31), (2.32) i (2.36) wynika na podstawie kryterium Nyquista związek

$$\text{Re } \lambda(A + bh^T) < 0 ,$$

co wraz z obserwowalnością pary (A, h^T) gwarantuje istnienie macierzy $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$, będącej jedynym rozwiązaniem macierzowego równania Lapunowa

$$(A + bh^T)^T H + H(A + bh^T) = -2hh^T .$$

Nietrudno zauważyć, że wobec (2.33) i związku $b_2 h_3 - h_2 b_3 = 0$, rozwiązaniem tym jest

$$H = H^T = \begin{bmatrix} -\frac{h_1}{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h_2}{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h_2}{b_2} \end{bmatrix} > 0 .$$

Teraz jednak bardzo łatwo ustalamy, używając jeszcze raz (2.33) i związku $b_2 h_3 - b_3 h_2 = 0$, że H spełnia układ (2.30). Jest to jedyne rozwiązanie (2.30). \square

Lemat 2.4.8. Niech $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$, przy czym para (A, b) jest sterowalna, para (A, c^T) – obserwowalna, a ponadto $\lambda(A) = \{0\}$. Wtedy warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby istniała dokładnie jedna macierz $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T \geq 0$ (z dopuszczeniem $H = 0$) będąca rozwiązaniem układu

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + H A = 0 \\ H b + \frac{1}{2} A^T c = 0 \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

jest, aby $A = [0]_{1 \times 1}$ lub A była podobna do macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ oraz

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 c^T (A - sI)^{-1} b > 0 \quad (2.38)$$

Dowód. Warunek dostateczny.

1°. $A = [0] \in \mathbf{L}(\mathbb{R})$, $b = b_1 \neq 0$ (ze względu na sterowalność (A, b)), $c = c_1 \neq 0$ (ze względu na obserwowalność (A, c^T)). Wtedy $H = [0] \in \mathbf{L}(\mathbb{R})$ jest jedynym rozwiązaniem układu (2.37).

2°. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $b_2 \neq 0$ (ze względu na sterowalność (A, b)),
 $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $c_1 \neq 0$ (ze względu na obserwowalność (A, c^T)). Wtedy $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_1}{2b_2} \end{bmatrix} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ jest jedynym rozwiązaniem układu (2.37). Ponieważ

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 c^T (A - sI)^{-1} b > 0 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left[\frac{-s(b_1 c_1 + b_2 c_2) - b_2 c_1}{s^2} \right] = -b_2 c_1,$$

więc na mocy (2.38), $b_2 c_1 < 0$ i w konsekwencji $H \geq 0$.

Warunek konieczny. Dopuszczymy $H = [0] \in \mathbf{L}(\mathbb{R})$. Z (2.37) wynika, że $A^T c = 0$ co wobec obserwowalności (A, c^T) oznacza, że $A = [0]_{1 \times 1}$. Załóżmy, że istnieje $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T \geq 0$, $H \neq 0$, $n \geq 2$. Ponieważ $\lambda(A) = \{0\}$ więc, dyskutując jordanowską postać A , łatwo ustalić, że przy $n \geq 2$ własności sterowalności pary (A, b) i obserwowalności (A, c^T) mogą zachodzić tylko dla macierzy A podobnych do macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Przyjmując za A taką właśnie macierz, nietrudno obalić hipotezę, że $n > 2$, jako, że wówczas założenie o istnieniu stosownej H jest sprzeczne z obserwowalnością (A, c^T) .

Pozostaje więc tylko przypadek macierzy A podobnej do macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Przez odwrócenie rozumowania opisanego w punkcie 2° dowodu dostateczności ustalmy, że przypadek ten może być dopuszczony pod warunkiem (2.38). \square

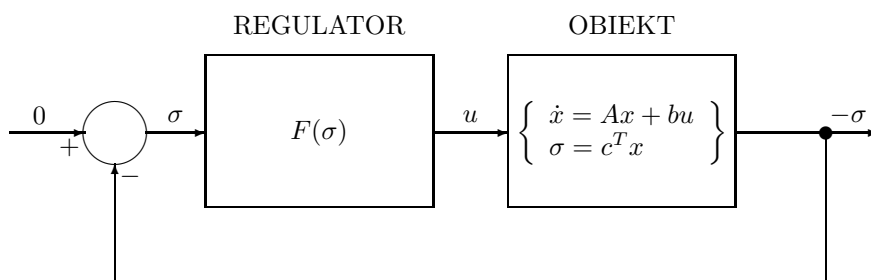
2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

W niniejszym rozdziale będziemy analizowali stabilność układu Lurie

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + ub \\ \sigma = c^T x \\ u = F(\sigma) \end{array} \right\} \iff \dot{x} = Ax + bF(c^T x) \quad (2.39)$$

gdzie $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $b, c, x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), \sigma(t) \in \mathbb{R}$.

Układ (2.39) może być w szczególności interpretowany jako model matematyczny dynamiki układu sterowania przedstawionego na rysunku 2.4.



Rysunek 2.4. Układ Lurie sterowania

Z tej interpretacji wynika celowość wyodrębnienia transmitancji liniowej części układu

$$G(s) = c^T (A - sI)^{-1} b \quad (2.40)$$

Twierdzenie 2.5.1. Przypuśćmy, że para (A, c^T) jest obserwowalna. Niech $k \in (0, \infty]$ będzie takie, że:

- (i) istnieją liczby $\sigma_1 \in (-\infty, 0)$, $\sigma_2 \in (0, \infty)$ takie, że

$$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k \quad \forall \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2) \setminus \{0\}, \quad F(0) = 0 \quad (2.41)$$

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i na tyle regularną, że rozwiązania (2.39) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^n ,

- (ii) spełniony jest warunek

$$\operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu \in (0, k) \quad (2.42)$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

(iii) istnieje $q \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{1}{k} - qc^T b \geq 0 \quad (2.43)$$

i układ rozwiązujących równań Lurie

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA = -gg^T \\ Hb + \frac{q}{2}A^T c + \frac{1}{2}c = -\sqrt{\frac{1}{k} - qc^T b}g \end{array} \right\} \quad (2.44)$$

posiada rozwiązanie (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $g \in \mathbb{R}^n$.

Wtedy zerowy punkt równowagi systemu (2.39) jest **AS**. Zbiór

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 \leq c^T x \leq \sigma_2, x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma < \eta \right\} \quad (2.45)$$

gdzie

$$\eta = \left\{ \begin{array}{ll} \min_{i=1,2} \left(\frac{\sigma_i^2}{c^T H^{-1} c} + q \int_0^{\sigma_i} F(\sigma) d\sigma \right), & \text{gdy } \det H \neq 0 \\ \min_{i=1,2} \left(q \int_0^{\sigma_i} F(\sigma) d\sigma \right), & \text{gdy } \det H = 0 \end{array} \right\} \quad (2.46)$$

jest podzbiorem obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi.

Dowód. Na mocy założeń, funkcjonal

$$V(x) = x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma$$

jest poprawnie określony. Wykażemy, że posiada on następujące własności:

- (a) jest klasy C^1 na \mathbb{R}^n ;
- (b) $\dot{V}(x) \leq 0$ na pewnym nadzbiorze zbioru $\overline{\mathcal{P}}$, gdzie $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 < c^T x < \sigma_2\}$;
- (c) jedynym rozwiązaniem (2.39) określonym na \mathbb{R} i pozostającym w zbiorze $\{x \in \mathcal{P} : \dot{V}(x) = 0\}$ jest $x \equiv 0$;
- (d) jest dodatnio-określony na pewnym otwartym nadzbiorze zbioru $\overline{\mathcal{P}}$;
- (e) $l_0 \geq \eta$, gdzie l_0 jest liczbą opisaną w Lemacie 2.3.1.

2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

Ad (a). Wobec ciągłości F to stwierdzenie jest oczywiste.

Ad (b). Po kilku elementarnych przekształceniach przedstawiamy $\dot{V}(x)$ w postaci

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -[x^T, F(c^T x)] \begin{bmatrix} A^T H + HA & Hb + \frac{q}{2} A^T c + \frac{1}{2} c \\ b^T H + \frac{q}{2} c^T A + \frac{1}{2} c^T & -\frac{1}{k} + qc^T b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix} - \\ &- F(c^T x) \left[c^T x - \frac{1}{k} F(c^T x) \right] = - \left[g^T x + \sqrt{\frac{1}{k} - qc^T b} F(c^T x) \right]^2 - \\ &- F(c^T x) \left[c^T x - \frac{1}{k} F(c^T x) \right] \leq 0 \end{aligned}$$

na $\overline{\mathcal{P}}$ (na mocy (2.41), (2.44) i ciągłości F).

Ad (c). Niech $x_0 \in \{x \in \mathcal{P} : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{P} : F(c^T x) = 0, g^T x = 0\} = \{x \in \mathcal{P} : c^T x = 0, g^T x = 0\}$ oraz $x(\cdot, x_0)$ jest rozwiązaniem określonym na \mathbb{R} i pozostającym w tym zbiorze. Rozwiązanie to spełnia układ

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax \\ c^T x = 0 \\ g^T x = 0 \end{array} \right\},$$

stąd $c^T e^{tA} x_0 \equiv 0$. Dzięki obserwowalności pary (A, c^T) mamy $x_0 = 0$ i w konsekwencji $x(t, x_0) \equiv 0$, co kończy dowód własności (c).

Ad (d). Dla $F(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu \in (0, k)$ układ (2.39) staje się systemem liniowym $\dot{x} = (A + \mu bc^T)x$, funkcjonal V staje się formą kwadratową o macierzy $H + \frac{\mu q}{2} cc^T$, a własność (c) zachowuje swą ważność po zamianie \mathcal{P} na \mathbb{R}^n . Teraz z (2.42) i [10, Twierdzenie 1.2, str. 31] wynika, że

$$H + \frac{\mu q}{2} cc^T > 0 \quad \forall \mu \in (0, k) \quad (2.47)$$

Niech $x \in \overline{\mathcal{P}} \setminus \{0\}$.

1°. $c^T x = 0$. Wtedy

$$V(x) = x^T H x = x^T \left[H + \frac{\mu q}{2} cc^T \right] x > 0 .$$

2°. $c^T x \neq 0$, $c^T x \in [\sigma_1, \sigma_2]$. Bierzemy

$$\mu := \frac{2}{x^T cc^T x} \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma .$$

Wobec (2.41) i ciągłości F otrzymujemy $\mu \in (0, k)$ i teraz mamy

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$0 < x^T \left[H + \frac{q}{2} \frac{2}{x^T c c^T x} \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma c c^T \right] x = V(x) .$$

Wobec ciągłości V i $V(0) = 0$ otrzymujemy ostatecznie (d).

Ad (e). Funkcja $\mathbb{R} \ni \mu \mapsto \lambda_{\min} \left(H + \frac{\mu q}{2} c c^T \right)$ jest ciągła i na mocy (2.47) przyjmuje wartości dodatnie na $(0, k)$, stąd $H \geq 0$. Tak więc problem minimalizacyjny $\mathcal{F}(l) = \min_{c^T x=l} V(x)$ jest poprawnie postawiony. Wykażemy, że:

$$\mathcal{F}(l) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{l^2}{c^T H^{-1} c} + q \int_0^l F(\sigma) d\sigma, & \text{gdy } \det H \neq 0 \\ q \int_0^l F(\sigma) d\sigma, & \text{gdy } \det H = 0 \end{array} \right\} .$$

Funkcjonał Lagrange'a dla sformułowanego wyżej problemu minimalizacji ma postać

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = V(x) + \lambda(c^T x - l) .$$

Równanie $\nabla \mathcal{L} = 0$, wynikające z metody mnożników Lagrange'a, przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 2H & c \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qF(l)c \\ l \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

1°. $\det H = 0$. Ponieważ $\det \begin{bmatrix} 2H & 0 \\ c^T & l \end{bmatrix} = l \det(2H) = 0$, więc wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ l \end{bmatrix}$ tworzy z kolumnami macierzy $\begin{bmatrix} 2H & 0 \\ c^T & l \end{bmatrix}$ układ liniowo-zależny, stąd $\text{rank} \begin{bmatrix} 2H & 0 \\ c^T & l \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2H \\ c^T \end{bmatrix}$ i z twierdzenia Kroneckera–Capelliego wynika, że układ równań $\begin{bmatrix} 2H \\ c^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ l \end{bmatrix}$ posiada rozwiązanie (niekoniecznie jedyne) x^* . Łatwo teraz stwierdzić, że wektor $\begin{bmatrix} x^* \\ -qF(l) \end{bmatrix}$ jest rozwiązaniem (2.48). Stąd

$$\mathcal{F}(l) = V(x^*) = (x^*)^T H x^* + q \int_0^l F(\sigma) d\sigma = q \int_0^l F(\sigma) d\sigma .$$

2°. $\det H \neq 0$. Ponieważ

$$\det \begin{bmatrix} 2H & c \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = -2^{n-1} (\det H) c^T H^{-1} c ,$$

więc macierz układu (2.48) jest nieosobliwa i układ (2.48) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $\begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}$. Ze wzorów Cramera

2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

$$\lambda^* = \frac{\det \begin{bmatrix} 2H & -qF(l)c \\ c^T & l \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2H & c \\ c^T & 0 \end{bmatrix}} = -\frac{2l + qF(l)c^T H^{-1}c}{c^T H^{-1}c} .$$

Wstawiając λ^* do (2.48) otrzymujemy

$$Hx^* = -\frac{\lambda^*}{2}c - \frac{q}{2}F(l)c = \frac{l}{c^T H^{-1}c}c ,$$

skąd

$$\mathcal{F}(l) = \frac{l^2}{c^T H^{-1}c} + q \int_0^l F(\sigma)d\sigma .$$

Z postaci V i (d) wynika, że rozłączne podzbiory przekroju $\{x \in \Omega : V(x) = \mathcal{C}_1\}$ muszą dać się oddzielić hiperpłaszczyzną postaci $c^T x = \mathcal{C}_2 \neq 0$. Liczba l_0 opisane w Lemacie 2.3.1 jest więc związana z monotonicznymi własnościami funkcji \mathcal{F} . Wobec ciągłości \mathcal{F} jest to funkcja klasy C^1 . Z (2.41) wynika, że $\frac{d\mathcal{F}}{dl} > 0$ dla $l \in (0, \sigma_2)$ oraz $\frac{d\mathcal{F}}{dl} < 0$ dla $l \in (\sigma_1, 0)$. Z tego względu $l_0 \geq \eta = \min_{i=1,2} \mathcal{F}(\sigma_i)$.

Z Twierdzenia 2.3.2, którego założenia są spełnione na mocy (a) ÷ (e) wynika, że $x \equiv 0$ jest **AS** trywialnym rozwiązaniem układu (2.39), a zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 \leq c^T x \leq \sigma_2, V(x) < l\}$ jest podzbiorem obszaru atrakcji tego rozwiązania, l – dowolna liczba z przedziału $(0, \eta)$. Po mnogościowym zsumowaniu tych zbiorów po $l \in (0, \eta)$ otrzymamy tezę Twierdzenia 2.5.1. \square

Dowodzone poniżej Twierdzenie 2.5.2 ujmuje *zdegenerowany* przypadek Twierdzenia 2.5.1, odpowiadający $k = \infty, q \rightarrow \infty$.

Twierdzenie 2.5.2. Niech para (A, b) będzie sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Przyjmijmy, że:

(i) spełnione są warunki

$$\operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu > 0 \quad (2.49)$$

$$c^T b \leq 0 \quad (2.50)$$

(ii) układ rozwiązujących równań Lurie

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + H A = -g g^T \\ H b + \frac{1}{2} A^T c = -\sqrt{-c^T b} g \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

posiada rozwiązanie (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $g \in \mathbb{R}^n$,

$$g \neq 0, \quad \text{gdy} \quad c^T b = 0 \quad (2.52)$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

(iii) istnieją liczby $\sigma_1 \in (-\infty, 0)$, $\sigma_2 \in (0, \infty)$ takie, że

$$\sigma F(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2) \setminus \{0\}, \quad F(0) = 0 \quad (2.53)$$

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i taką, że rozwiązania układu (2.39) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^n .

Wtedy zerowy punkt równowagi układu (2.39) jest **AS**. Zbiór

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 \leq c^T x \leq \sigma_2, x^T H x + \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma < \eta \right\} \quad (2.54)$$

gdzie

$$\eta = \begin{cases} \min_{\sigma=1,2} \left(\frac{\sigma_i^2}{c^T H^{-1} c} + \int_0^{\sigma_i} F(\sigma) d\sigma \right), & \text{gdy } \det H \neq 0 \\ \min_{\sigma=1,2} \left(\int_0^{\sigma_i} F(\sigma) d\sigma \right), & \text{gdy } \det H = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

jest podzbiorem obszarem atrakcji zerowego punktu równowagi.

Dowód. Wobec założeń, funkcjonal

$$V(x) := x^T H x + \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma$$

jest poprawnie określony. Wykażemy, że posiada on następujące własności:

- (a) jest klasy C^1 na \mathbb{R}^n ;
- (b) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- (c) jedynym rozwiązaniem określonym na \mathbb{R} , ograniczonym i zlokalizowanym w zbiorze $\{x \in \mathcal{P} : \dot{V}(x) = 0\}$, gdzie $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 < c^T x < \sigma_2\}$ jest trywialne rozwiązanie zerowe układu (2.39);
- (d) V jest dodatnio-określony na $\overline{\mathcal{P}}$;
- (e) $l_0 \geq \eta$, gdzie l_0 – liczba zdefiniowana w Lemacie 2.3.1.

Ad (a). Fakt ten jest oczywisty.

Ad (b). Po kilku elementarnych przekształceniach, dzięki (2.51), mamy

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -[x^T, F(c^T x)] \begin{bmatrix} A^T H + H A & H b + \frac{1}{2} A^T c \\ b^T H + \frac{1}{2} c^T A & c^T b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix} = \\ &= - \left[g^T x + \sqrt{-c^T b} F(c^T x) \right]^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

Ad (c). Niech $x_0 \in \{x \in \mathcal{P} : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{P} : g^T x + \sqrt{-c^T b} F(c^T x) = 0\}$ oraz $x(\cdot, x_0)$ rozwiązanie określone na \mathbb{R} , ograniczone i pozostające w tym zbiorze.

1°. $c^T b = 0$. Wtedy $x_0 \in \{x \in \mathcal{P} : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{P} : g^T x = 0\}$ i rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ musi spełniać układ

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + bF(c^T x) \\ g^T x \equiv 0 \end{array} \right\},$$

stad $g^T Ax + g^T bF(c^T x) \equiv 0$. Możliwe są dwa przypadki – albo

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = 0 \\ g^T Ax \equiv 0 \end{array} \right\},$$

albo

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b \neq 0 \\ F(c^T x) = -\frac{g^T Ax}{g^T b} \end{array} \right\}.$$

W przypadku drugim $x(\cdot, x_0)$ spełnia układ liniowy

$$\dot{x} = \left[A - \frac{1}{g^T b} b g^T A \right] x.$$

Pierwszy przypadek prowadzi do układu

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = 0 \\ g^T A^2 x + g^T A b F(c^T x) \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

Znowu możliwe są dwa przypadki – albo

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = g^T A b = 0 \\ g^T A^2 x \equiv 0 \end{array} \right\},$$

albo

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = 0, \quad g^T A b \neq 0 \\ F(c^T x) \equiv -\frac{g^T A^2 x}{g^T A b} \end{array} \right\}.$$

W przypadku drugim $x(\cdot, x_0)$ spełnia układ liniowy

$$\dot{x} = \left[A - \frac{1}{g^T A b} b g^T A^2 \right] x.$$

Pierwszy przypadek prowadzi do układu

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = g^T A b = 0 \\ g^T A^3 x + g^T A^2 b F(c^T x) \equiv 0 \end{array} \right\} .$$

Znowu możliwe są dwa przypadki – albo

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = g^T A b = g^T A^2 b = 0 \\ g^T A^3 x \equiv 0 \end{array} \right\} ,$$

albo

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = g^T A b = 0, \quad g^T A^2 b \neq 0 \\ F(c^T x) = -\frac{g^T A^3 x}{g^T A^2 b} \end{array} \right\} .$$

Druga z tych możliwości prowadzi do układu liniowego

$$\dot{x} = \left[A - \frac{1}{g^T A^2 b} b g^T A^3 \right] x ,$$

a pierwsza do układu

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = g^T A b = g^T A^2 b = 0 \\ g^T A^4 x + g^T A^3 b F(c^T x) = 0 \end{array} \right\} .$$

Przeprowadzona wyżej dyskusja może być kontynuowana – w n -tym kroku otrzymamy alternatywę

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = g^T A b = g^T A^2 b = \dots = g^T A^{n-1} b = 0 \\ g^T A^n x \equiv 0 \end{array} \right\}$$

lub

$$\left\{ \begin{array}{l} g^T b = 0 = g^T A b = \dots = g^T A^{n-2} b, \quad g^T A^{n-1} b \neq 0 \\ F(c^T x) = -\frac{g^T A^n x}{g^T A^{n-1} b} \end{array} \right\} .$$

W przypadku pierwszym mamy

$$g^T [b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b] = 0^T ,$$

skąd wobec założonej sterowalności pary (A, b) otrzymujemy $g = 0$, co jest sprzeczne z warunkiem (2.52). Zachodzi zatem druga możliwość, co oznacza, że $x(\cdot, x_0)$ spełnia układ liniowy

$$\dot{x} = \left[A - \frac{1}{g^T A^{n-1} b} b g^T A^n \right] x .$$

2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

Reasumując przeprowadzoną w punkcie 1^o dyskusję stwierdzamy, że istnieje $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $x(\cdot, x_0)$ spełnia układ liniowy

$$\dot{x} = \left[A - \frac{1}{g^T A^{k-1} b} b g^T A^k \right] x \quad (2.56)$$

2^o. $c^T b \neq 0$. Wtedy $\{x \in \mathcal{P} : \dot{V}(x) = 0\} = \left\{ x \in \mathcal{P} : F(c^T x) = -\frac{g^T x}{\sqrt{-c^T b}} \right\}$.

Rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ musi więc spełniać układ liniowy

$$\dot{x} = \left[A - \frac{1}{\sqrt{-c^T b}} b g^T \right] x \quad (2.57)$$

Ponieważ założono, że rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ ma być określone na \mathbb{R} i ograniczone, więc jest ono rozwiązaniem prawie-okresowym układu (2.56), gdy $c^T b = 0$ lub układu (2.57), gdy $c^T b \neq 0$, a więc ma postać

$$x(t, x_0) = \sum_{k=-N}^N e^{j\omega_k t} v_k \quad (2.58)$$

gdzie $\overline{v_k} = v_{-k}$ oznacza wektor własny macierzy stanu układu (2.56) lub (2.57), w zależności od wartości $c^T b$, odpowiadający wartości własnej $j\omega_k$, $\omega_{-k} = -\omega_k$. Podstawą do otrzymania (2.56) i (2.57) było zauważenie, że $F(c^T x(t, x_0))$ tworzy liniową kombinację składowych wektora $x(t, x_0)$, a zatem

$$F(c^T x(t, x_0)) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j\omega_k t}, \quad \overline{a_k} = a_{-k} \quad (2.59)$$

Wstawiając wyrażenia (2.58), (2.59) do układu (2.39) i przyrównując do siebie współczynniki stojące przy $e^{j\omega_k t}$ w lewej i prawej stronie, otrzymamy równanie

$$(j\omega_k I - A)v_k = a_k b \quad \forall k \quad (2.60)$$

Z własności funkcji prawie-okresowych [71, str. 25 - 30], faktu, że $x(\cdot, x_0)$ jest zlokalizowane w \mathcal{P} i (2.53) wynika nierówność

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c^T x(t, x_0) F[c^T x(t, x_0)] dt = \sum_{k=-N}^N c^T v_k \overline{a_k} \quad (2.61)$$

przy czym równość ma miejsce tylko wtedy, gdy $c^T x(t, x_0) \equiv 0$, równoważnie, $a_k = 0$ dla dowolnego k . Przypuśćmy, że

$$K := \{k : a_k \neq 0\} \neq \emptyset \quad (2.62)$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Ten zbiór indeksów musi mieć następującą własność

$$\forall k \in K : j\omega_k \notin \lambda(A) \quad (2.63)$$

Istotnie, w przeciwnym wypadku istniałoby $k_0 \in K$ takie, że

$$\det(A - j\omega_{k_0}I) = 0, \quad c^T \operatorname{adj}(A - j\omega_{k_0}I)b = 0 ,$$

przy czym ostatnią równość otrzymujemy przez lewostronne przemnożenie (2.60) przez $c^T \operatorname{adj}(A - j\omega_{k_0}I)$. Oznacza to, że $(s - j\omega_{k_0})$ jest wspólnym czynnikiem licznika i mianownika transmitancji $G(s)$, co, na podstawie twierdzenia Popova [128, str. 534 - 535], [40, str. 48], daje sprzeczność z obserwowalnością i sterowalnością. Z (2.63) i (2.60) otrzymujemy $c^T v_k = -a_k G(j\omega_k)$ dla wszystkich $k \in K$. Podstawiając tę zależność do (2.61) otrzymamy nierówność

$$0 < - \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 G(j\omega_k) .$$

Z tej nierówności wynika następujący fakt

$$\exists k^* \in K : \operatorname{Re} G(j\omega_{k^*}) < 0 \quad (2.64)$$

Z drugiej strony z (2.49) wynika, na podstawie kryterium Nyquista, zastosowanego do układu liniowego powstającego z (2.39) przez podstawienie $F(c^T x) = \mu c^T x$, $\mu > 0$, że

$$\{G(j\omega) \in \mathbb{C} : \omega \in [0, \infty)\} \cap (-\infty, 0) = \emptyset \quad (2.65)$$

Jeżeli $k^* = 0$, równoważnie, $\omega_{k^*} = 0$ to na mocy (2.63): $0 \notin \lambda(A)$. Zatem A jest odwracalna i z (2.64) otrzymujemy

$$G(0) = c^T A^{-1}b = \operatorname{Re} G(0) < 0 ,$$

co jest sprzeczne z (2.65).

Jeżeli $k^* \neq 0$, równoważnie, $\omega_{k^*} \neq 0$ to odwołujemy się do tożsamości

$$\det(A + bd^T - sI) = \det(A - sI) [1 + d^T (A - sI)^{-1}b], \quad d \in \mathbb{R}^n .$$

Podstawiając w tej tożsamości $s = j\omega_{k^*}$ oraz

$$d = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{-c^T b}}g, & \text{gdy } c^T b \neq 0 \\ -\frac{1}{g^T A^{k-1}b} (A^k)^T g, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, & \text{gdy } c^T b = 0 \end{cases}$$

i uwzględniając (2.63) otrzymamy

2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{-c^T b} - g^T (A - j\omega_{k^*} I)^{-1} b = 0, & \text{gdy } c^T b \neq 0 \\ g^T A^{k-1} b - g^T A^k (A - j\omega_{k^*} I)^{-1} b = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, & \text{gdy } c^T b = 0 \end{array} \right\} .$$

W drugim przypadku kolejne użycia tożsamości (2.21) i równości $g^T b = g^T A b = \dots = g^T A^{k-2} b = 0$ dają

$$(j\omega_{k^*})^k g^T (A - j\omega_{k^*} I)^{-1} b = 0 .$$

Zatem w obu przypadkach mamy

$$\sqrt{-c^T b} - g^T (A - j\omega_{k^*} I)^{-1} b = 0 .$$

Wykorzystując rozumowanie użyte w dowodzie lematu Kalmana dla wykazania, że nierówność (2.10) jest konieczna dla rozwiązalności systemu (2.9) z podstawieniem $\gamma = -c^T b$, $h = \frac{1}{2} A^T c$, otrzymamy

$$\sqrt{-c^T b} + \operatorname{Re} c^T A (A - j\omega_{k^*} I)^{-1} b = 0 .$$

Kolejne użycie tożsamości (2.21) oraz uwzględnienie wzoru (2.40) daje

$$\operatorname{Re} j\omega_{k^*} G(j\omega_{k^*}) = -\omega_{k^*} \operatorname{Im} G(j\omega_{k^*}) = 0 ,$$

a ponieważ $\omega_{k^*} \neq 0$ więc pokazaliśmy, że

$$\operatorname{Re} G(j\omega_{k^*}) < 0, \quad \operatorname{Im} G(j\omega_{k^*}) = 0 ,$$

co jest sprzeczne z (2.65). Na mocy rozumowania dowodowego nie wprost, wnosimy, że nieprawdą jest, że zachodzi (2.62). Tak więc $a_k = 0$ dla dowolnego k , równoważnie, $c^T x(t, x_0) \equiv 0$. Rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ musi więc spełniać układ $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ c^T x = 0 \end{cases}$, skąd otrzymujemy $c^T e^{tA} x_0 \equiv 0$. Wobec założenia obserwowalności jest to możliwe tylko wtedy, gdy $x_0 = 0$, co z kolei daje $x(t, x_0) \equiv 0$, a więc ma miejsce własność (c).

Ad (d). Pokażemy najpierw, że

$$H + \frac{\mu}{2} c c^T > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad (2.66)$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie $A_\mu := A + \mu b c^T$, $\mu > 0$. Z założenia obserwowalności pary (A, c^T) wynika [2, Twierdzenie 3.3.7, str. 91] obserwowalność pary (A_μ, c^T) , a ponieważ $\det A_\mu \neq 0$ (wniosek z (2.49)) więc także

$$\text{para } (A_\mu, c^T A_\mu) \text{ jest obserwowalna} \quad (2.67)$$

Zauważmy, że para $(H + \frac{\mu}{2} c c^T, g + \mu \sqrt{-c^T b} c)$ jest rozwiązaniem układu równań

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu^T X + X A_\mu = -hh^T \\ Xb + \frac{1}{2}A_\mu^T c = -\sqrt{-c^T b}h \end{array} \right\}$$

względem (X, h) , $X = X^T$ i przy tym na podstawie (2.49) i znanych własności macierzonego równania Lapunowa $H + \frac{\mu}{2}cc^T \geq 0$ ($\mu > 0$). Z (2.67) i Lematu 2.4.6 wynika teraz (2.66).

Niech $x \in \overline{\mathcal{P}} \setminus \{0\}$.

1°. $c^T x = 0$. $V(x) = x^T H x = x^T \left[H + \frac{\mu}{2}cc^T \right] x > 0$.

2°. $c^T x \neq 0$, $c^T x \in [\sigma_1, \sigma_2]$. Bierzemy

$$\mu := \frac{2}{x^T cc^T x} \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma$$

i wobec ciągłości F oraz (2.53) mamy $\mu > 0$. Teraz

$$0 < x^T \left[H + \frac{\mu}{2}cc^T \right] x = x^T H x + \frac{2}{x^T cc^T x} x^T cc^T x \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma = V(x) .$$

Korzystając z ciągłości V i równości $V(0) = 0$ otrzymamy (d).

Ad (e). Powtarzamy dowód własności (e) wypisanej w dowodzie Twierdzenia 2.5.1, z podstawieniem $q = 1$.

Z Twierdzenia 2.3.2, którego założenia są spełnione, na mocy (a) ÷ (e) wynika, że $x \equiv 0$ jest **AS** trywialnym rozwiązaniem układu (2.39), a zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 \leq c^T x \leq \sigma_2, V(x) < l\}$ jest podzbiorem obszaru atrakcji tego rozwiązania, l jest dowolną liczbą z przedziału $(0, \eta)$. Po mnogościowym zsumowaniu tych zbiorów po $l \in (0, \eta)$ otrzymamy tezę Twierdzenia 2.5.2. \square

Wzmacniając Warunki (2.41) i (2.53) można Twierdzenia 2.5.1 i 2.5.2 przekształcić w warunki wystarczające **GAS** stabilności rozwiązania zerowego. Stanowi to treść dwu kolejnych twierdzeń.

Twierdzenie 2.5.3. Przypuśćmy, że para (A, c^T) jest obserwowalna. Niech $k \in (0, \infty]$ będzie takie, że:

(i)

$$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k \quad \forall \sigma \neq 0, \quad F(0) = 0 \quad (2.68)$$

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i na tyle regularną, że rozwiązania (2.39) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^n ,

(ii) spełniony jest warunek (2.42),

2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

(iii) istnieje $q \in \mathbb{R}$ takie, że (2.43) zachodzi i układ rozwiązujących równań Lurie (2.44) posiada rozwiązanie (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $g \in \mathbb{R}^n$,

(iv) zachodzą implikacje:

$$q < 0, \quad \det \left(H + \frac{kq}{2} cc^T \right) = 0 \implies \lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma^2}{c^T H^{-1} c} + q \int_0^\sigma f(\xi) d\xi \right] = \infty \quad (2.69)$$

$$q > 0, \quad \det H = 0 \implies \lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma F(\xi) d\xi = \infty \quad (2.70)$$

Wtedy zerowy punkt równowagi systemu (2.39) jest **GAS**.

Dowód. Funkcjonał

$$V(x) = x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma$$

jest poprawnie określony. Wykażemy, że posiada on następujące własności:

- (a) jest klasy C^1 na \mathbb{R}^n ,
- (b) $\dot{V}(x) \leq 0$ na \mathbb{R}^n ,
- (c) jedynym rozwiązaniem (2.39) określonym na \mathbb{R} i pozostającym w zbiorze $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ jest $x \equiv 0$,
- (d) jest dodatnio-określony na \mathbb{R}^n ,
- (e) $l_0 = \infty$, l_0 – liczba zdefiniowana w Lemacie 2.3.1.

Dowody pierwszych czterech z tych własności nie różnią się niczym od dowodów analogicznych własności w Twierdzeniu 2.5.1, z podstawieniem $\sigma_1 = -\infty$, $\sigma_2 = \infty$, $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n = \overline{\mathcal{P}}$.

Ad (e).

1°. $q < 0$. Zauważmy, że musi być $k < \infty$. Istotnie, gdyby $k = \infty$ to biorąc $F(\sigma) = \sigma^3$ i analizując $V(x)$ na kierunku wektora c łatwo dochodzimy do sprzeczności z własnością (d). W dowodzie własności (d) otrzymuje się (porównaj dowód Twierdzenia 2.5.1)

$$H + \frac{q\mu}{2} cc^T > 0 \quad \forall \mu \in (0, k) \quad (2.71)$$

skąd

$$H + \frac{kq}{2} cc^T \geq 0 \quad (2.72)$$

Jeśli $\det \left(H + \frac{kq}{2} cc^T \right) \neq 0$, to na mocy (2.72), $H + \frac{kq}{2} cc^T > 0$. Z drugiej strony, dzięki (2.68)

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$V(x) = x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma \geq x^T \left[H + \frac{kq}{2} c c^T \right] x$$

więc $l_0 = \infty$ na mocy rezultatu [44, Twierdzenie 1, str. 150]. Jeżeli

$$\det \left(H + \frac{kq}{2} c c^T \right) = 0$$

to dla funkcji $\mathcal{F}(l)$ opisanej w dowodzie Twierdzenia 2.5.1 mamy na mocy (2.69) $\lim_{|l| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(l) = \infty$, skąd wobec definicji i własności $\mathcal{F}(l)$ otrzymujemy $l_0 = \infty$ (z (2.72) wynika, że $H > 0$).

2°. $q = 0$. Wtedy $V(x) = x^T H x > 0$ dla wszystkich $x \neq 0$, więc $l_0 = \infty$.

3°. $q > 0$. Z (2.71) wynika, że $H \geq 0$. Jeżeli $\det H \neq 0$ to

$$V(x) = x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma \geq x^T H x ,$$

a zatem $l_0 = \infty$ na mocy rezultatu [44, Twierdzenie 1, str. 150]. Jeśli $\det H = 0$ to dla funkcji $\mathcal{F}(l)$ opisanej w dowodzie Twierdzenia 2.5.1 mamy, na mocy (2.70) $\lim_{|l| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(l) = \infty$.

Stąd wobec definicji i własności \mathcal{F} mamy: $l_0 = \infty$. Z Uwagi 2.3.3, której założenia są spełnione na mocy (a) ÷ (e), wynika teza Twierdzenia 2.5.3. \square

Przy weryfikacji implikacji (2.69) użyteczne są warunki dostateczne zachodzenia nierówności $\det \left(H + \frac{kq}{2} c c^T \right) \neq 0$ przy $q < 0$. Niech $A_k := A + k b c^T$. Jeżeli wszystkie rozwiązania (X, h) , $X \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $X = X^T$, $h \in \mathbb{R}^n$ układu

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k^T X + X A_k = -h h^T \\ X b + \frac{q}{2} A_k^T c - \frac{1}{2} c = -\sqrt{\frac{1}{k} - q c^T b h} \end{array} \right\} \quad (2.73)$$

spełniają warunek $X > 0$, to $H + \frac{kq}{2} c c^T > 0$, bo para $\left(H + \frac{kq}{2} c c^T, g + k \sqrt{\frac{1}{k} - q c^T b c} \right)$ jest rozwiązaniem systemu (2.73).

Uwaga 2.5.4. Jeżeli para (A, b) jest sterowalna oraz

$$\operatorname{Re} \lambda(A + k b c^T) < 0, \quad \frac{1}{q} \notin \lambda(A + k b c^T)$$

to implikacja (2.69) jest pusto spełniona (wtedy $H + \frac{kq}{2} c c^T > 0$).

2.5. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI UKŁADU LURIE

Dowód. Ze sterowalności pary (A, b) wynika, na podstawie rezultatu [2, Twierdzenie 3.3.2, str. 85], sterowalność pary (A_k, b) , $A_k = A + kbc^T$. Wobec $\operatorname{Re} \lambda(A_k) < 0$, obserwowalność pary $(A_k, \frac{q}{2}c^T A_k - \frac{1}{2}c^T)$ jest, na mocy Lematu 2.4.6, warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wszystkie rozwiązania (2.73) były takie, że $X > 0$. To jednak zachodzi dzięki założeniu $\frac{1}{q} \notin \lambda(A_k)$. Poprzednio już zauważyliśmy, że powyższe fakty implikują dodatnią-określoność macierzy $H + \frac{kq}{2}cc^T$. \square

Twierdzenie 2.5.5. Niech para (A, b) będzie sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Przyjmijmy, że:

- (i) spełnione są warunki (2.49), (2.50),
- (ii) układ rozwiązujących równań Lurie (2.51) posiada rozwiązanie (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $g \in \mathbb{R}^n$ spełniające warunek (2.52),
- (iii) funkcja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i na tyle regularna, że rozwiązania systemu (2.39) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^n oraz

$$0 < \sigma F(\sigma) \quad \forall \sigma \neq 0, \quad F(0) = 0,$$

- (iv) zachodzi implikacja

$$\det H = 0 \implies \lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma F(\xi) d\xi = \infty \quad (2.74)$$

Wtedy zerowy punkt równowagi układu (2.39) jest **GAS**.

Dowód. Funkcjonał

$$V(x) = x^T H x + \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma$$

jest na mocy założeń poprawnie określony. Posiada on następujące własności:

- (a) jest klasy C^1 na \mathbb{R}^n ,
- (b) $\dot{V}(x) \leq 0$ na \mathbb{R}^n ,
- (c) dla dowolnych $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ jedynym rozwiązaniem (2.39) określonym na \mathbb{R} , ograniczonym i zlokalizowanym w zbiorze $\{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 < c^T x < \sigma_2, \dot{V}(x) = 0\}$ jest $x \equiv 0$,
- (d) V jest dodatnio-określony na \mathbb{R}^n ,
- (e) $l_0 = \infty$, gdzie l_0 jest liczbą opisaną w Lemacie 2.3.1.

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Uwzględniając, że zamiast (2.53) zachodzi (2.63), dowody własności **(a)** ÷ **(d)** podanych w dowodzie Twierdzenia 2.5.2 stają się dowodami własności **(a)** ÷ **(d)**.

Ad **(e)**. W dowodzie **(d)** wykazuje się, że $H + \frac{\mu}{2}cc^T > 0$ dla wszystkich $\mu > 0$, skąd $H \geq 0$.

1°. $\det H \neq 0$. Wtedy $H > 0$, $V(x) \geq x^T H x$ i mamy $l_0 = \infty$.

2°. $\det H = 0$. Wtedy dla funkcji $\mathcal{F}(l)$ opisanej w Twierdzeniu 2.5.1 (z $q = 1$) mamy na mocy (2.74): $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\sigma) = \infty$, co zgodnie z definicją i własnościami \mathcal{F} oznacza, że $l_0 = \infty$.

Z Uwagi 2.3.3, której założenia są spełnione dzięki własnościom **(a)** ÷ **(e)**, wynika teza Twierdzenia 2.5.5. \square

Cytowane niżej twierdzenie jest uogólnieniem Twierdzeń 2.5.1, 2.5.3 w innym kierunku niż Twierdzenia 2.5.2 i 2.5.5.

Twierdzenie 2.5.6. Niech $k \in (0, \infty]$ będzie takie, że:

(i) istnieją $\sigma_1 \in (-\infty, 0)$, $\sigma_2 \in (0, \infty)$ takie, że

$$0 \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k \quad \forall \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2) \setminus \{0\}, \quad F(0) = 0 \quad (2.75)$$

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i na tyle regularną, że rozwiązania układu (2.39) generują LCSDS na \mathbb{R}^n ,

(ii) spełniony jest warunek

$$\operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu \in [0, k] \quad (2.76)$$

(iii) istnieje $q \in \mathbb{R}$ takie, że (2.43) zachodzi i układ rozwiązujących równań Lurie (2.44) posiada rozwiązanie (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$, $g \in \mathbb{R}^n$.

Wtedy zerowy punkt równowagi układu (2.39) jest **AS**. Zbiór

$$\begin{aligned} \Omega_A = & \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 \leq c^T x \leq \sigma_2, \quad x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma < \right. \\ & \left. < \min_{i=1,2} \left[\frac{\sigma_i^2}{c^T H^{-1} c} + q \int_0^{\sigma_i} F(\sigma) d\sigma \right] \right\} \end{aligned}$$

jest podzbiorem obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi. Więcej, jeżeli zamiast **(i)** przyjąć mocniejsze założenie:

$$0 \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k \quad \forall \sigma \neq 0, \quad F(0) = 0,$$

2.6. WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TWIERDZEŃ Z ROZDZIAŁU 2.5

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i na tyle regularną, że rozwiązania układu (2.39) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^n oraz dodatkowo założyć, że zachodzą implikacje (2.69), (2.70) to wtedy zerowy punkt równowagi układu (2.39) jest **GAS**.

Dowód. Dowód polega na wykazaniu własności wypisanych w dowodzie Twierdzenia 2.5.1, ewentualnie 2.5.3. Poza własnością (c) dokonuje się tego analogicznie jak w dowodach wymienionych twierdzeń. Pozostaje wykazać własność (c). Niech

$$x_0 \in \{x \in \mathcal{P} : \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{P} : F(c^T x) = 0, g^T x = 0\}$$

oraz $x(\cdot, x_0)$ jest rozwiązaniem określonym na \mathbb{R} i pozostającym w tym zbiorze.

Rozwiązanie to spełnia układ $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ g^T x = 0 \end{cases}$. Stąd $g^T e^{tA} x_0 \equiv 0$. Wobec założenia (2.76)

$$H = \int_0^\infty e^{tA^T} g g^T e^{tA} dt = H^T > 0,$$

a zatem $x_0^T H x_0 = 0$, co ma miejsce tylko wtedy, gdy $x_0 = 0$. W konsekwencji $x(t, x_0) \equiv 0$, a więc prawdziwa jest własność (c). \square

2.6. WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TWIERDZEŃ Z ROZDZIAŁU 2.5

2.6.1. Równoczesna dekompozycja równań stanu i układów Lurie

Założmy, że $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$, para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Można skonstruować nieosobliwą macierz T , taką, że transformacja $x = Tz$ sprowadza układ (2.39) do postaci

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{b}F(\sigma) \\ \sigma = \bar{c}^T z \end{cases} \quad (2.77)$$

przy czym

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, & \bar{b} &= T^{-1}b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, & \bar{c} &= T^T c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$\operatorname{Re} \lambda(A_1) < 0$, $A_1 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, m jest liczbą wartości własnych A w lewej, otwartej półpłaszczyźnie, $\operatorname{Re} \lambda(A_2) = 0$, $A_2 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{n-m})$ jest jordanowską macierzą odpowiadającą widmu A na osi urojonej. Część liniową układu (2.77),

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{b}u \\ \sigma = \bar{c}^T z \end{cases}$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

można zinterpretować jako *równoległe* połączenie układów

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = A_1 z_1 + b_1 u \\ \sigma_1 = c_1^T z_1 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_2 = A_2 z_2 + b_2 u \\ \sigma_2 = c_2^T z_2 \end{array} \right\},$$

przy czym

$$\begin{aligned} (A_1, b_1), (A_2, b_2) & \text{ - pary sterowalne,} \\ (A_1, c_1^T), (A_2, c_2^T) & \text{ - pary obserwowalne,} \\ G_1(s) = c_1^T (A_1 - sI)^{-1} b, & \quad G_2(s) = c_2^T (A_2 - sI)^{-1} b, \\ G(s) = c^T (A - sI)^{-1} b = G_1(s) + G_2(s) & . \end{aligned}$$

Uwzględniając (2.78) w (2.44) otrzymamy równoważną postać układu (2.44)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{A}^T \overline{H} + \overline{H} \overline{A} = -\overline{g} \overline{g}^T \\ \overline{H} \overline{b} + \frac{q}{2} \overline{A}^T \overline{c} + \frac{1}{2} \overline{c} = -\sqrt{\frac{1}{k} - q \overline{c}^T \overline{b} \overline{g}} \end{array} \right\} \quad (2.79)$$

gdzie

$$\overline{H} = T^T H T = \begin{bmatrix} H_1 & H_{12} \\ H_{12}^T & H_2 \end{bmatrix}, \quad \overline{g} = T^T g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} .$$

Pierwsze równanie układu (2.79) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} A_1^T H_1 + H_1 A_1 & A_1^T H_{12} + H_{12} A_2 \\ A_2^T H_{12} + H_{12}^T A_1 & A_2^T H_2 + H_2 A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 g_1^T & -g_1 g_2^T \\ -g_2 g_1^T & -g_2 g_2^T \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Z faktu, że A_2 jest rzeczywistą macierzą Jordana wynika, że H_2 jest macierzą diagonalną oraz $g_2 = 0$. Uwzględniając to w (2.80), otrzymujemy równanie

$$A_1^T H_{12} + H_{12} A_2 = 0 ,$$

które jest równoważne równaniu

$$\{A_1^T \otimes I_{n-m} + I_m \otimes A_2^T\} \text{col} H_{12} = 0 \in \mathbb{R}^{m(n-m)} ,$$

gdzie \otimes oznacza iloczyn Kroneckera (tensorowy) macierzy [72, str. 239 - 240]. Macierz w nawiasach klamrowych jest nieosobliwa, co wynika z rozumowania podanego w [72, str. 240], stąd $H_{12} = 0$. Teraz z (2.80) wynika, że proponowana transformacja dekomponuje układ (2.44) na dwa podukłady

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^T H_1 + H_1 A_1 = -g_1 g_1^T \\ H_1 b_1 + \frac{q}{2} A_1^T c_1 + \frac{1}{2} c_1 = -\sqrt{\frac{1}{k} - q c_1^T b_1 g_1} \end{array} \right\} \quad (2.81)$$

2.6. WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TWIERDZEŃ Z ROZDZIAŁU 2.5

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2^T H_2 + H_2 A_2 = 0 \\ H_2 b_2 + \frac{q}{2} A_2^T c_2 + \frac{1}{2} c_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.82)$$

W (2.81) przyjęto $\bar{c}^T \bar{b} = c^T b$, gdyż wyrażenie to jest niezmiennicze względem transformacji dyktowanej macierzą T .

2.6.2. Weryfikacja głównych założeń Twierdzeń 2.5.1 i 2.5.3

Udowodnimy najpierw poniższy lemat.

Lemat 2.6.1. Jeżeli para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby były spełnione założenia (2.42) ÷ (2.44) Twierdzenia 2.5.1 jest, aby

$$\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0 \quad (2.83)$$

była spełniona nierówność Popova

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, j\omega \notin \lambda(A) \quad (2.84)$$

oraz zachodziła implikacja

$$j\alpha \in \lambda(A) \implies \left\{ \begin{array}{l} j\alpha \text{ jest pojedynczą wartością własną } A \\ \operatorname{Res}_{s=j\alpha} (1 + qs)G(s) > 0 \end{array} \right\} \quad (2.85)$$

W dowodzie wykorzystamy graficzną interpretację nierówności Popova (2.84) zawartą w poniższej uwadze.

Uwaga 2.6.2. Funkcje: $\omega \mapsto \operatorname{Re} G(j\omega)$, $\omega \mapsto \omega \operatorname{Im} G(j\omega)$ są parzyste i zachodzi tożsamość

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G(j\omega) \equiv \frac{1}{k} + \operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) ,$$

a zatem weryfikacji nierówności (2.84) wystarczy dokonywać dla $\omega \geq 0$. W układzie współrzędnych (X, Y) nierówność $\frac{1}{k} + X - qY \geq 0$ przedstawia domkniętą półpłaszczyznę. Zatem (2.84) oznacza, że plot zmodyfikowanej transmitancji widmowej $G^*(j\omega)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = \operatorname{Re} G^*(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) \\ Y(\omega) = \operatorname{Im} G^*(j\omega) = \omega \operatorname{Im} G(j\omega) \end{array} \right\}, \quad \omega \geq 0 \quad (2.86)$$

jest zlokalizowany w tej półpłaszczyźnie.

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Dowód. Warunek dostateczny. Z Uwagi 2.6.2 wynika, że plot $G(j\omega)$ leży na prawo od przedziału $(-\infty, \frac{1}{\mu}]$ na osi rzeczywistej, o ile $\mu \in (0, k)$. Teraz, na podstawie kryterium Nyquista zastosowanego do układu $\dot{x} = (A + \mu bc^T)x$, z (2.83) i (2.85) wynika związek (2.42). *Warunki residualne* (2.85) gwarantują, aby uzupełnienie plotu $G(j\omega)$ torem na $\{\infty\}$ było takie, że kompletny plot Nyquista leży na prawo od punktu $(-1/\mu, 0)$ dla dowolnego $\mu \in (0, k)$.

W otoczeniu $\{\infty\}$ funkcja $s \mapsto \frac{1}{k} + (1 + qs)G(s)$ jest ciągła, a na $\{\infty\}$ przyjmuje wartość $\frac{1}{k} - qc^T b$. Ostatni fakt wynika z przedstawienia

$$G(s) = c^T (A - sI)^{-1} b = -\frac{1}{s} \left[c^T b + \frac{1}{s} c^T A b + \frac{1}{s} c^T A^2 b + \dots \right],$$

ważnego dla $|s| > r(A)$, gdzie $r(A)$ oznacza promień spektralny macierzy A . Przedstawienie to jest konsekwencją rozwinięcia rezolwenty $(sI - A)^{-1}$ w szereg geometryczny. Stąd i z (2.84) wynika nierówność (2.43).

Z (2.82) i założeń wynika, że układowi (2.44) można nadać postać (2.81), (2.82), co zostało wyjaśnione w poprzednim podrozdziale. Dzięki (2.85) wartości własne A_2 są pojedyncze, a ponadto

$$\operatorname{Res}_{s=j\alpha} (1 + qs)G(s) = \operatorname{Res}_{s=j\alpha} (1 + qs)G_2(s) > 0.$$

Ponieważ dla dowolnego $q \in \mathbb{R}$ mamy $-\frac{1}{q} \notin \lambda(A_2)$ więc para $(A_2, \frac{q}{2}c_2^T A_2 + \frac{1}{2}c_2^T)$ jest obserwowalna. Z Lematu 2.4.7 wynika teraz, że układ (2.82) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $H_2 > 0$.

Powtarzając rozumowanie dowodowe Lematu 2.4.6 wykazujące, że nierówność (2.10) jest warunkiem koniecznym rozwiązalności systemu (2.9), ustalamy, że

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(c_2^T + qc_2^T A_2) (A_2 - j\omega I)^{-1} b_2] &= \\ &= qc_2^T b_2 + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G_2(j\omega) \equiv 0 \quad \forall \omega \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Związek (2.87) można także wydedukować z dowodu Lematu 2.4.7. Teraz mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G(j\omega) &= \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G_1(j\omega) - qc_2^T b_2 = \\ &= \frac{1}{k} - q(c^T b - c_1^T b_1) + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G_1(j\omega), \end{aligned}$$

skąd na mocy (2.84) i ciągłości funkcji $(1 + qs)G(s)$ na osi urojonej

$$\frac{1}{k} - q(c^T b - c_1^T b_1) + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G_1(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.88)$$

2.6. WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TWIERDZEŃ Z ROZDZIAŁU 2.5

Ponieważ zachodzi (2.43), $\operatorname{Re} \lambda(A_1) < 0$, para (A, b) jest sterowalna, a dla układu (2.81) nierówność (2.88) jest, na mocy (2.30), równoważna nierówności (2.10), więc na podstawie Lematu 2.4.6, układ (2.81) posiada rozwiązanie względem pary (H_1, g_1) , $H_1 \geq 0$. Oznacza to, że układ (2.44) posiada rozwiązanie (H, g) , $H \geq 0$.

Warunek konieczny. Dokonując w (2.42) przejścia granicznego $\mu \rightarrow \infty$ otrzymamy (2.83).

Nierówność Popova (2.84) wyprowadza się w sposób analogiczny jak w dowodzie Lematu 2.4.6 jako warunku koniecznego.

Wobec (2.42) macierz $H + \frac{\mu q}{2} cc^T$ jest dla każdego $\mu \in (0, k)$ jedynym rozwiązaniem równania

$$(A^T + \mu cb^T)X + X(A + \mu bc^T) = -hh^T - \varepsilon cc^T, \quad (2.85)$$

gdzie $h = g + \sqrt{\frac{1}{k} - qc^T b \mu c}$, $\varepsilon = \mu - \frac{\mu^2}{k} > 0$. Teraz, dzięki obserwowalności pary (A, c^T) , z Twierdzenia 2.4.2 dostajemy $H + \frac{\mu q}{2} cc^T > 0$. Przez dokonanie przejścia granicznego $\mu \rightarrow 0$ otrzymuje się $H \geq 0$. Z dekompozycji zaprezentowanej w poprzednim podrozdziale i Lematu 2.4.7 wynika implikacja (2.85). \square

Uwaga 2.6.3. Jeżeli są spełnione założenia Twierdzenia 2.5.1 za wyjątkiem (2.41) oraz dodatkowo para (A, b) jest sterowalna to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wszystkie rozwiązania układu (2.44) były takie, że $H > 0$ jest, aby

$$-\frac{1}{q} \notin \lambda(A) \quad (2.89)$$

Dowód. Istotnie, wobec $\operatorname{Re} \lambda(A_1) < 0$ wszystkie rozwiązania (2.44) są takie, że $H_1 \geq 0$. Z drugiej strony z Lematu 2.4.7 wynika, że wszystkie one są takie, że $H_1 > 0$, równoważnie $H > 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy para $(A_1, \frac{q}{2} c_1^T A_1 + \frac{1}{2} c_1^T)$ jest obserwowalna, co wobec założonej obserwowalności (A_1, c_1^T) ma miejsce, gdy $-\frac{1}{q} \notin \lambda(A_1)$. Z dowodu Lematu 2.6.1 jako warunku wystarczającego wynika, że jest to równoważne warunkowi (2.89). \square

W przypadku sterowalności pary (A, b) i obserwowalności pary (A, c^T) Lemat 2.6.1 i Uwaga 2.6.3 dają warunki konieczne i dostateczne spełnienia założeń Twierdzenia 2.5.6 z pominięciem (2.75).

2.6.3. Równoczesna dekompozycja równań stanu i układu Lurie

W całym podrozdziale przyjmujemy, że $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$, para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna.

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Stosując rozumowanie analogiczne do przytoczonego w rozdziale 2.6.1 ustalamy, że układ (2.51) może być w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych przedstawiony w postaci 3 podukładów

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^T H_1 + H_1 A_1 = -g_1 g_1^T \\ H_1 b_1 + \frac{1}{2} A_1^T c_1 = -\sqrt{-c^T b} g_1 \end{array} \right\} \quad (2.90)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_2^o)^T H_2^o + H_2^o A_2^o = 0 \\ H_2^o b_2^o + \frac{1}{2} (A_2^o)^T c_2^o = 0 \end{array} \right\} \quad (2.91)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_2^\#)^T H_2^\# + H_2^\# A_2^\# = 0 \\ H_2^\# b_2^\# + \frac{1}{2} (A_2^\#)^T c_2^\# = 0 \end{array} \right\} \quad (2.92)$$

przy czym $A_1 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{Re} \lambda(A_1) < 0$, A_2^o jest klatką jordanowską, $A_2^o \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^k)$, $\lambda(A_2^o) = \{0\}$, $A_2^\#$ jest rzeczywistą klatką jordanowską, $A_2^\# \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{n-k-m})$, $\operatorname{Re} \lambda(A_2^\#) = 0$, $\lambda(A_2^\#) \cap \{0\} = \emptyset$, (A_1, b_1) , (A_2^o, b_2^o) , $(A_2^\#, b_2^\#)$ są parami sterowalnymi, (A_1, c_1^T) , $(A_2^o, (c_2^o)^T)$, $(A_2^\#, (c_2^\#)^T)$ są parami obserwowalnymi,

$$\begin{aligned} G_1(s) &= c_1^T (A_1 - sI)^{-1} b_1, & G_2^o(s) &= (c_2^o)^T (A_2^o - sI)^{-1} b_2^o, \\ G_2^\#(s) &= (c_2^\#)^T (A_2^\# - sI)^{-1} b_2^\#, & G(s) &= G_1(s) + G_2^o(s) + G_2^\#(s). \end{aligned}$$

2.6.4. Weryfikacja głównych założeń Twierdzenia 2.5.2

Lemat 2.6.4. Załóżmy, że para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby były spełnione założenia (i), (ii) Twierdzenia 2.5.2 jest aby

$$\operatorname{Re} j\omega G(j\omega) = -\omega \operatorname{Im} G(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) \quad (2.93)$$

$$j\alpha \in \lambda(A), \alpha \neq 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} j\alpha \text{ jest pojedynczą wartością własną } A \\ \operatorname{Res}_{s=j\alpha} sG(s) > 0 \end{array} \right\} \quad (2.94)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in \lambda(A) \implies 0 \text{ wchodzi do jordanowskiej postaci } A \\ \text{klatkami } [0]_{1 \times 1} \text{ lub } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \text{ przy czym w drugim} \\ \text{przypadku dodatkowo spełniona jest nierówność } \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) > 0 \end{array} \right\} \quad (2.95)$$

$$c^T b = 0 \implies \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < 0\} \cap \lambda(A) \neq \emptyset \quad (2.96)$$

2.6. WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TWIERDZEŃ Z ROZDZIAŁU 2.5

Dowód. Warunek wystarczający. W otoczeniu $\{\infty\}$ funkcja $s \mapsto sG(s)$ jest ciągła, a na $\{\infty\}$ przyjmuje wartość $-c^T b$, co wynika z rozwinięcia dla $G(s)$ cytowanego w dowodzie Lematu 2.6.1. Teraz z (2.93) wynika (2.50). Dokonując w (2.49) przejścia granicznego $\mu \rightarrow 0$ otrzymamy $\operatorname{Re} \lambda(A) \geq 0$, a więc system (2.51) może być przedstawiony w postaci opisanej w rozdziale 2.6.3

Z (2.94) wynika, że $A_2^\#$ ma jednokrotne wartości własne oraz

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=j\alpha} (c_2^\#)^T A_2^\# (A_2^\# - sI)^{-1} b_2^\# &= \operatorname{Res}_{s=j\alpha} \left[(c_2^\#)^T b_2^\# + sG_2^\#(s) \right] = \\ &= \operatorname{Res}_{s=j\alpha} sG_2^\#(s) = \operatorname{Res}_{s=j\alpha} sG(s) > 0 . \end{aligned}$$

Para $\left(A_2^\#, \frac{1}{2}(c_2^\#)^T A_2^\# \right)$ jest obserwowalna, co wynika z nieosobliwości $A_2^\#$ i obserwowalnej pary $\left(A_2^\#, \frac{1}{2}(c_2^\#)^T \right)$. Na mocy Lematu 2.4.7 układ (2.92) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $H_2^\# > 0$.

$$A_2^o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \implies \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_2^o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(c_2^o)^T A_2^o (A_2^o - sI)^{-1} b_2^o = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) > 0 .$$

Na mocy Lematu 2.4.8 układ (2.91) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $H_2^o \geq 0$. Stosując rozumowanie podobne do użytego w dowodzie lematu Kalmana dla wykazania, że (2.10) jest warunkiem koniecznym rozwiązalności układu (2.9), ustalamy, że dla $\omega \in \mathbb{R}$, $j\omega \notin \lambda(A)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_2^\#)^T A_2^\# (A_2^\# - j\omega I)^{-1} b_2^\# &= (c_2^\#)^T b_2^\# + \operatorname{Re} j\omega G_2^\#(j\omega) \equiv 0 \\ \operatorname{Re}(c_2^o)^T A_2^o (A_2^o - j\omega I)^{-1} b_2^o &= (c_2^o)^T b_2^o + \operatorname{Re} j\omega G_2^o(j\omega) \equiv 0 . \end{aligned}$$

Weryfikujemy teraz nierówność Kalmana dla układu (2.90)

$$\begin{aligned} -c^T b + c_1^T b_1 + \operatorname{Re} j\omega G_1(j\omega) &= -(c_2^o)^T b_2^o - (c_2^\#)^T b_2^\# + \operatorname{Re} j\omega G(j\omega) - \\ - \operatorname{Re} j\omega G_2^o(j\omega) - \operatorname{Re} j\omega G_2^\#(j\omega) &= \operatorname{Re} j\omega G(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) . \end{aligned}$$

Stąd, dzięki ciągłości funkcji $-c^T b + c_1^T b_1 + sG(s)$ na osi urojonej, mamy

$$-c^T b + c_1^T b_1 + \operatorname{Re} j\omega G_1(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Ponieważ $\det A_1 \neq 0$, para (A_1, c_1^T) jest obserwowalna, więc para $(A_1, c_1^T A_1)$ też jest obserwowalna. Stosując teraz lemat Kalmana ustalamy, że układ (2.90) posiada rozwiązanie względem (H_1, g_1) i przy tym $H_1 > 0$. W ten sposób pokazaliśmy, że układy (2.90) \div (2.92) mają rozwiązania, co dowodzi, że układ (2.51) posiada rozwiązanie (H, g) i przy tym $H \geq 0$. Nietrudno zauważyć, że z faktu, iż (2.90) ma rozwiązanie względem (H_1, g_1) wynika, że $g_1 \neq 0$. W ten sposób (2.96) gwarantuje zachodzenie implikacji $c^T b = 0 \implies g_1 \neq 0 \implies g \neq 0$. Zachodzi zatem (2.52).

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Warunek konieczny. Z dowodu Twierdzenia 2.5.2 wiadomo, że $H + \frac{\mu}{2}cc^T > 0$ dla każdego $\mu > 0$, skąd przez przejście graniczne $\mu \rightarrow 0$ otrzymujemy $H \geq 0$. Tak więc (2.51) ma rozwiązanie względem pary (H, g) tylko takie, że $H \geq 0$.

Z (2.42) wynika $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$, a więc równoważną postacią (2.51) są układy wyjściowe w rozdziale 2.6.3. Z Lematów 2.4.7 i 2.4.8 wynikają teraz implikacje (2.94), (2.95). Warunek (2.93) wynika z rozumowania analogicznego do przedstawionego w dowodzie lematu Kalmana dla wykazania, że (2.10) jest warunkiem koniecznym rozwiązalności układu (2.9).

Fakt, że $g \neq 0$ gdy $c^T b = 0$ jest równoważny temu, że $g_1 \neq 0$, gdy $c^T b = 0$, co wobec tezy, że (2.90) ma tylko takie rozwiązanie (H_1, g_1) , gdy $g_1 \neq 0$, oznacza, że $m \neq 0$ tzn. A posiada wartości własne w $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < 0\}$, a więc zachodzi (2.96). \square

Uwaga 2.6.5. Jeżeli spełnione są założenia Twierdzenia 2.5.2 za wyjątkiem (2.53) to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wszystkie rozwiązania (2.51) były takie, że $H > 0$ jest, aby

$$\det A \neq 0 \quad (2.97)$$

Dowód. Istotnie, przy założeniu (2.97) nie występuje system (2.91), a jak wiadomo systemy (2.90), (2.92) mają rozwiązanie takie, że $H_1 > 0$, $H_2^\# > 0$. \square

2.7. METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ LURIE

2.7.1. Metoda faktoryzacyjno -realizacyjna

Przytoczony dalej algorytm rozwiązywania układów (2.44), ewentualnie (2.51) jest ważny przy założeniach, że (A, b) jest parą sterowalną, (A, c^T) jest parą obserwowalną.

Algorytm 2.7.1.

Krok 1. Niech $\Pi(\omega)$ będzie lewą stroną nierówności Popova (2.84) lub uogólnionej nierówności Popova (2.93). Przedstawmy $\Pi(\omega)$ w postaci sfaktoryzowanej

$$\Pi(\omega) = \frac{\phi(j\omega)}{\det(A - j\omega I)} \cdot \frac{\phi(-j\omega)}{\det(A + j\omega I)} \quad (2.98)$$

przy czym $\phi(s)$ jest takim wielomianem, że

$$\phi(s) = (-1)^n \sqrt{\gamma} s^n + \dots$$

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{k} - qc^T b & \text{w przypadku układu (2.44)} \\ -c^T b & \text{w przypadku układu (2.51)} \end{array} \right\} \quad (2.99)$$

Krok 2. Z tożsamości

$$\sqrt{\gamma} \det(A - sI) - \phi(s) = g^T \operatorname{adj}(A - sI)b \quad (2.100)$$

wyznaczamy wektor $g \in \mathbb{R}$.

Krok 3. Wektor g podstawiamy do układu (2.44), ewentualnie do (2.51). Otrzymany układ rozwiązujemy względem H . Korzystne jest przy tym posłużyć się najpierw drugim, a potem pierwszym równaniem układu (2.44) lub (2.51).

Dowód. Wykażemy poprawność powyższego algorytmu.

Krok 1. Faktu, że $\Pi(\omega)$ daje się sfaktoryzować w opisany sposób, dowodzi się identycznie jak w dowodzie lematu Kalmana jako warunku wystarczającego. W podanym także dowodzie poprawności faktoryzacji nie korzysta się w istotny sposób z założenia $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ i ze sterowalności (A, b) .

Krok 2. Przy ustalonym wielomianie $\phi(s)$ tożsamość (2.100) wyznacza dokładnie jeden wektor $g \in \mathbb{R}^n$. Dowodzimy tego analogicznie jak w lemacie Kalmana jako warunek wystarczający. Korzysta się z założenia o sterowalności pary (A, b) .

Krok 3. Pozostaje pokazać, że układy otrzymane z (2.44) lub (2.51) przez podstawienie do nich wyznaczonego wyżej wektora g mają rozwiązanie względem H . Najłatwiej uzasadnić to w układach współrzędnych, opisanych w rozdziałach 2.6.1 i 2.6.3 – wtedy to (2.100) przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \sqrt{\gamma} \det(A_1 - sI) \det(A_2^o - sI) \det(A_2^\# - sI) - \phi(s) \equiv \\ & \equiv g_1^T \operatorname{adj}(A_1 - sI)b_1 \det(A_1 - sI)b_1 \det(A_2^o - sI) \det(A_2^\# - sI) + \\ & + \left[(g_2^o)^T (A_2^o - sI)b_2^o + (g_2^\#)^T (A_2^\# - sI)^{-1}b_2^\# \right] \det(A_2^o - sI) \det(A_2^\# - sI) \end{aligned} \quad (2.101)$$

W rozdziałach 2.6.1 i 2.6.3 wykazano, że

$$\pi(\omega) = \pi_1(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A),$$

gdzie

$$\pi_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{k} - q(c^T b - c_1^T b_1) + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G_1(j\omega) & \text{dla (2.44)} \\ -c^T b + c_1^T b_1 + \operatorname{Re} j\omega G_1(j\omega) & \text{dla (2.51)} \end{cases}$$

stąd wynika, że

$$\pi_1(\omega) = \frac{\phi_1(j\omega)}{\det(A_1 - j\omega I)} \cdot \frac{\phi_1(-j\omega)}{\det(A_1 + j\omega I)},$$

przy czym wielomiany $\phi_1(s)$, $\phi_2(s)$ są związane zależnością

$$\phi_1(s) = \frac{(-1)^{k+m} \phi(s)}{\det(A_2^o - sI) \det(A_2^\# - sI)},$$

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

przy czym k jest stopniem wielomianu $\det(A_2^o - sI)$, a m oznacza stopień wielomianu $\det(A_2^\# - sI)$. Dzieląc teraz (2.101) stronami przez $\det(A_2^o - sI) \det(A_2^\# - sI)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma} \det(A_1 - sI) - \phi_1(s) &\equiv \\ &\equiv g_1^T \operatorname{adj}(A_1 - sI) b_1 + (g_2^o)^T (A_2^o - sI)^{-1} b_2^o + (g_2^\#)^T (A_2^\# - sI)^{-1} b_2^\# \end{aligned} \quad (2.102)$$

Lewa strona (2.102) jest wielomianem względem s , a prawa strona jest sumą wielomianu i funkcji wymiernych, a więc z faktu, że zachodzi tożsamość, z geometrii widm $A_2^o, A_2^\#$ i całkowitej sterowalności par $(A_2^o, b_2^o), (A_2^\#, b_2^\#)$ wynika, że $g_2^o = 0, g_2^\# = 0$. Z (2.102) otrzymujemy teraz

$$\sqrt{\gamma} \det(A_1 - sI) - \phi_1(s) \equiv g_1^T \operatorname{adj}(A_1 - sI) b_1 .$$

Tożsamość (2.102) wyznacza jednak taki wektor $g_1 \in \mathbb{R}^{n-k-m}$, że po podstawieniu go do układu (2.81) ewentualnie (2.90) otrzymamy układ posiadający rozwiązanie względem H_1 (porównaj z tą częścią dowodu lematu Kalmana, w której dowodzi się, że nierówność (2.10) jest wystarczająca dla rozwiązalności układu (2.9)). Z kolei uwzględniając w (2.90) fakt, że $g_2^o = 0, g_2^\# = 0$ otrzymujemy podukłady (2.82) i (2.92), które jak wiadomo mają rozwiązania względem $H_2^o, H_2^\#$. \square

2.7.2. Uwagi praktyczne

Definicja 2.7.2. Układ Lurie (2.39) nazywamy *absolutnie stabilnym (ABSS)* w sektorze (α, β) , zwanym *sektorem (stożkiem) ABSS*, jeżeli $0 \in \mathbb{R}^n$ jest **GAS** punktem równowagi układu (2.39) dla dowolnej, lokalnie lipschitzowskiej funkcji F spełniającej warunek sektorowy

$$\alpha < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < \beta \quad \forall \sigma \neq 0, \quad F(0) = 0 .$$

Rozważmy układ (2.39), dla którego istnieją liczby $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $\{\mu \in \mathbb{R} : \operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0\} = (k_1, k_2)$. Przedział (k_1, k_2) nazywamy wówczas *sektorem (stożkiem) Hurwitza* dla nieliniowości F . Mówimy, że układ (2.39) spełnia *hipotezę Ajzermana*, jeżeli jest **ABSS** w sektorze Hurwitza.

Jeżeli założenia Twierdzenia 2.5.3 są spełnione dla takiego k , że przedział $(0, k)$ jest sektorem Hurwitza dla układu (2.39), to twierdzenie to może dostarczyć warunku wystarczającego na to, aby układ (2.39) spełniał hipotezę Ajzermana, inaczej dostarczy mniejszego sektora absolutnej stabilności. Podobnie, jeżeli dla układu (2.39) sektorem Hurwitza jest przedział $(0, \infty)$, to także Twierdzenie 2.5.5 może dostarczyć warunku wystarczającego na to, aby układ (2.39) spełniał hipotezę Ajzermana.

2.7.3. Numeryczny algorytm weryfikacji nierówności Popova

2.7.3.1. Przypadek stabilnego układu otwartego. Opiszemy stabilny numerycznie algorytm weryfikacji nierówności Popova (2.84) przy założeniu $\text{Re } \lambda(A) < 0$. Kod tego algorytmu stanowi zawartość plików `victory.m` i `boa.m` realizowanych pod MATLAB-em (patrz podrozdział 2.7.4). Wykorzystując tożsamości

$$\begin{aligned} (A - j\omega I)^{-1} + (A + j\omega I)^{-1} &= 2A(A^2 + \omega^2 I)^{-1} \\ (A - j\omega I)^{-1} - (A + j\omega I)^{-1} &= j2\omega(A^2 + \omega^2 I)^{-1} \end{aligned} \quad (2.103)$$

otrzymamy

$$\text{Re} [(1 + j\omega q)c^T(A - j\omega I)^{-1}b] = -qc^Tb + \Phi(\omega^2) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} ,$$

gdzie

$$\Phi(\Omega) = c^T(I + qA)A(A^2 + \Omega I)^{-1}b .$$

W celu określenia możliwie największej liczby k , przy której (2.84) będzie zachodzić, należy rozwiązać problem wariacyjny

$$k_{opt} = \left\{ \sup_{q \in \mathbb{R}} \left[qc^Tb - \min_{\Omega \geq 0} \Phi(\Omega) \right] \right\}^{-1} \quad (2.104)$$

Wewnętrzne zadanie optymalizacji

$$\min_{\Omega \geq 0} \Phi(\Omega) \quad (2.105)$$

rozwiązujemy przez sprowadzenie go do problemu minimalizacyjnego

$$\min_{\Omega \geq 0, \Phi'(\Omega)=0} \{\Phi(0), \Phi(\Omega), 0\} .$$

Równanie $\Phi'(\Omega) = 0$ jest równoważne równaniu wielomianowemu

$$c^T(I + qA)A \text{adj} [(A^2 + \Omega I)^2] b = 0 .$$

W programie `victory.m` zastosowano następujący wariant rozwiązania problemu (2.104) – w oparciu o rozwiązanie podproblemu (2.105) definiuje się funkcję

$$k(q) = \left[qc^Tb - \min_{\Omega \geq 0} \Phi(\Omega) \right]^{-1}$$

i sporządza jej wykres w przedziale deklarowanym przez użytkownika. Jeżeli w zadanym, zwartym przedziale obserwacji występuje maksimum funkcji $k = k(q)$, to użytkownik podejmuje decyzję o uruchomieniu standardowej procedury poszukiwania optimum funkcji skalarnej w przedziale obserwacji. W efekcie dostajemy wykres funkcji $k = k(q)$ z zaznaczonym optimum i wydrukiem optymalnych wartości q_{opt}

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

i k_{opt} , stanowiących rozwiązanie zadania (2.104). Program `victory.m` kończy się uzyskaniem plotu *zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowa Popova* (2.86) i *optymalnej prostej podpierającej* ten plot,

$$\frac{1}{k_{opt}} + X - q_{opt}Y = 0 .$$

Na rysunku 2.5 przedstawiono poszczególne fazy działania programu `victory.m` na wybranym przykładzie liczbowym.

2.7.3.2. Układ otwarty z pojedynczym biegunem w zerze. Opisany wyżej algorytm dopuszcza modyfikację umożliwiającą weryfikację nierówności Popova (2.84) w najprostszym przypadku krytycznym, gdy $G(s)$ ma pojedynczy biegun $s = 0$ na osi urojonej, a pozostałe bieguny znajdują się w lewej otwartej półpłaszczyźnie. W tym przypadku transmitancję układu otwartego można przedstawić w postaci

$$G(s) = \frac{1}{s}G_0(s), \quad G_0(s) = d + c^T(A - sI)^{-1}b .$$

Czwórka (A, b, c, d) jest zatem realizacją transmitancji $G_0(s)$ oraz

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] = \frac{1}{k} + q \operatorname{Re} G_0(j\omega) + \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} G_0(j\omega) .$$

Wykorzystując powtórnie tożsamości (2.103) otrzymujemy

$$\frac{1}{k} + q \operatorname{Re} G_0(j\omega) + \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} G_0(j\omega) = \frac{1}{k} + qd + c^T(I + qA)(A^2 + \omega^2 I)^{-1}b .$$

Zatem do weryfikacji nierówności Popova (2.84) można zastosować ten sam algorytm co poprzednio z zastąpieniem funkcji Φ i k przez

$$\Phi(\Omega) = c^T(I + qA)(A^2 + \Omega I)^{-1}b, \quad k(q) = \left[-qd - \min_{\Omega \geq 0} \Phi(\Omega)\right]^{-1} .$$

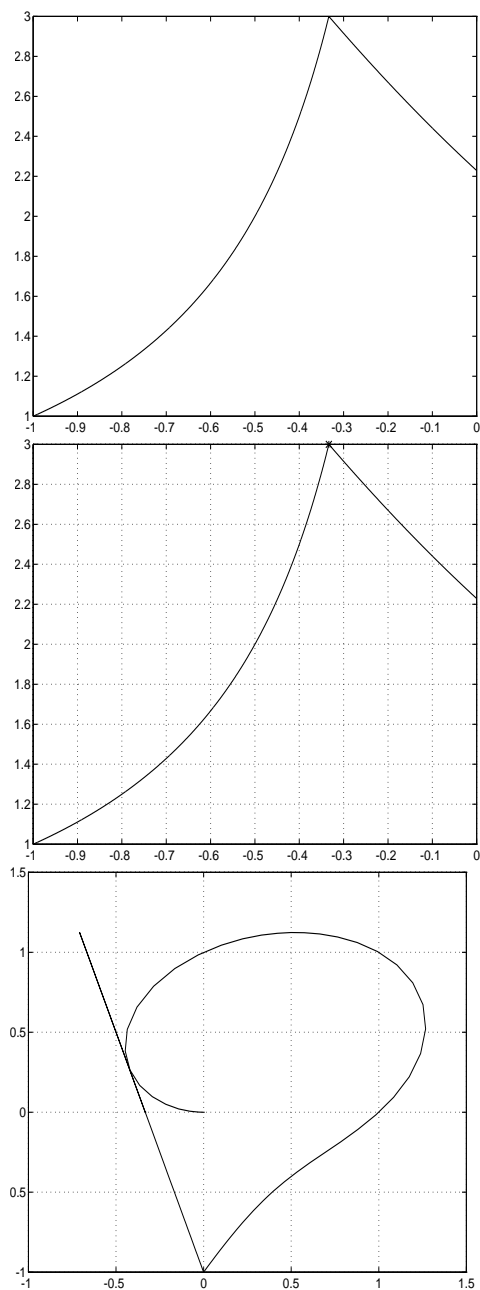
Kod zmodyfikowanego algorytmu stanowi zawartość plików `victoro.m` i `boo.m` realizowanych pod MATLAB-em (patrz podrozdział 2.7.4). Program `victoro.m` kończy się uzyskaniem plotu charakterystyki częstotliwościowej

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = \operatorname{Re} G_0(j\omega) \\ Y(\omega) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} G_0(j\omega) \end{array} \right\}, \quad \omega \geq 0$$

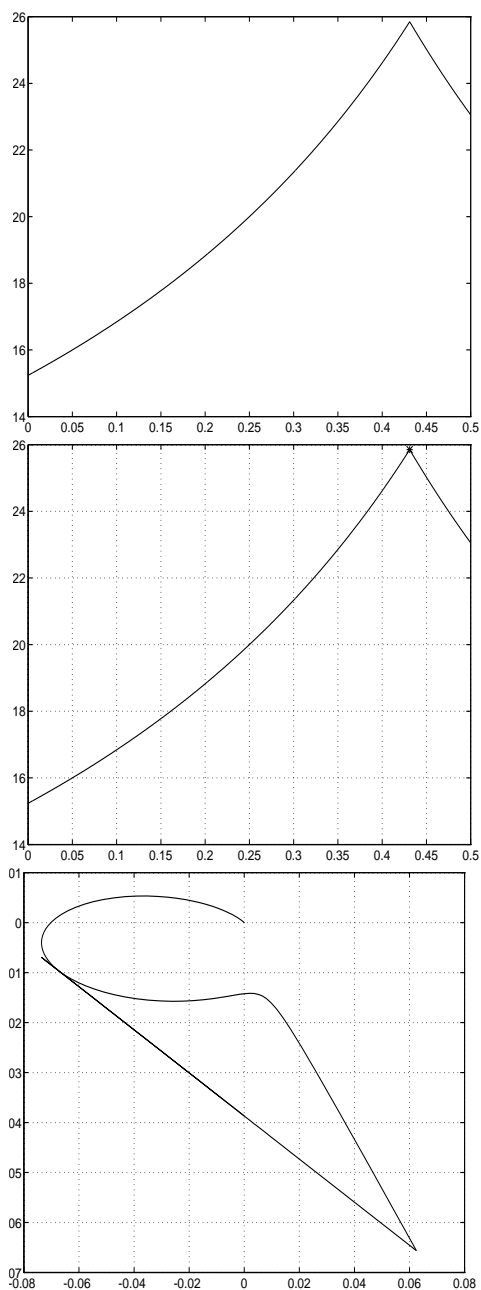
i prostej o równaniu

$$\frac{1}{k_{opt}} + q_{opt}X + Y = 0 ,$$

2.7. METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ LURIE



Rysunek 2.5. Ilustracja poszczególnych faz działania programu `victory.m`



Rysunek 2.6. Ilustracja poszczególnych faz działania programu `victoro.m`

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

podpierającej ten plot. Na rysunku 2.6 przedstawiono poszczególne fazy działania programu `victoro.m` na wybranym przykładzie liczbowym.

Uwaga 2.7.3. W wielu klasycznych pozycjach literatury najprostszy przypadek krytyczny bywa zapisywany w postaci tzw. *układu Lurie sterowania pośredniego*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + b\phi(\sigma) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x - d\phi(\sigma) \end{cases} \quad (2.106)$$

Układ (2.106) może być zapisany jako układ Lurie (2.39)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ -d \end{bmatrix} \phi \left(\begin{bmatrix} 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \sigma \end{bmatrix} \right) .$$

2.7.4. Dodatek: m-pliki `victory.m`, `boa.m`, `victoro.m`, `boo.m`

Kod programu `victory.m`

```
clear
clc
clg
format long
global A b c
disp(' The current data are: ')
A = [ 0      1      0
      0      0      1
      -1     -1     -2]
b = [ 0
      0
      -1]
c = [0
      0
      1]
disp(' Do you accept the current data ? yes - <enter>, ')
disp('          no - Ctrl C, Modify the data ')
pause
q_pocz = input(' Introduce initial value of q = ')
q_kon = input(' Introduce final value of q = ')
krok_q = input(' Introduce increment of q = ')
y = q_pocz:krok_q:q_kon;
for m=1:length(y)
w(m) = y(m);
d(m) = -boa(w(m));
```

2.7. METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ LURIE

```
end
plot(w,d)
disp(' Strike any key if the graph exhibits an optimum ')
disp(' otherwise - CTRL C and modify the search interval of q .')
pause
hold on
xa = min(y);
xb = max(y);
options(2)=0.000001;
options(7)=3;
options(1)=0;
x = fmin('boa',xa,xb,options);
plot(x,-boa(x),'*')
grid;
hold off
pause
clg
[re,im,om] = nyquisto(A,b,c',0);
x1=-re;
x2=-om.*im;
plot(x1,x2,'g')
hold on
plot(x*x2+1/boa(x),x2,'r')
grid
hold off
```

Kod programu boa.m

```
function [K]=boa(q)
global A b c
u=length(b);
for i=1:2*u-1
x(i)=i-1;
dt=det((A^2+x(i)*eye(u))^2);
y(i)=dt*c'*(eye(u)+q*A)*A*((A^2+x(i)*eye(u))^(-2))*b;
end
z=polyfit(x,y,2*u-2);
s=roots(z);
for k=1:length(s);
if imag(s(k))==0,
r(k)=s(k);
else
r(k)=0;
end
end
```

2. STABILNOŚĆ CIAŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

```
end
j=0;
for i=1:length(s);
    if r(i)>=0,
        j=j+1;
        rr(j)=r(i);
        p(j)=c*(eye(u)+q*A)*A*((A^2+rr(j)*eye(u))^(-1))*b;
    end
end
f=c*(eye(u)+q*A)*A^(-1)*b;
K=-1/(q*c'*b-min([p 0 f]));
```

Kod programu victoro.m

```
clear
clc
clg
format long
global A b c de
disp(' The current data are: ')
A = [ 0      1      0
      0      0      1
     -16    -16.8   -1.8]
b = [ 0
      0
     -1]
c = [1
      0
      0]
de=0
disp(' Do you accept the current data ? yes - <enter>, ')
disp('          no - Ctrl C, Modify the data ')
pause
q_pocz = input(' Introduce initial value of q = ')
q_kon = input(' Introduce final value of q = ')
krok_q= input(' Introduce increment of q = ')
y = q_pocz:krok_q:q_kon;
for m=1:length(y)
    w(m) = y(m);
    d(m) = -boo(w(m));
end
plot(w,d)
disp(' Strike any key if the graph exhibits an optimum ')
disp(' otherwise - CTRL C and modify the search interval of q .')
```

2.7. METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ LURIE

```
pause
hold on
xa = min(y);
xb = max(y);
options(2)=0.000001;
options(7)=3;
options(1)=0;
x = fmin('boo',xa,xb,options);
plot(x,-boo(x),'*')
grid;
hold off
pause
clg
[re,im,om] = nyquisto(A,b,c',de);
x1=-re;
x2=-im./om;
plot(x1,x2,'g')
hold on
plot(x1,1/boo(x)-x*x1,'r')
grid
hold off
```

Kod programu boo.m

```
function [K]=boo(q)
global A b c de
u=length(b);
for i=1:2*u-1
x(i)=i-1;
dt=det((A^2+x(i)*eye(u))^2);
y(i)=dt*c'*(eye(u)+q*A)*((A^2+x(i)*eye(u))^(-2))*b;
end
z=polyfit(x,y,2*u-2);
s=roots(z);
for k=1:length(s);
    if imag(s(k))==0,
        r(k)=s(k);
    else
        r(k)=0;
    end
end
end
j=0;
for i=1:length(s);
    if r(i)>=0,
```

2. STABILNOŚĆ CIĄGLYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

```
        j=j+1;
        rr(j)=r(i);
        p(j)=c'*(eye(u)+q*A)*((A^2+r(i)*eye(u))^-1)*b;
    end
end
f=c'*(eye(u)+q*A)*A^(-2)*b;
K=-1/(-q*de-min([p 0 f]));
```

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

3.1. UKŁADY TRZECIEGO RZĘDU

3.1.1. Układ z nieliniowością zależną od pierwszej zmiennej stanu

Niech

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -F(x_1) - \beta x_2 - \alpha x_3 \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$, F jest funkcją lokalnie lipschitzowską, może być interpretowany jako układ Lurie (2.39) z

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & -\alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Zgodnie z (2.40)

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + \alpha s + \beta)}.$$

Ponadto $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$, przy czym jedyną i pojedynczą wartością własną A na osi urojonej jest 0 oraz

$$\operatorname{Res}_{s=0}(1 + qs)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{1}{\beta} > 0.$$

Zatem

$$\pi(\omega) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \frac{\omega^4 + \omega^2(\alpha^2 - 2\beta - qk) + (\beta^2 - \alpha k + qk\beta)}{k[\omega^4 + (\alpha^2 - 2\beta)\omega^2 + \beta^2]}.$$

Lemat 3.1.1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby

$$\omega^4 + P\omega^2 + Q \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

gdzie $P, Q \in \mathbb{R}$, jest aby trójmian $z^2 + Pz + Q$ nie posiadał pierwiastka dodatniego, co zachodzi gdy albo

1. $\Delta = P^2 - 4Q \leq 0$, albo
2. $\Delta \geq 0$ i $P \geq 0, \quad Q \geq 0$.

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

Na mocy powyższego lematu warunkiem koniecznym i dostatecznym spełnienia (2.84) jest nierówność

$$\Delta = q^2k^2 - 2\alpha^2kq + \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha k \leq 0 .$$

Ponieważ dla $k \in (0, \infty]$ ma istnieć $q \in \mathbb{R}$ takie, że ta nierówność jest spełniona, więc musi być $16\alpha k^2(\alpha\beta - k) \geq 0$. Tak więc największą możliwą liczbą k , przy której istnieje q takie, że zachodzi (2.84) jest $k = \alpha\beta$; temu k odpowiada $q = \frac{\alpha}{\beta} > 0$.

Warunek (2.89) jest spełniony.

Z Lematu 2.6.1, Uwagi 2.6.3 i Twierdzenia 2.5.3 wynika, że nierówność

$$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < \alpha\beta \quad \forall \sigma \neq 0, \quad F(0) = 0$$

jest warunkiem wystarczającym na to, aby trywialne rozwiązanie zerowe układu (3.1) było **GAS**. W ten sposób dowiedliśmy słuszności hipotezy Ajzermana dla układu (3.1).

Celem określenia funkcjonału Lapunowa i jego pochodnej wzdłuż rozwiązania systemu (3.1) należy rozwiązać układ (2.44), co można uczynić korzystając z Algorytmu 2.7.1. Dla $k = \alpha\beta$, $q = \frac{\alpha}{\beta}$ mamy

$$\pi(\omega) = \frac{\omega^2(\omega^2 - \beta)^2}{\omega^2\alpha\beta[\alpha^2\omega^2 + (\beta - \omega^2)^2]} .$$

Z (2.98)÷(2.100) otrzymujemy teraz

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= -\frac{s^3}{\sqrt{\alpha\beta}} - \frac{s\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \det(A - sI) - g^T \operatorname{adj}(A - sI)b = \\ &= -\frac{s^3}{\sqrt{\alpha\beta}} + s^2 \left[\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} + g_3 \right] + s \left[\frac{-\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} + g_2 \right] + g_1 , \end{aligned}$$

skąd

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \end{bmatrix} .$$

Z układu (2.44) wyznaczamy macierz H ,

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2\beta} & \frac{\alpha}{2\beta} \\ \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{2\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} > 0 .$$

Ostatecznie

$$V = \frac{\beta}{2}x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + x_1 x_3 + \frac{\alpha}{\beta}x_2 x_3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2\beta}\right)x_2^2 + \frac{x_3^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{x_1} F(\sigma) d\sigma ,$$

$$\dot{V} = - \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}}x_3 + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}F(x_1) \right]^2 - F(x_1) \left[x_1 - \frac{F(x_1)}{\alpha\beta} \right] .$$

Powyższe rezultaty pokrywają się z wynikiem uzyskanym przez Ezeilo [36].

3.1.2. Układ z nieliniowością zależną od drugiej zmiennej stanu

Poniżej rozważany przykład pokazuje, że niekiedy warunek (2.70) nie jest istotny dla zapewnienia **ABSS** układu Lurie. Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\gamma x - \varphi(y) - \alpha z \end{cases} \quad (3.2)$$

gdzie $\alpha, \gamma > 0$, a φ jest funkcją ciągłą, lokalnie lipschitzowską.

Układ (3.2) pozostaje w ścisłym związku z równaniem różniczkowym

$$x^{(3)} + \alpha x^{(2)} + \varphi(\dot{x}) + \gamma x = 0 ,$$

którego jest postacią normalną, a także równaniem $u^{(3)} + \alpha u^{(2)} + f(u)\dot{u} + \gamma u = 0$, jeśli przyjąć zmienne stanu

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\gamma} \left[\ddot{u} + \alpha \dot{u} + \int_0^u f(\sigma) d\sigma \right] \\ y = u \\ z = \dot{u} \end{cases} .$$

Układ (3.2) można uważać za układ Lurie z

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & -\frac{\gamma}{\alpha} & -\alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(\sigma) = \varphi(\sigma) - \frac{\gamma}{\alpha}\sigma .$$

Transmitancja części liniowej systemu wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{s}{s^3 + \alpha s^2 + \frac{\gamma}{\alpha}s + \gamma} .$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Widmo $\lambda(A)$ macierzy A leży w lewej domkniętej półpłaszczyźnie, przy czym wartości własne położone na osi urojonej są postaci $s = \mp j\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, przy czym

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

$$\operatorname{Res}_{s \mp j\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}(1 + qs)G(s) = \frac{1}{2} > 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $q = \frac{1}{\alpha}$. Dla $k = \infty$, $q = \frac{1}{\alpha}$

$$\pi(\omega) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) .$$

Warunek (2.89) nie jest spełniony, gdyż $-\frac{1}{q} = -\alpha \in \lambda(A)$.

Z Lematu 2.6.1, Uwagi 2.6.3 i Twierdzenia 2.5.3 wynika, że warunki:

$$\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} > \frac{\gamma}{\alpha} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad (3.3)$$

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma \left[\varphi(\xi) - \frac{\gamma}{\alpha} \xi \right] d\xi = \infty \quad (3.4)$$

są wystarczające dla zagwarantowania **ABSS** układu (3.2). Rozwiązanie układu (2.44) ma postać

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma}{2\alpha} & 0 \\ \frac{\gamma}{2\alpha} & \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2\alpha^2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\alpha} \end{bmatrix} \geq 0$$

w efekcie funkcjonal Lapunowa dla układu (3.2) ma postać

$$V(x) = x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma = \frac{\gamma}{2} \left(x_1 + \frac{x_2}{\alpha} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left(x_2 + \frac{x_3}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^{x_2} \left[\varphi(\sigma) - \frac{\gamma}{\alpha} \sigma \right] d\sigma ,$$

a jego pochodna wzdłuż rozwiązania układu (3.2) wyraża się wzorem

$$\dot{V}(x) = - \left[g^T x + \sqrt{\frac{1}{k} - qc^T b F} \right]^2 - F \left(c^T x - \frac{F}{k} \right) = -\varphi(x_2)x_2 + \frac{\gamma}{\alpha} x_2^2 .$$

Wykażemy obecnie, że warunek (3.4) nie jest istotny dla zapewnienia **ABSS** układu (3.2). Dowód tego stwierdzenia rozpoczynamy od wykazania, że dla każdego $L > 0$ zbiór

$$Z_L = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : V(x) \leq L, \quad |x_2| \leq \sqrt{\frac{2L}{\alpha}} \right\}$$

3.1. UKŁADY TRZECIEGO RZĘDU

jest zwartym zbiorem inwariantnym względem strumienia **LCSDS** generowanego rozwiązaniami systemu (3.2). Istotnie, wobec ciągłości funkcjonałów V , $x \mapsto |x_2|$ zbiór Z_L jest domknięty. Niech $x \in Z_L$. Nierówność $V(x) \leq L$ pociąga za sobą nierówności:

$$\left(x_2 + \frac{x_3}{\alpha}\right)^2 \leq \frac{2L}{\alpha} \quad (3.5)$$

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{\alpha}\right)^2 \leq \frac{2L}{\gamma} \quad (3.6)$$

Nierówności (3.5), (3.6) wraz z wynikającą z przynależności x do Z_L nierównością $|x_2| \leq \sqrt{\frac{2L}{\alpha}}$ implikują ograniczoność zbioru Z_L . W ten sposób dowiedliśmy zwartości zbioru Z_L . Rozważmy z kolei trzy funkcjonały

$$L^1(x) = V(x) - L, \quad L^2(x) = x_2 - \sqrt{\frac{2L}{\alpha}}, \quad L^3(x) = -x_2 - \sqrt{\frac{2L}{\alpha}}$$

oraz zbiory

$$\begin{aligned} \Pi^1 &= \left\{ x : V(x) = L, |x_2| \leq \sqrt{\frac{2L}{\alpha}} \right\}, \\ \Pi^2 &= \left\{ x : V(x) \leq L, x_2 = \sqrt{\frac{2L}{\alpha}}, -\sqrt{\frac{2L}{\alpha}} \leq x_2 \right\}, \\ \Pi^3 &= \left\{ x : V(x) \leq L, x_2 = \sqrt{\frac{2L}{\alpha}}, -\sqrt{\frac{2L}{\alpha}} \geq x_2 \right\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} x \in \Pi^1 &\implies \dot{L}^1(x) = \dot{V}(x) = -x_2 \left[\varphi(x_2) - \frac{\gamma}{\alpha} x_2 \right] \leq 0, \\ x \in \Pi^2 &\implies x \in Z_L \implies \frac{x_3^2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{2L}{\alpha}} x_3 \leq 0 \implies x_3 = \dot{x}_2 = \dot{L}^2(x) \leq 0, \\ x \in \Pi^3 &\implies x \in Z_L \implies \frac{x_3^2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{2L}{\alpha}} x_3 \leq 0 \implies -x_3 = -\dot{x}_2 = \dot{L}^3(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Z Lematu 2.2.1 wynika, że Z_L jest zbiorem inwariantnym względem strumienia **LCSDS** generowanego rozwiązaniami systemu (3.2).

Jeżeli w uogólnionym Twierdzeniu LaSalle'a 2.1.6 położymy $X = Z_{L+\varepsilon}$, $\Omega_L = Z_L$, $\phi = V$, gdzie ε jest małą liczbą dodatnią, to z tezy tego twierdzenia wyniknie następujący rezultat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \Omega_L = Z_L,$$

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

gdzie $x(\cdot, x_0)$ oznacza rozwiązanie układu. Przejście graniczne $L \rightarrow \infty$ pozwala teraz ustalić, że $x \equiv 0$ jest **GAS** trywialnym rozwiązaniem układu (3.2). Dowiedliśmy tym samym nieistotności warunku (3.4) dla zagwarantowania **ABSS** układu (3.2). Zatem warunek (3.3) wystarcza dla zagwarantowania **ABSS** układu, co potwierdza wyniki Sędziwego [127]. Układ (3.2) spełnia hipotezę Ajzermana.

3.1.3. Układ z nieliniowością zależną od trzeciej zmiennej stanu

Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_1 - \alpha x_2 - \varphi(x_3) \end{cases} \quad (3.7)$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$, funkcja φ jest ciągła i lokalnie akkretywna. Układ ten pozostaje w ścisłym związku z równaniem różniczkowym

$$u^{(3)} + \varphi(u^{(2)}) + \alpha \dot{u} + \beta u = 0 ,$$

którego jest postacią normalną, a także równaniem różniczkowym

$$u^{(3)} + f(\dot{u})u^{(2)} + \alpha \dot{u} + \beta u = 0 ,$$

jeżeli zmienne stanu przyjąć w postaci

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\beta} \left[\ddot{u} + \int_0^{\dot{u}} f(\sigma) d\sigma + \alpha u \right] \\ x_2 = u \\ x_3 = \dot{u} \end{cases} .$$

Układowi (3.7) nadać można postać trójwymiarowego układu Lurie (2.39) z

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha & -\frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(\sigma) = \varphi(\sigma) - \frac{\beta}{\alpha} \sigma .$$

(A, b) para sterowalna, a para (A, c^T) jest obserwowalna. Transmitancja części liniowej przyjmuje postać

$$G(s) = \frac{s^2}{s^3 + \frac{\beta}{\alpha} s^2 + \alpha s + \beta} .$$

Widmo macierzy A leży w lewej domkniętej półpłaszczyźnie, przy czym wartościami własnymi na osi urojonej są liczby $\mp j\sqrt{\alpha}$.

3.1. UKŁADY TRZECIEGO RZĘDU

Warunek

$$\operatorname{Res}_{s=\mp j\sqrt{\alpha}}(1+qs)G(s) = \frac{1}{2} > 0$$

jest spełniony o ile

$$q = -\frac{\beta}{\alpha^2} .$$

Dla tej wartości q mamy

$$\pi(\omega) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1+j\omega q)G(j\omega) = \frac{-\omega^2 \left(\frac{\beta k}{\alpha^2} - 1 \right) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}{k \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \omega^2 \right)}$$

i największą liczbą k , przy której zachodzi nierówność Popova (2.84) jest $k = \frac{\alpha^2}{\beta}$.

Warunek (2.89) jest spełniony i na mocy Lematu 2.6.1 oraz Uwagi 2.6.3 wnosimy, że układ (2.44) posiada rozwiązanie względem (H, g) przy czym $H = H^T > 0$. Rozwiązanie to wyznaczamy w oparciu o Algorytm 2.7.1.

$$k = \frac{\alpha^2}{\beta}, \quad q = -\frac{\beta}{\alpha^2} \implies \pi(\omega) = \frac{\beta^3(\alpha - \omega^2)^2}{\alpha^4 \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \omega^2 \right) (\alpha - \omega^2)^2} .$$

Z (2.98)÷(2.99) otrzymujemy teraz

$$\phi(s) = \frac{\beta\sqrt{\beta}}{\alpha^2}(\alpha + s^2) \equiv -g^T \operatorname{adj}(A - sI)b ,$$

skąd dostajemy

$$g = \begin{bmatrix} \frac{\beta\sqrt{\beta}}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{\beta\sqrt{\beta}}{\alpha^2} \end{bmatrix} .$$

Macierz H wyznaczamy z układu (2.44), po uwzględnieniu w tym układzie postaci wektora g

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{\alpha} & \frac{\beta}{2} & \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \\ \frac{\beta}{2} & \frac{3\beta^2}{2\alpha^2} + \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2\alpha} \\ \frac{\beta^2}{2\alpha^2} & \frac{\beta}{2\alpha} & \frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^3} \end{bmatrix} > 0$$

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

$$\det\left(H + \frac{kq}{2}cc^T\right) = \det \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{\alpha} & \frac{\beta}{2} & \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \\ \frac{\beta}{\alpha} & \frac{3\beta^2}{2\alpha^2} + \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2\alpha} \\ \frac{\beta^2}{2\alpha^2} & \frac{\beta}{2\alpha} & \frac{\beta^2}{2\alpha^3} \end{bmatrix} = \frac{3\beta^6}{8\alpha^6} > 0 .$$

Ostatecznie, jeśli

$$\frac{\beta}{\alpha}\sigma < \varphi(\sigma) < \left[\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right]\sigma \quad \forall \sigma \neq 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad (3.8)$$

to nieliniowość F spełnia warunek (2.68) oraz są spełnione inne założenia twierdzenia 2.5.3, z którego otrzymujemy stwierdzenie, że (3.8) jest warunkiem wystarczającym **ABSS** układu (3.7).

Widoczna jest znaczna rozbieżność pomiędzy sektorem **ABSS**: $\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)$, a sektorem Hurwitza, który dla układu (3.7) ma postać: $\left(\frac{\beta}{\alpha}, \infty\right)$.

Zauważmy, że transformacja

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sprowadza układ

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varphi(x) \\ \dot{y} = -\alpha x + z \\ \dot{z} = -\beta x \end{cases} \quad (3.9)$$

do postaci (3.7). Pliss [111] wykazał, że jeśli funkcja φ spełnia następujące warunki:

$$\left(\sqrt{\alpha}h + \frac{\beta}{\alpha}\right)\sigma^2 \leq \sigma\varphi(\sigma) \leq \left(H\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\sigma^2, \quad 0 \leq |\sigma| < \delta \quad (3.10)$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\sigma^2 < \sigma\varphi(\sigma) \leq \left(H\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\sigma^2, \quad \delta \leq |\sigma| < \varepsilon \quad (3.11)$$

$$\frac{\beta}{\alpha}|\sigma| < \varphi(\sigma)\text{sign } \sigma \leq \sqrt{\alpha}\delta^4 + \frac{\beta}{\alpha}|\sigma|, \quad |\sigma| \geq \varepsilon \quad (3.12)$$

przy dostatecznie małej $\delta > 0$, $0 < \varepsilon - \delta < \delta^2$, $H \geq h > \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\beta}$ oraz istnieje takie $\lambda > 0$, że

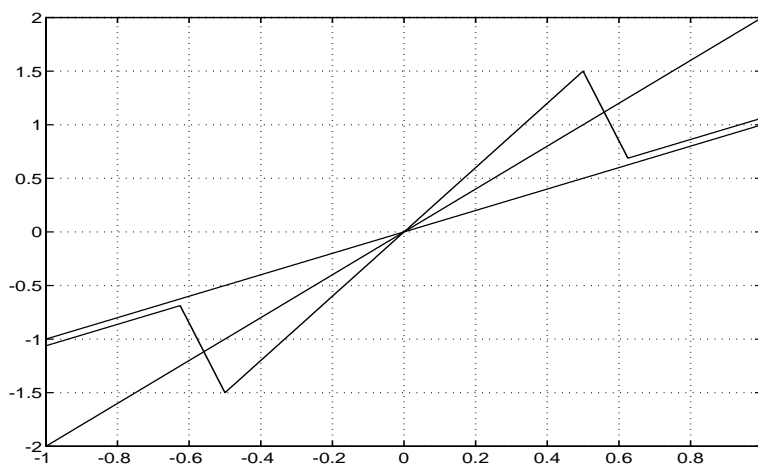
$$\sigma\varphi(\sigma) \geq \frac{\beta}{\alpha}\sigma^2 + \lambda\sqrt{\alpha}, \quad |\sigma| \geq \varepsilon \quad (3.13)$$

to układ (3.9) posiada nietrywialne rozwiązanie okresowe będące atraktorem, a w obszar atrakcji tego rozwiązania da się wpisać toroidalne, dodatnio inwariantne otoczenie.

Rozpatrzmy szczegółowo przypadek układu (3.9) z $\alpha = \beta = 1$ i odcinkowo-liniową funkcją φ ,

$$\varphi(\sigma) = \left\{ \begin{array}{ll} 3\sigma, & \text{gdy } |\sigma| \leq \delta \\ \frac{-4 + \delta + 2\delta^3}{\delta}\sigma + (4 + 2\delta - 2\delta^3)\text{sign } \sigma, & \text{gdy } \delta \leq |\sigma| \leq \delta + \frac{\delta^2}{2} \\ \sigma + \delta^4\text{sign } \sigma, & \text{gdy } |\sigma| \geq \frac{\delta^2}{2} \end{array} \right\}.$$

Wykres tej funkcji przedstawiono na rysunku 3.1.



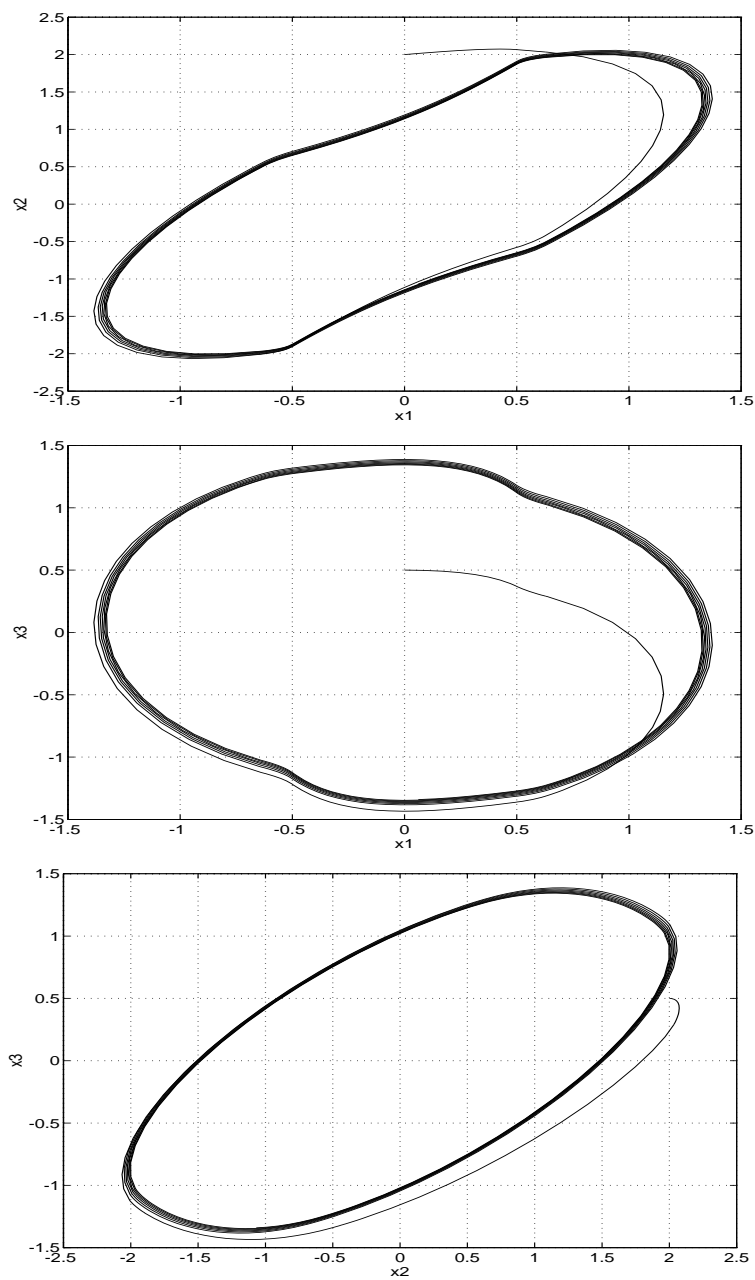
Rysunek 3.1. Wykres nieliniowości φ dla $\delta = 0.5$

Przy dostatecznie małej liczbie δ funkcja ta spełnia warunki (3.10)÷(3.13) z:

$$H = 2, \quad h = 1.9, \quad \varepsilon = \delta + \frac{\delta^2}{2}, \quad \lambda = \delta^5 + \frac{\delta^6}{2}.$$

Zgodnie z wynikami Plissa system posiada nietrywialne rozwiązanie okresowe, pomimo tego, że wykres nieliniowości φ zawiera się w sektorze Hurwitza. Symulacje numeryczne, których wyniki przedstawiono na rysunku 3.2, potwierdzają istnienie rozwiązania okresowego. Istnienie rozwiązania okresowego dowodzi nieprawdziwości hipotezy Ajzermana dla układów (3.9) i (3.7).

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE



Rysunek 3.2. Wyniki symulacji układu Plissa z parametrami $\alpha = \beta = 1$ i nieliniowością φ jak na rysunku 3.1

3.1.4. Uwagi o drugim kontrprzykładzie Fittsa

Drugi z kontrprzykładów Fitts'a [38] na hipotezę Ajzermana ma postać układu automatycznej regulacji przedstawionego na rysunku 2.4, str. 37, przy czym

$$G(s) = \frac{s^2 + \alpha s + \beta^2}{(s^2 + 2\xi s + 1)(s + 1)} \quad (3.14)$$

a nieliniowość ma postać

$$\phi(\sigma) = K[\sigma(\sigma^2 - 1)^2 + \delta\sigma] \quad (3.15)$$

Fitts ustalił eksperymentalnie, że przy zestawach parametrów $K, \alpha, \beta, \xi, \delta$ wymienionych w tabeli 3.1, układ (3.14), (3.15) nie jest **GAS**.

Tabela 3.1. Ograniczenia parametrów w eksperymentach Fitts'a

Lp.	K	$\alpha \geq 0$	$\beta \geq 0$	ξ	$\delta \geq 0$
1	$3.5 \leq k \leq 200$	0	0	> 0.0001	0
2	7.5	$\alpha \leq 0.1$	0	> 0.0001	0
3	7.5	0	$\beta \leq 0.797$	> 0.0001	0
4	7.5	0	0	$0.0001 < \xi < 0.092$	0
5	7.5	0	0	> 0.0001	$\delta \leq 0.15$

1°. W przypadku, gdy

$$\alpha = 0, \quad \beta^2 = \frac{1}{1 + 2\xi} \quad (3.16)$$

układ Fitts'a jest szczególnym przypadkiem ($\psi = \varphi(\sigma)$) klasy układów postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - (1 + 2\xi)x_2 - (1 + 2\xi)x_3 - \psi\left(\frac{x_1}{1 + 2\xi} + x_3\right) \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

z ciągłą, lokalnie akkretywną funkcją $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Układ (3.17) może być interpretowany jako trójwymiarowy układ Lurie (2.39) z

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 - 2\xi & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + 2\xi} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$F(\sigma) = \psi(\sigma) + (1 + 2\xi)\sigma, \quad \xi > 0$$

$$G(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{1 + 2\xi}}{s(s^2 + 1 + 2\xi)}$$

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Widmo macierzy A ma postać

$$\lambda(A) = \left\{ 0, -j\sqrt{1+2\xi}, j\sqrt{1+2\xi} \right\} ,$$

przy czym

$$\operatorname{Res}_{s=0}(1+qs)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{1}{(1+2\xi)^2} > 0 ,$$

$$\operatorname{Res}_{s=\pm j\sqrt{1+2\xi}}(1+qs)G(s) = \frac{2(\xi + \xi^2)}{(1+2\xi)^2} > 0 ,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $q = 0$. Przy $q = 0$, $k = \infty$ mamy

$$\pi(\omega) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) \equiv 0 .$$

Warunek (2.80) jest spełniony.

Z Lematu 2.6.1, Uwagi 2.6.3 i Twierdzenia 2.5.3 wynika, że warunki

$$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad F(0) = 0 \quad (3.19)$$

są wystarczające na to, aby $x \equiv 0$ było rozwiązaniem **GAS** układu (3.17). Uwzględniając (3.18), można nadać warunkom (3.19) postać równoważną

$$-1 - 2\xi < \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad \psi(0) = 0 .$$

Ostatecznie, jeśli $K = 7.5$, $\delta = 0$, $\xi \geq 0.2871425$ (na mocy (3.16) mamy wtedy $0 \leq \beta \leq 0.797$), $\psi(\sigma) = \phi(\sigma)$, gdzie ϕ jest nieliniowością określoną wzorem (3.15), to wtedy powyższy wynik przeczy części ustaleń Fitts'a dotyczących pozycji 3 w tabeli 3.1. W pozycji 3 tabeli 3.1 musi być $0.2871425 > \xi > 0.0001$. Po rozwiązaniu układu (2.44) przy pomocy procedury opisanej w podrozdziale 2.7.1 otrzymujemy funkcjonal Lapunowa

$$V(x) = x^T H x = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{1+2\xi}x_1x_3 + \frac{2\xi(1+\xi)}{1+2\xi}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 ,$$

a jego pochodna wzdłuż rozwiązań układu (3.17) jest postaci

$$\dot{V}(x) = - \left(\frac{x_1}{1+2\xi} + x_3 \right) \psi \left(\frac{x_1}{1+2\xi} + x_3 \right) - (1+2\xi) \left(\frac{x_1}{1+2\xi} + x_3 \right)^2 .$$

2°. W przypadku, gdy

$$\alpha = \frac{1}{1+2\xi}, \quad \beta = 0 \quad (3.20)$$

układ Fitts'a jest szczególnym przypadkiem ($\psi = \phi(\sigma)$) klasy układów postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - (1 + 2\xi)x_2 - (1 + 2\xi)x_3 - \psi\left(\frac{x_2}{1 + 2\xi} + x_3\right) \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

z ciągłą, lokalnie akkretywną funkcją $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Układ (3.21) może być interpretowany jako trójwymiarowy układ Lurie (2.39) z

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 - 2\xi & -1 - 2\xi \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{1 + 2\xi} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F(\sigma) = \psi(\sigma), \quad \xi > 0$$

$$G(s) = \frac{s^2 + \frac{s}{1 + 2\xi}}{s^3 + (1 + 2\xi)s^2 + (1 + 2\xi)s + 1} = \frac{s^2 + \frac{s}{1 + 2\xi}}{(s^2 + 2\xi s + 1)(s + 1)}.$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Macierz A jest hurwitzowska. Jeśli $k = \infty$, $q = 0$ to

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \\ &= \frac{\omega^4 \left(1 + 2\xi - \frac{1}{1 + 2\xi}\right)}{\omega^6 + (4\xi^2 - 1)\omega^4 + (4\xi^2 - 1)\omega^2 + 1} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Warunek (2.80) jest spełniony.

Z Lematu 2.6.1, Uwagi 2.6.3 i Twierdzenia 2.5.3 wynika, że $x = 0$ jest **GAS** położeniem równowagi układu (3.21) o ile

$$\sigma\psi(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}, \quad \psi(0) = 0.$$

Ostatecznie, jeśli $K = 7.5$, $\delta = 0$, $\xi \geq 4.5$ (na mocy (3.20) mamy wtedy $0 \leq \alpha \leq 0.1$), $\psi(\sigma) = \phi(\sigma)$, gdzie ϕ jest nieliniowością określoną wzorem (3.15), to wtedy powyższy wynik przeczy części ustaleń Fitts'a dotyczących pozycji 2 w tabeli 3.1. W pozycji 2 tabeli 3.1 musi być $4.5 > \xi > 0.0001$. Po rozwiązaniu układu (2.45) przy pomocy procedury opisanej w podrozdziale 2.7.1 otrzymujemy funkcjonal Lapunowa

$$V(x) = \frac{1}{2(1 + 2\xi)}x_1^2 + x_1x_2 + (1 + \xi)x_2^2 + \frac{1}{1 + 2\xi}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2,$$

którego pochodna wzdłuż rozwiązań układu (3.21) jest postaci

$$\dot{V}(x) = - \left[\frac{4\xi + 4\xi^2}{1 + 2\xi} \right] x_3^2 - c^T x \phi(c^T x).$$

Dwie powyższe nieścisłości w rezultatach Fitts'a opisano w pracach [129] i [45], w nieco innych wersjach.

3.2. UKŁADY CZWARTEGO RZĘDU

3.2.1. Układy z nieliniowością zależną od pierwszej zmiennej stanu

W pracach [24], [19], [20] badano stabilność układu opisanego równaniem różniczkowym

$$x^{(4)} + \alpha x^{(3)} + \beta x^{(2)} + \gamma \dot{x} + \phi(x) = 0, \quad \alpha\beta - \gamma > 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0 \quad (3.22)$$

Postacią normalną tego równania jest układ Lurie (2.39) z

$$n = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma & -\beta & -\alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(\sigma) = \phi(\sigma) .$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Transmitancja części liniowej układu wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{1}{(s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma)s} .$$

Widmo $\lambda(A)$ macierzy A jest w lewej domkniętej półpłaszczyźnie, przy czym 0 jest jedyną i pojedynczą wartością własną na osi urojonej,

$$\operatorname{Res}_{s=0}(1 + qs)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{1}{\gamma} > 0 .$$

Teraz mamy

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \\ &= \frac{\omega^6 + (\alpha^2 - 2\beta)\omega^4 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma - \alpha qk + k)\omega^2 + (\gamma qk + \gamma^2 - \beta k)}{k[(\omega^3 - \beta\omega)^2 + (\gamma - \alpha\omega^2)^2]} . \end{aligned}$$

Nierówność Popova (2.84) będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy licznik można rozłożyć w następującej formie:

$$\omega^6 + (\alpha^2 - 2\beta)\omega^4 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma - \alpha qk + k)\omega^2 + (\gamma qk + \gamma^2 - \beta k) = (\omega^2 - U)^2(\omega^2 + W) ,$$

przy czym $U, W \geq 0$. Z dzielenia wielomianów

$$\omega^6 + (\alpha^2 - 2\beta)\omega^4 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma - \alpha qk + k)\omega^2 + (\gamma qk + \gamma^2 - \beta k), \quad (\omega^2 - U)^2$$

wynikają związki

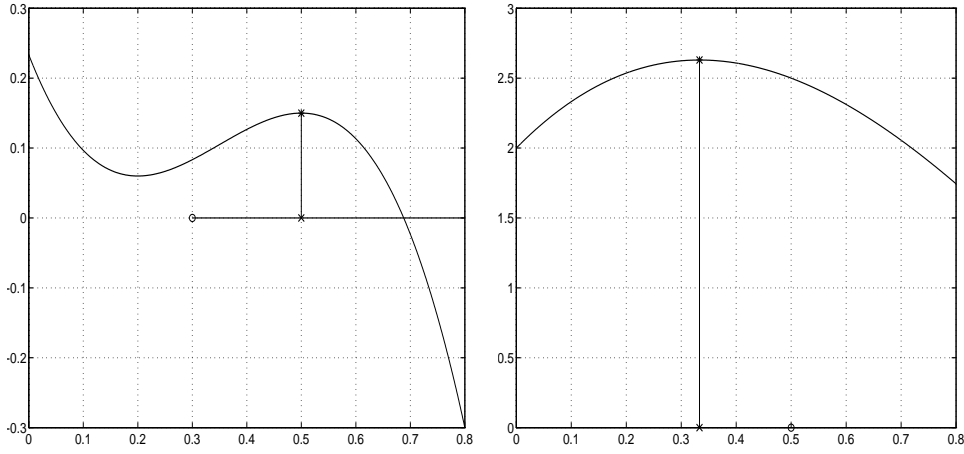
3.2. UKŁADY CZWARTEGO RZĘDU

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \alpha^2 - 2\beta + 2U \geq 0 \\ \left[\begin{array}{cc} -\alpha & 1 \\ \gamma & -\beta \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} qk \\ k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -3U^2 + U(4\beta - 2\alpha^2) + 2\alpha\gamma - \beta^2 \\ U^2(\alpha^2 - 2\beta) + 2U^3 - \gamma^2 \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

skąd

$$k = k(U) = \frac{-2\alpha U^3 + U^2(-\alpha^3 + 2\alpha\beta + 3\gamma) + U(2\alpha^2\gamma - 4\gamma\beta) + (\gamma\beta^2 - \alpha\gamma^2)}{\alpha\beta - \gamma}.$$

W celu wyznaczenia maksymalnego sektora **ABSS** należy dokonać maksymalizacji k po U z uwzględnieniem ograniczenia $\alpha^2 - 2\beta + 2U \geq 0$, patrz rysunek 3.3.



Rysunek 3.3. Maksymalizacja $k(U)$ w dwóch różnych przypadkach. Rysunek lewy odpowiada parametrom: $\alpha = 1$, $\beta = 0.8$, $\gamma = 0.5$. Lokalne maksimum funkcji k leży na prawo od punktu $(2\beta - \alpha^2)/2$. Rysunek prawy odpowiada parametrom: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$. Lokalne maksimum funkcji k leży na lewo od punktu $(2\beta - \alpha^2)/2$.

Niech U^* oznacza maksimum funkcji k . Z rysunku 3.3 wynika, że w sytuacji, gdy $\alpha^2 - 2\beta + 2U^* \geq 0$ maksymalna możliwa wartość k odpowiada lokalnemu maksimum funkcji k , a w przypadku, gdy $\alpha^2 - 2\beta + 2U^* < 0$ maksymalna wartość k jest równa $k((2\beta - \alpha^2)/2)$.

Po wykonaniu stosownych rachunków otrzymujemy:

$$U^* = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad k(U^*) = \frac{\alpha\beta\gamma - \gamma^2}{\alpha^2}, \quad q(U^*) = \frac{2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta\gamma}{\alpha\gamma(\alpha\beta - \gamma)} = \frac{\alpha\gamma - 2\gamma}{\alpha\gamma},$$

$$k\left(\frac{2\beta - \alpha^2}{2}\right) = \frac{4\alpha^2\beta\gamma - 4\alpha\gamma^2 - \alpha^4\gamma}{4\alpha\beta - \alpha\gamma}, \quad q\left(\frac{2\beta - \alpha^2}{2}\right) = \frac{4\alpha^2\beta^2 - \alpha^4\beta - 8\alpha\beta\gamma + 4\gamma^2}{4\alpha^2\beta\gamma - 4\alpha\gamma^2 - \alpha^4\gamma}.$$

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

Wynikają stąd następujące implikacje:

$$\alpha^3 - 2(\alpha\beta - \gamma) \geq 0 \implies k = \frac{\alpha\beta\gamma - \gamma^2}{\alpha^2}, \quad q = \frac{\alpha\beta - 2\gamma}{\alpha\gamma} \quad (3.23)$$

$$\alpha^3 - 2(\alpha\beta - \gamma) < 0 \implies k = \frac{\alpha\gamma(4\alpha\beta - 4\gamma - \alpha^3)}{4(\alpha\beta - \gamma)}, \quad q = \frac{4(\alpha\beta - \gamma)^2 - \alpha^4\beta}{\alpha\gamma(4\alpha\beta - 4\gamma - \alpha^3)} \quad (3.24)$$

Ostatecznie warunki wystarczające **ABSS** układu (3.22) mogą być teraz ustalone w oparciu o Twierdzenie 2.5.3.

3.2.1.1. Przykłady liczbowe

Układ Dewey'a–Jury'ego. Układ ten odpowiada danym:

$$\alpha = 1.8, \quad \beta = 16.8, \quad \gamma = 16, \quad \phi(x) = 40F(x) ,$$

gdzie F jest funkcją lokalnie lipschitzowską. Z (3.24) wynika, że

$$k = \frac{57519}{2225} \approx 25.851236, \quad q = \frac{495899}{1150380} \approx 0.43107408 .$$

Warunek (2.89) jest spełniony i z Twierdzenia 2.5.3 otrzymujemy warunki wystarczające **ABSS** układu Dewey'a–Jury'ego,

$$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < \frac{57519}{89000} \approx k_1 = 0.6462809 \quad (3.25)$$

Na rysunku 3.4 dokonano graficznej interpretacji nierówności Popova dla układu Dewey'a–Jury'ego, z której wynika, że otrzymane wyżej warunki wystarczające **ABSS** nie mogą być polepszone.

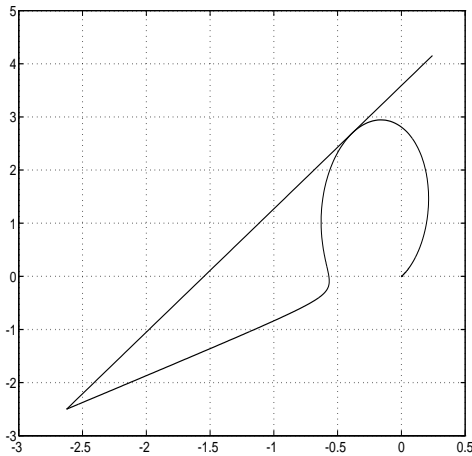
Układ Brocketta. Układ ten odpowiada danym:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1$$

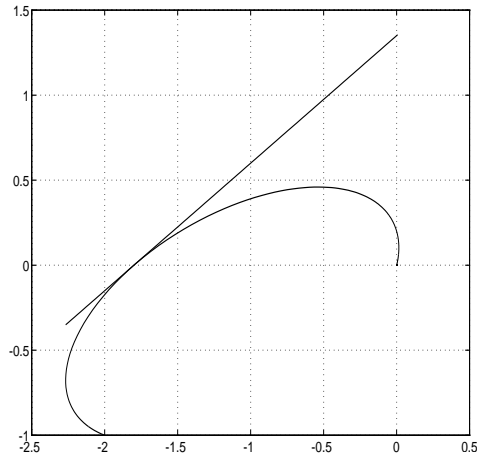
i był analizowany w [19]. Z (3.23) wynika, że

$$k = \frac{5}{9}, \quad q = \frac{4}{3} .$$

Warunek (2.89) jest spełniony i z Twierdzenia 2.5.3 wynika, że dla układu Brocketta prawdziwa jest hipoteza Ajzermana – patrz rysunek 3.5.



Rysunek 3.4. Graficzna interpretacja nierówności Popova dla układu Dewey'a-Jury'ego. Na osiach zaznaczono części: rzeczywistą i urojoną zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowej



Rysunek 3.5. Graficzna interpretacja nierówności Popova dla układu Brocketta. Na osiach zaznaczono części: rzeczywistą i urojoną zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowej

3.2.2. Układy z nieliniowością zależną od drugiej zmiennej stanu

Postać normalną równania różniczkowego:

$$x^{(4)} + dx^{(3)} + \gamma x^{(2)} + \varphi(\dot{x}) + ax = 0, \quad a, \gamma, d > 0, \quad \gamma^2 - 4a > 0 \quad (3.26)$$

można interpretować jako system Lurie (2.39) z:

$$n = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & -\beta & -\gamma & -d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F(\sigma) = \varphi(\sigma) - \beta\sigma, \quad \beta = \frac{\gamma d - d\sqrt{\gamma^2 - 4a}}{2} > 0.$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Widmo $\lambda(A)$ macierzy A leży w lewej domkniętej półpłaszczyźnie, przy czym na osi urojonej zlokalizowane są dokładnie dwie wartości własne: $\pm j\sqrt{\alpha}$, $\alpha = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4a}}{2}$. Transmitancja części liniowej wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{s}{s^4 + ds^3 + \gamma s^2 + \beta s + a} = \frac{s}{(s^2 + \alpha)(s^2 + ds + \gamma - \alpha)},$$

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

$$\operatorname{Res}_{s=\pm j\sqrt{\alpha}}(1+qs)G(s) = \frac{\gamma-2\alpha}{2[(\gamma-2\alpha)^2+d^2\alpha]} > 0 \quad (\gamma-2\alpha = \sqrt{\gamma^2-4a})$$

o ile

$$q = \frac{d}{\gamma-2\alpha} = \frac{d}{\sqrt{\gamma^2-4a}} > 0 .$$

Dla $q = \frac{d}{\sqrt{\gamma^2-4a}}$ mamy

$$\pi(\omega) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1+j\omega q)G(j\omega) = \frac{\omega^4 + (2\alpha + d^2 - kq - 2\gamma)\omega^2 + (\gamma - \alpha)^2}{k[(\gamma - \alpha - \omega^2)^2 + d^2\omega^2]} ,$$

skąd widać, że największą liczbą k , przy której spełniona jest nierówność Popowa (2.89) jest

$$k = d\sqrt{\gamma^2-4a} .$$

Warunek (2.89) jest spełniony i na podstawie Twierdzenia 2.5.3 ustalamy, że warunki wystarczające **ABSS** układu (3.26) mają postać

$$\frac{\gamma d - d\sqrt{\gamma^2-4a}}{2} < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \frac{\gamma d + d\sqrt{\gamma^2-4a}}{2} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad \varphi(0) = 0 .$$

Dla układu (3.26) jest więc słuszna hipoteza Ajzermana. Powyższe warunki pokrywają się z rezultatem Ogurcowa [10].

3.2.3. Układ z nieliniowością zależną od trzeciej zmiennej stanu

Postacią normalną równania różniczkowego

$$x^{(4)} + ax^{(3)} + \varphi(x^{(2)}) + \gamma\dot{x} + dx = 0, \quad a, d, \gamma > 0$$

jest układ Lurie (2.39) z

$$n = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d & -\gamma & -\beta & -a \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F(\sigma) = -\beta\sigma + \varphi(\sigma), \quad \beta = \frac{\gamma^2 + a^2d}{a\gamma} > 0 .$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Widmo $\lambda(A)$ macierzy A położone jest w lewej półpłaszczyźnie domkniętej, przy czym $\pm j\sqrt{\frac{\gamma}{a}}$ są wartościami własnymi macierzy położonymi na osi urojonej. Transmitancja części liniowej przyjmuje postać

3.2. UKŁADY CZWARTEGO RZĘDU

$$G(s) = c^T(A - sI)^{-1}b = \frac{s^2}{s^4 + as^3 + \beta s^2 + \gamma s + d} = \frac{s^2}{\left(s^2 + \frac{\gamma}{a}\right)\left(s^2 + as + \frac{ad}{\gamma}\right)},$$

$$\operatorname{Res}_{s=j\sqrt{\frac{\gamma}{a}}}(1 + qs)G(s) = \frac{\left(1 + jq\sqrt{\frac{\gamma}{a}}\right)\left(-\frac{\gamma}{a}\right)}{2j\sqrt{\frac{\gamma}{a}}\left(-\frac{\gamma}{a} + ja\sqrt{\frac{\gamma}{a}} + \frac{ad}{\gamma}\right)} > 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$q = \frac{\gamma^2 - a^2d}{a\gamma^2}.$$

Spełniony jest warunek (2.85). Nierówność częstotliwościowa

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \\ &= \frac{\gamma^2\omega^4 + (a^2\gamma^2 - 2a\gamma d - ka^2d)\omega^2 + a^2d^2}{\gamma^2k \left[\left(\frac{ad}{\gamma} - \omega^2\right)^2 + a^2\omega^2 \right]} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \mp\sqrt{\frac{\gamma}{a}} \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

jest równoważna nierówności wielomianowej

$$\gamma^2\omega^4 + (a^2\gamma^2 - 2a\gamma d - ka^2d)\omega^2 + a^2d^2 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Jest to trójmian względem ω^2 o wyróżniku

$$\Delta(k) = a^3 [ad^2k^2 - (2a\gamma^2d - 4\gamma d^2)k + a\gamma^4 - 4\gamma^2d].$$

Korzystając z Lematu 3.1.1/przypadek 1 ustalamy, że maksymalną wartością k , przy której jest spełniona nierówność (3.27) jest $k = \frac{\gamma^2}{d}$. Wówczas

$$\pi(\omega) = \frac{(\omega^2 - \frac{ad}{\gamma})^2}{\frac{\gamma^2}{d} \left[\left(\frac{ad}{\gamma} - \omega^2\right)^2 + a^2\omega^2 \right]} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Na mocy Lematu 2.6.1 spełnione są wszystkie założenia Twierdzenia 2.5.3, za wyjątkiem (2.41). Macierz $A + kbc^T$ jest hurwitzowska przy dowolnym $k > 0$. Mamy także $-\frac{1}{q} \notin \lambda(A)$. Istotnie,

$$-\frac{1}{q} \in \lambda(A) \iff da^3\gamma^2 + \frac{d}{\gamma}(a^2d - \gamma^2)^2 = 0.$$

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

Ostatnia równość nie zachodzi. Pokażemy teraz, że także $\frac{1}{q} \notin \lambda(A + kbc^T)$. Istotnie, wielomian charakterystyczny macierzy $A + kbc^T$,

$$s^4 + as^3 \left[\frac{\gamma^2 + a^2d}{a\gamma} + \frac{\gamma^2}{d} \right] s^2 + \gamma s + d$$

przyjmuje w punkcie $s = \frac{1}{q} = \frac{a\gamma^2}{\gamma^2 - a^2d}$ wartość dodatnią. Teraz, na mocy Uwag 2.5.4 i 2.6.3, poprzedniki implikacji (2.69), (2.70) nie są spełnione, a zatem warunek (2.68) z $k = \frac{\gamma^2}{d}$ wystarcza dla zagwarantowania **ABSS**. W odniesieniu do nieliniowości φ warunki sektorowe gwarantujące **ABSS** przyjmują postać

$$\frac{\gamma^2 + a^2d}{a\gamma} < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \frac{\gamma^2}{d} + \frac{\gamma^2 + a^2d}{a\gamma} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad \varphi(0) = 0 .$$

Dla porównania sektor Hurwitza dla φ jest równy $\left(\frac{\gamma^2 + a^2d}{a\gamma}, \infty \right)$.

3.2.4. Układ z nieliniowością zależną od czwartej zmiennej stanu

Postacią normalną równania różniczkowego

$$x^{(4)} + f(x^{(3)}) + \gamma x^{(2)} + \beta \dot{x} + \alpha x = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad \gamma^2 > 4\alpha \quad (3.28)$$

jest układ Lurie (2.39) z

$$n = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & -\mu \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$F(\sigma) = -\mu\sigma + f(\sigma), \quad \mu = \frac{\gamma\beta - \beta\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha}}{2\alpha} \left(> \frac{\beta}{\gamma} \right) .$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Widmo $\lambda(A)$ macierzy A położone jest w lewej półpłaszczyźnie domkniętej, przy czym $\pm j\sqrt{\frac{\beta}{\mu}}$ są wartościami własnymi macierzy położonymi na osi urojonej. Transmitancja części liniowej przyjmuje postać

$$G(s) = c^T(A - sI)^{-1}b = \frac{s^3}{s^4 + \mu s^3 + \gamma s^2 + \beta s + \alpha} = \frac{s^3}{\left(s^2 + \frac{\beta}{\mu}\right) \left(s^2 + \mu s + \frac{\alpha\mu}{\beta}\right)} .$$

Warunek

$$\operatorname{Res}_{s=j\sqrt{\frac{\beta}{\mu}}}(1+qs)G(s) > 0$$

jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$q = \frac{\mu^2\beta}{\alpha\mu^2 - \beta^2} (< 0) .$$

Nierówność częstotliwościowa

$$\begin{aligned} 0 \leq \pi(\omega) &= \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{k\beta\mu^2}{\beta^2 - \alpha\mu^2}\right)\omega^4 + \left(\mu^2 - \frac{2\alpha\mu}{\beta}\right)\omega^2 + \frac{\alpha^2\mu^2}{\beta^2}}{k \left[\left(\frac{\alpha\mu}{\beta} - \omega^2\right)^2 + \mu^2\omega^2 \right]} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \mp \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} \right\} \end{aligned}$$

jest równoważna nierówności wielomianowej

$$\left(1 - \frac{k\beta\mu^2}{\beta^2 - \alpha\mu^2}\right)\omega^4 + \left(\mu^2 - \frac{2\alpha\mu}{\beta}\right)\omega^2 + \frac{\alpha^2\mu^2}{\beta^2} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Na mocy Lematu 3.1.1 ustalamy, że zachodzą dwa następujące przypadki

1°. $\mu \geq \frac{2\alpha}{\beta}$. Wtedy

$$k = \frac{\beta^2 - \alpha\mu^2}{\mu^2\beta} = -\frac{1}{q} ,$$

2°. $\mu \leq \frac{2\alpha}{\beta}$. Wtedy

$$k = \frac{(4\alpha - \mu\beta)(\beta^2 - \alpha\mu^2)}{4\mu\alpha^2} \left(\leq \frac{\beta^2 - \alpha\mu^2}{\mu^2\beta} \right) .$$

Jeżeli

$$1 + (k + \mu)q + \gamma q^2 + \beta q^3 + \alpha q^4 \neq 0$$

to na mocy Uwagi 2.5.4, Lematu 2.6.1 i Twierdzenia 2.5.3 badany system jest absolutnie stabilny w sektorze $(0, k)$. Sektorem Hurwitza dla F jest

$$\left(0, \frac{\gamma\beta - 2\alpha\mu}{\alpha} = \frac{\beta^2 - \alpha\mu^2}{\alpha\mu} \right) .$$

W przypadku 1° zachodzi nierówność

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

$$\frac{\beta^2 - \alpha\mu^2}{\mu^2\beta} \leq \frac{\beta^2 - \alpha\mu^2}{2\alpha\mu} < \frac{\beta^2 - \alpha\mu^2}{\alpha\mu} \quad (3.29)$$

a w przypadku 2^o zachodzi oczywista nierówność

$$\frac{(4\alpha - \mu\beta)(\beta^2 - \alpha\mu^2)}{4\alpha\mu} < \frac{\beta^2 - \alpha\mu^2}{\alpha\mu} \quad (3.30)$$

Z nierówności (3.29), (3.30) wynika, że zawsze sektor **ABSS** wyznaczony metodą Popova jest istotnie mniejszy od sektora Hurwitza.

3.2.4.1. Przykłady liczbowe. Dla systemu (3.28) z parametrami $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $\gamma = 5$ mamy $\mu = 2$, $q = -\frac{2}{3}$. Odpowiada to przypadkowi 1^o. Zatem $k = \frac{3}{2}$. Ponieważ

$$1 + (k + \mu)q + \gamma q^2 + \beta q^3 + \alpha q^4 = -\frac{56}{81} \neq 0 .$$

Sektorem **ABSS** wynikającym z metody Popova jest $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, a sektorem Hurwitza $(0, 6)$.

Dla systemu (3.28) z parametrami $\alpha = 4$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$ mamy $\mu = 1$, $q = -\frac{1}{3}$. Odpowiada to przypadkowi 2^o. Zatem $k = \frac{9}{4}$. Ponieważ

$$1 + (k + \mu)q + \gamma q^2 + \beta q^3 + \alpha q^4 = \frac{121}{324} \neq 0 .$$

Sektorem **ABSS** wynikającym z metody Popova jest $\left(0, \frac{9}{4}\right)$, a sektorem Hurwitza $(0, 3)$.

3.2.5. Uwagi o pierwszym kontrprzykładzie Fittsa

Fitts [38] badał układu automatycznej regulacji o strukturze przedstawionej na rysunku 2.4, str. 37, przy czym

$$G(s) = \frac{s(s + \alpha)}{[(s + \beta)^2 + 0.9^2][(s + \beta)^2 + 1.1^2]} \quad (3.31)$$

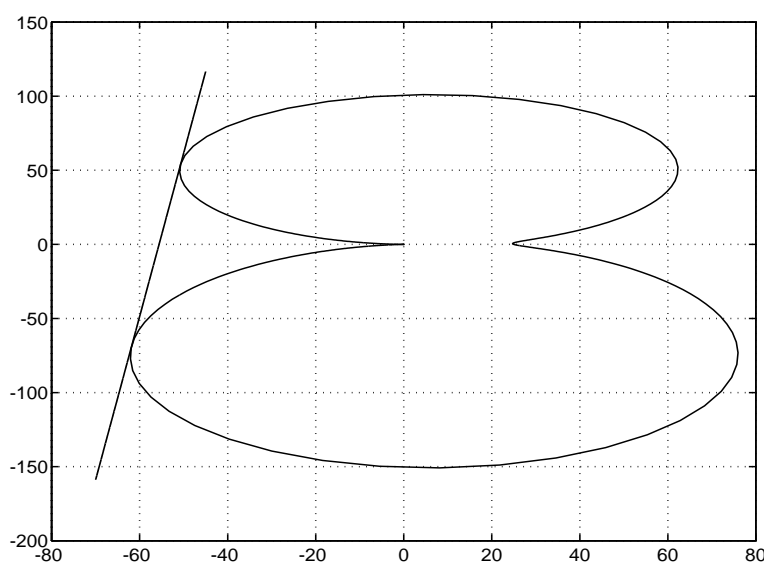
Stwierdził on eksperymentalnie [38], [128], że w przypadku charakterystyki nieliniowej $F(\sigma) = K\sigma^3$ i wartości parametrów K , α , β podanych w tabeli 3.2, w układzie powstają drgania okresowe Fitts zaobserwował generację drgań okresowych także dla charakterystyki nieliniowej $F(\sigma) = \sigma|\sigma|$ oraz dla charakterystyki wzmacniacza ze strefą martwą.

Zajmiemy się obecnie pewnymi aspektami przypadku pierwszego z tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Ograniczenia parametrów dla pierwszego kontrprzykładu Fitts'a

Przypadek	K	α	β
1	$0.1 \leq K \leq 1000$	0	0.01
2	10	$0 \leq \alpha \leq 0.02$	0.01
3	10	0	$0.01 \leq \beta \leq 0.75$

Z graficznej interpretacji nierówności (2.84) dla analizowanego systemu, przedstawionej na rysunku 3.6, Lematu 2.6.1, Uwagi 2.6.3 i Twierdzenia 2.5.3 wynika, że układ Lurie (2.39) z transmitancją (3.31) jest **ABSS** w sektorze $[0, \frac{1}{56})$.

**Rysunek 3.6.** Graficzna interpretacja nierówności Popova dla układu Fittsa. Na osiach zaznaczono części: rzeczywistą i urojoną zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowej

Rozważane przez Fitts'a nieliniowości nie leżą w tym sektorze – spełniają tylko warunek (2.75). Twierdzenie 2.5.1 może więc być użyte do oszacowania obszaru atrakcji trywialnego rozwiązania zerowego.

Piatnicki [110] udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.1. Przypuśćmy, że para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Niech $\text{Re } \lambda(A) < 0$, $c^T b = 0$. Załóżmy, także, że $k^0 \in (0, \infty]$ jest maksymalną

3. PRZYKŁADY. SYSTEMY ABSOLUTNIE STABILNE

taką liczbą, dla której istnieje $q \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{q} \notin \lambda(A)$ takie, że $\operatorname{Re} \lambda(A + k^0 bc^T) < 0$ oraz

$$\frac{1}{k^0} + \operatorname{Re}(1 + jq\omega)G(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Wtedy istnieje $\Delta > 0$ taka, że układ (2.39) jest **ABSS** w sektorze $[0, k^0 + \Delta]$ (w sektorze tym dopuszczamy tylko nieliniowości ciągłe i na tyle regularne, że rozwiązania (2.39) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^n).

W przypadku układu (3.31) mamy $k^0 = \frac{1}{56}$, $q = \frac{1}{11}$,

$$-c^T b = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu \in \left(-\frac{1010101}{25252500}, \infty \right) .$$

Z twierdzenia Piatnickiego wynika możliwość rozszerzenia w prawo wyznaczonego uprzednio sektora **ABSS**. Rezultaty Fitts'a pokazują, że rozszerzenie to jest względnie niewielkie.

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

4.1. PRZYKŁAD KRASOWSKIEGO

Pliss [111] oraz Walker i Clark [140] badali układ

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 - \alpha\phi(x_1) \\ \dot{x}_2 = -\beta\phi(x_1) \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$, ϕ jest funkcją ciągłą i na tyle regularną, że rozwiązania (4.1) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^2 (np. ϕ jest lokalnie akkretywna [44]). Układ (4.1) można interpretować jako układ Lurie (2.39) z

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna, warunki (2.49), (2.50) są spełnione. Ponieważ, zgodnie z (2.40),

$$G(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2}$$

więc

$$\pi(\omega) = -\omega \operatorname{Im} G(j\omega) = \alpha > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

0 jest podwójną wartością własną macierzy A , $c^T b \neq 0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \beta > 0 .$$

Spełnione są więc założenia Lematu 2.6.4 i z Twierdzenia 2.5.5 wynika, że związki:

$$\sigma\phi(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \neq 0, \quad \phi(0) = 0 \quad (4.2)$$

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma \phi(\xi) d\xi = \infty \quad (4.3)$$

są warunkami wystarczającymi na to, aby $x \equiv 0$ było **GAS** rozwiązaniem trywialnym układu (4.1). Uzyskane warunki wystarczające **ABSS** układu (4.1) pokrywają się z rezultatami pracy [140].

W przypadku $\alpha = \beta = 1$ zmiana zmiennych

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 - x_1 \end{array} \right\}$$

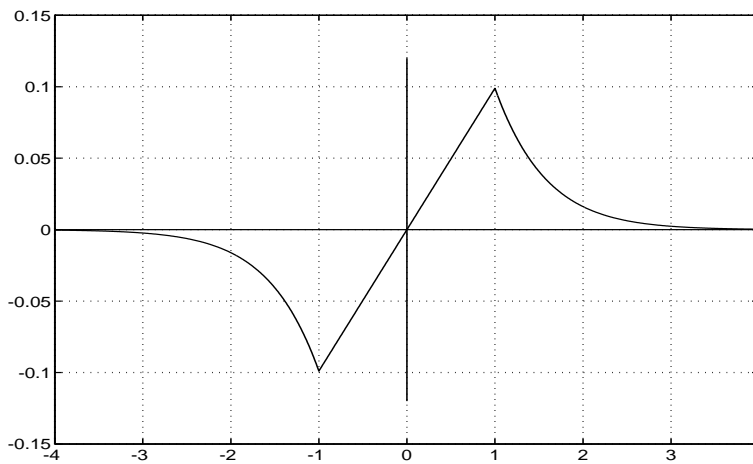
sprowadza (4.1) do postaci

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 + u_2 - \phi(u_1) \\ \dot{u}_2 = -u_1 - u_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Krasowski [10, str. 57 - 58] rozważył, przedstawioną na rysunku 4.1 funkcję ϕ ,

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} \frac{e^{-2\sigma}}{1 + e^{-\sigma}}, & \text{dla } \sigma \geq 1 \\ \frac{\sigma e^{-2}}{1 + e^{-1}}, & \text{dla } |\sigma| \leq 1 \\ -\frac{e^{-2|\sigma|}}{1 + e^{-|\sigma|}}, & \text{dla } \sigma \leq -1 \end{cases} \quad (4.5)$$



Rysunek 4.1. Wykres nieliniowości (4.5)

Spełnia ona warunek (4.2), ale nie spełnia (4.3). Dla $u_1 \geq 1$ krzywa $u_1 + u_2 - e^{-u_1} = 0$ pokrywa się z trajektorią układu (4.4), (4.5) i podobnie dla $u_1 \leq -1$ własność taką ma krzywa $u_1 + u_2 + e^{u_1} = 0$. W konsekwencji rozwiązania startujące z punktów $(1, -1 + e^{-1})$, $(-1, 1 - e^{-1})$ są nieograniczone.

System (4.4) z nieliniowością (4.5) jest znów systemem Lurie, z

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponadto nieliniowość (4.5) spełnia warunek (2.53) przy dowolnych $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$. Wszystkie założenia Twierdzenia 2.5.2 są spełnione, przy czym rozwiązanie układu (2.51) ma postać:

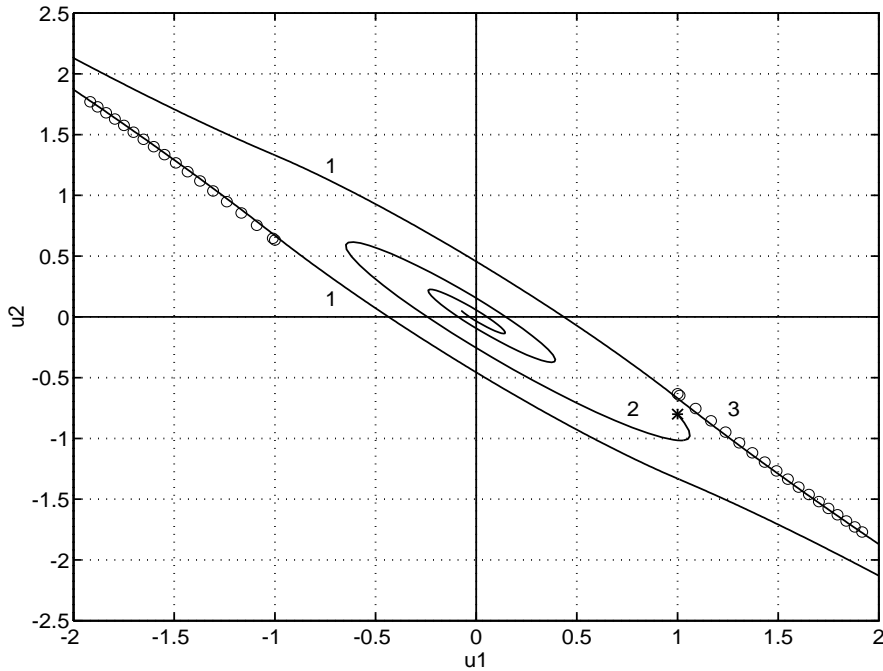
4.1. PRZYKŁAD KRASOWSKIEGO

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z zależności (2.54), (2.55) otrzymujemy, po dokonaniu przejść granicznych $\sigma_1 \rightarrow -\infty$, $\sigma_2 \rightarrow \infty$, następujący obszar atrakcji **AS** trywialnego rozwiązania zerowego:

$$\Omega_A = \left\{ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(u_1 + u_2)^2}{2} + \begin{cases} \frac{u_1^2 e^{-2}}{2(1 + e^{-1})}, & \text{gdy } |u_1| \leq 1 \\ \frac{3e^{-2} + 2e^{-1}}{2(1 + e^{-1})} - \ln(1 + e^{-1}) - e^{-|u_1|} + \ln(1 + e^{-|u_1|}), & \text{gdy } |u_1| \geq 1 \end{cases} \right\} < \\ < \frac{3e^{-2} + 2e^{-1}}{2(1 + e^{-1})} - \ln(1 + e^{-1}) \left. \right\}.$$

Zbiór ten przedstawiony jest na rysunku 4.2 wraz z trajektoriami Krasowskiego.



Rysunek 4.2. Obszar atrakcji w przykładzie Krasowskiego: 1 – brzeg obszaru atrakcji, 2 – trajektoria startująca z obszaru atrakcji, 3 – trajektoria nieograniczona

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

Przedstawione wyniki wykazują, że założenie (4.3) jest istotne dla zagwarantowania **GAS** rozwiązania zerowego układu (4.1). Mamy tu odmienną sytuację niż w przykładzie dyskutowanym w podrozdziale 3.1.2, kiedy to warunek (3.4), analogiczny do (4.3), nie był istotnym warunkiem **ABSS**. Dla (4.1) nie jest prawdziwą hipoteza Ajzermana. Wyznaczony obszar atrakcji prawie pokrywa się z pełnym obszarem przyciągania rozwiązania zerowego systemu.

4.2. PROSTY SYSTEM ELEKTROENERGETYCZNY

Modelem matematycznym dynamiki prostego systemu elektroenergetycznego złożonego z maszyny synchronicznej współpracującej z linią jest równanie różniczkowe

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} + a \frac{d\delta}{dt} + P_{em} \sin \delta = P_m \quad ,$$

gdzie $M > 0$ jest momentem inercji, $a > 0$ oznacza współczynnik tłumienia, $P_{em} = E_1 E_2 B_{12} > 0$ jest mocą elektromechaniczną, przy czym E_1 i E_2 są siłami elektromotorycznymi, odpowiednio maszyny i linii, a B_{12} – susceptancją przejścia od maszyny do linii, $\delta_1 - \delta_2$, przy czym δ_1, δ_2 oznaczają argumenty sił elektromotorycznych, odpowiednio maszyny i linii, $P_m > 0$ jest mocą mechaniczną (wejściową) na wale maszyny. Przykłady typowych zestawów parametrów podano w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Typowe zestawy parametrów prostego systemu elektroenergetycznego

Przypadek	a	M	P_{em}	P_m
1 [37]	0.037	0.01666	3.020	0.910
2 [59]	0.057	0.0138	3.020	0.910

Wprowadzając zmienne stanu $x_1 = \delta - \delta_0$, $x_2 = \dot{\delta}$, gdzie δ_0 oznacza najmniejsze, dodatnie rozwiązanie równania

$$\sin \delta = \frac{P_m}{P_{em}} \quad ,$$

otrzymamy układ równań różniczkowych

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - F(x_1) \end{array} \right\} \quad ,$$

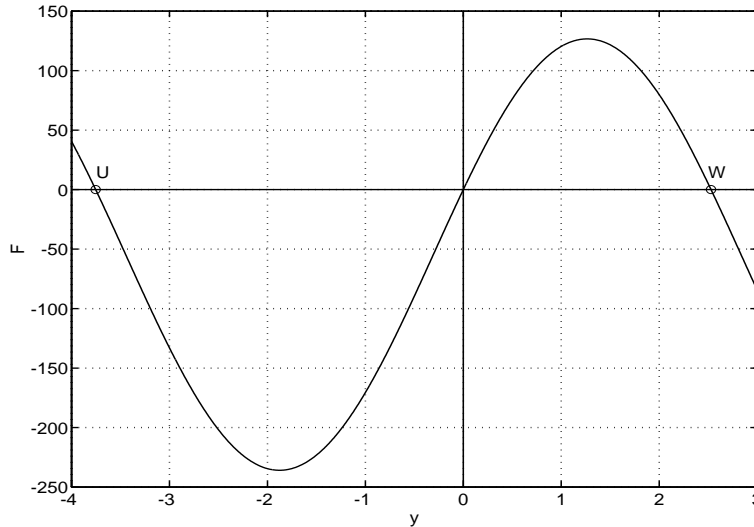
gdzie

$$\alpha = \frac{a}{M}, \quad F(x_1) = \beta [\sin(x_1 + \delta_0) - \sin \delta_0], \quad \beta = \frac{P_{em}}{M} \quad .$$

Rozważania będziemy ilustrować przykładem liczbowym odpowiadającym przypadkowi 1 z tabeli 4.1. Wtedy $\alpha = 2.2208884$, $\beta = 181.27251$, a nieliniowość F ma postać przedstawioną na rysunku 4.3, przy czym

4.2. PROSTY SYSTEM ELEKTROENERGETYCZNY

$$\begin{aligned} \delta_0 = 0.30608141, \quad -\pi - 2\delta_0 = -3.7537555, \quad \sin \delta_0 = 0.3013245, \\ \pi - 2\delta_0 = 2.5294298, \quad \cos \delta_0 = 0.95352166. \end{aligned}$$



Rysunek 4.3. Wykres funkcji nieliniowej F dla prostego systemu elektroenergetycznego. Zaznaczono punkty: $U = (\sigma_1, 0)$, $W = (\sigma_2, 0)$

Układ ten można interpretować jako system Lurie (2.39) z

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Transmitancja części liniowej wyraża się wzorem

$$G(s) = c^T (A - sI)^{-1} b = \frac{1}{s(s + \alpha)}.$$

4.2.1. Oszacowanie obszaru atrakcji w oparciu o Twierdzenie 2.5.1

Dokonyamy weryfikacji założeń Twierdzenia 2.5.1, za wyjątkiem warunku (2.41). Widmo $\lambda(A)$ macierzy A leży w lewej domkniętej półpłaszczyźnie, przy czym 0 jest jedyną i pojedynczą wartością własną macierzy A na osi urojonej,

$$\operatorname{Res}_{s=0} (1 + qs)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \alpha} = \frac{1}{\alpha} > 0.$$

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

Warunki (2.83) i (2.85) są więc spełnione. Ponieważ

$$\pi(\omega) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \frac{1}{k} + \frac{\alpha q - 1}{\omega^2 + \alpha^2} ,$$

więc przy $k = \infty$, $q \geq \frac{1}{\alpha}$ jest spełniona nierówność Popova (2.84). Do dalszych obliczeń bierzemy $k = \infty$, $q = \frac{1}{\alpha}$. Wtedy

$$\frac{1}{k} - qc^T b = 0, \quad \pi(\omega) \equiv 0 ,$$

i metoda faktoryzacji daje

$$\phi(s) \equiv 0, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Na mocy (2.44) mamy

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\alpha} \end{bmatrix} \geq 0$$

i nie może być $H > 0$, bo $-\frac{1}{q} = -\alpha \in \lambda(A)$, tzn. (2.89) nie zachodzi.

Przy $k = \infty$ warunek (2.41) jest spełniony z $\sigma_1 = -\pi - 2\delta_0$, $\sigma_2 = \pi - 2\delta_0$. Z Twierdzenia 2.5.1 wynika, że zerowy punkt równowagi jest **AS**, a jego podzbiór atrakcji może być określony ze wzorów (2.45), (2.46). Wobec $H \geq 0$, $\det H = 0$ mamy

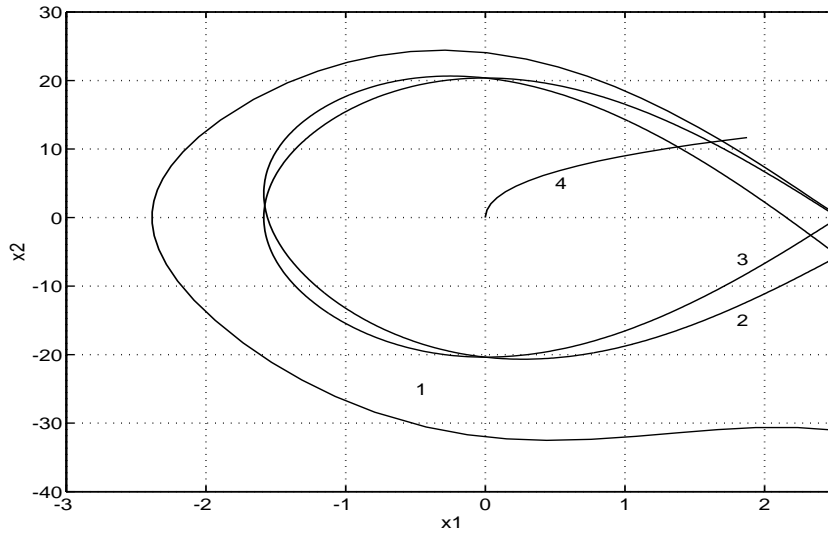
$$\eta = \min_{i=1,2} \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\sigma_i} [\sin(\sigma + \delta_0) - \sin \delta_0] d\sigma = \frac{\beta}{\alpha} [(-\pi + 2\delta_0) \sin \delta_0 + 2 \cos \delta_0] .$$

Zgodnie z (2.45) estymata obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi przyjmuje postać

$$\Omega_A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\alpha x_1^2}{2} + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2\alpha} + [-x_1 \sin \delta_0 - \cos(x_1 + \delta_0) + \cos \delta_0] \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} [(-\pi + 2\delta_0) \sin \delta_0 + 2 \cos \delta_0], -\pi - 2\delta_0 \leq x_1 \leq \pi - 2\delta_0 \right\} .$$

Dla dyskutowanego przykładu liczbowego zbiór ten przedstawiono na rysunku 4.4. Krzywa „1” przedstawia dokładny obszar atrakcji otrzymany na drodze symulacji, krzywa „2” odpowiada estymacie obszaru atrakcji uzyskanej metodą opisaną w podrozdziale 4.2.1, krzywa „3” jest estymatą obszaru atrakcji uzyskaną metodą opisaną w następnym podrozdziale 4.2.2 i krzywa „4” przedstawia trajektorię systemu pozwarciowego, która będzie wprowadzona w podrozdziale 4.2.3.

4.2. PROSTY SYSTEM ELEKTROENERGETYCZNY



Rysunek 4.4. Prosty system elektroenergetyczny

4.2.2. Oszacowanie obszaru atrakcji w oparciu o Twierdzenie 2.5.2

Zauważmy, że

$$\operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu > 0 .$$

Istotnie,

$$\det [sI - (A + \mu bc^T)] = s^2 + \alpha s + \mu .$$

Trójmian ten jest stabilny dla dowolnego $\mu > 0$ i warunek (2.49) jest spełniony.

Lemat 2.6.4 może być użyty do weryfikacji założenia (2.50) Twierdzenia 2.5.1 i ustalenia czy układ (2.51) posiada pożądane rozwiązanie. W tym celu analizujemy nierówność (2.93),

$$\pi(\omega) = \operatorname{Re}[j\omega G(j\omega)] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

W dyskutowanym przykładzie 0 jest jedyną wartością własną macierzy A na osi urojonej, $c^T b = 0$, ale

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < 0\} \cap \lambda(A) = \{-\alpha\} \neq \emptyset .$$

Teraz z Lematu 2.6.4 wynika, że są spełnione założenia Twierdzenia 2.5.2, przy czym $\sigma_1 = -\pi - 2\delta_0$, $\sigma_2 = \pi - 2\delta_0$. W celu rozwiązania układu (2.51) można posłużyć się procedurą faktoryzacyjno-realizacyjną. W kroku 1, dokonujemy faktoryzacji π ,

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

$$\pi(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{j\sqrt{\alpha}\omega}{j\omega(\alpha + j\omega)} \cdot \frac{-j\sqrt{\alpha}\omega}{-j\omega(\alpha - j\omega)},$$

skąd $\phi(s) = \sqrt{\alpha}s$.

W kroku 2, z tożsamości

$$\phi(s) = \sqrt{\alpha}s \equiv g^T \operatorname{adj}(A - sI)b = g_1 + g_2s$$

znajdujemy

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{\alpha} \end{bmatrix}.$$

W kroku 3, z układu (2.51) wyznaczamy macierz H ,

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

i wobec $\det A = 0$ nie może być $H > 0$, tzn. nie jest spełniony warunek (2.97).

Warunek (2.53) w Twierdzeniu 2.5.2 jest spełniony z $\sigma_1 = -\pi - 2\delta_0$, $\sigma_2 = \pi - 2\delta_0$.

Z tezy Twierdzenia 2.5.1 wynika, że zerowy punkt równowagi jest **AS**, a jego podobszar atrakcji może być określony ze wzorów (2.54), (2.55). Wobec $H \geq 0$ i $\det H = 0$ mamy

$$\eta = \min_{i=1,2} \beta \int_0^{\sigma_i} [\sin(\sigma + \delta_0) - \sin \delta_0] d\sigma = \beta [2 \cos \delta_0 - (\pi - 2\delta_0) \sin \delta_0].$$

Zgodnie z (2.54) estymata obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi przyjmuje postać

$$\Omega_A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_2^2}{2} + \beta [-\cos(x_1 + \delta_0) + \cos \delta_0 - x_1 \sin \delta_0] < \right. \\ \left. < \beta [2 \cos \delta_0 - (\pi - 2\delta_0) \sin \delta_0], \quad -\pi - 2\delta_0 \leq x_1 \leq \pi - 2\delta_0 \right\}.$$

Obszar ten zaznaczono na rysunku 4.4 jako krzywa „3” i porównano z otrzymaną poprzednio estymatą obszaru atrakcji.

4.2.3. Oszacowanie krytycznego czasu oczyszczenia zwarcia

Podamy teraz przykład wykorzystania otrzymanej estymaty obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi. Przypuśćmy, że układ znajdujący się dotychczas w równowadze, uległ awarii polegającej na zaistnieniu zwarcia doziemnego na linii. Wtedy $E_2 = 0$ i układ ewoluuje zgodnie z rozwiązaniem problemu początkowego

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 \delta}{dt^2} + a \frac{d\delta}{dt} = P_m \\ \delta(0) = \delta_0 \\ \dot{\delta}(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

4.3. MASZYNA SYNCHRONICZNA Z REGULATOREM PRĘDKOŚCI

Rozwiązanie to po transformacji do układu współrzędnych $0x_1x_2$ ma postać

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = -\frac{P_m}{\alpha^2 M} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{P_m}{\alpha M} t \\ x_2(t) = \frac{P_m}{\alpha M} (1 - e^{-\alpha t}) \end{array} \right\}$$

i jest nieograniczone. Przedstawiono go na rysunku 4.4 jako krzywą „4”. Jeżeli w pewnym momencie zwarcie zaniknie lub zostanie usunięte, to od tego momentu, układ będzie ewoluował zgodnie z wyjściowym modelem dynamiki. Położenie stanu układu w momencie oczyszczenia zwarcia w obszarze atrakcji zerowego punktu równowagi gwarantuje, że układ podąży w kierunku poprzedniego stanu równowagi, inaczej może dążyć do niezerowego położenia równowagi. Z technicznego punktu widzenia jest to niedopuszczalne. Dysponowanie estymatą Ω_A obszaru atrakcji umożliwia oszacowanie *krytycznego czasu oczyszczenia zwarcia*, tj. kresu górnego dopuszczalnych czasów, po upływie których układ powraca jeszcze do pierwotnego punktu równowagi.

4.3. MASZYNA SYNCHRONICZNA Z REGULATOREM PRĘDKOŚCI

Układ Lurie (2.39) z:

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D & -1 \\ 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F(\sigma) = -P_i(1 - \cos \sigma) + \sqrt{1 - P_i^2} \sin \sigma, \quad P_i \in (0, 1), \quad \alpha, D, \gamma > 0,$$

stanowi model matematyczny dynamiki maszyny synchronicznej z regulatorem prędkości, współpracującej z systemem energetycznym [102].

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna. Widmo $\lambda(A)$ macierzy A leży w lewej półpłaszczyźnie domkniętej, przy czym jedyną i pojedynczą wartością własną macierzy A na osi urojonej jest 0, a ponadto

$$\operatorname{Res}_{s=0}(1 + qs)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{\alpha}{\gamma + \alpha D} > 0,$$

przy czym

$$G(s) = \frac{s + \alpha}{s[s^2 + (\alpha + D)s + (\gamma + \alpha D)]}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \\ &= \frac{1}{k} + \frac{\omega^2[(\alpha + D)q - 1 - \alpha q] + [(1 + \alpha q)(\alpha D + \gamma) - \alpha(\alpha + D)]}{(\alpha D + \gamma - \omega^2)^2 + \omega^2(\alpha + D)^2} \end{aligned}$$

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

więc łatwo ustalić, że przy $k = \infty$ nierówność Popova (2.84) jest spełniona, o ile $q \geq \frac{1}{D}$. Przy $k = \infty$, $q = \frac{1}{D}$ lewą stronę nierówności Popova można przedstawić w postaci

$$\pi(\omega) = \frac{\gamma(\alpha + D)\omega^2}{D\omega^2[(\alpha D + \gamma - \omega^2)^2 + \omega^2(\alpha + D)^2]} .$$

Z (2.98) ÷ (2.99) otrzymujemy

$$\phi(s) = -\sqrt{\frac{\gamma(\alpha + D)}{D}}s \equiv -g^T \text{adj}(A - sI)b ,$$

skąd

$$g^T = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\alpha + D}{\gamma D}} \end{array} \right] .$$

Podstawiając wektor g do układu (2.44) i rozwiązując ten układ względem H otrzymujemy

$$H = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\alpha D + \gamma}{2\alpha} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\alpha} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2D} & 0 \\ -\frac{1}{2\alpha} & 0 & \frac{\alpha + D}{2\alpha\gamma D} \end{array} \right] > 0$$

(warunek (2.89) jest spełniony). Funkcję F można przedstawić w postaci

$$F(\sigma) = \sin(\sigma + \sigma_0) - \sin \sigma_0 ,$$

gdzie $\sin \sigma_0 = P_i$, $\sigma_0 \in (0, \pi/2)$. Funkcja ta czyni zadość warunkowi (2.41) z

$$\sigma_1 = -\pi - 2\sigma_0 < 0, \quad \sigma_2 = \pi - 2\sigma_0 > 0 .$$

Twierdzenie 2.5.1 pozwala wyznaczyć podobszar atrakcji rozwiązania zerowego,

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -\pi - 2\sigma_0 \leq x_1 \leq \pi - 2\sigma_0, \frac{\alpha D + \gamma}{2\alpha}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{\alpha}x_1x_3 + \frac{1}{2D}x_2^2 + \frac{\alpha + D}{2\alpha\gamma D}x_3^2 - \frac{1}{D}\cos(x_1 + \sigma_0) - \frac{\sin \sigma_0}{D}x_1 < \right. \\ \left. < \cos \sigma_0 - (\pi - 2\sigma_0)\sin \sigma_0 + \frac{(\pi - 2\sigma_0)^2\gamma}{2(\alpha + D)} \right\} .$$

W szczególności dla

$$D = 0.01, \quad P_i = 0.4, \quad \gamma = 0.1, \quad \alpha = 0.002$$

otrzymujemy zbiór

4.3. MASZYNA SYNCHRONICZNA Z REGULATOREM PRĘDKOŚCI

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -3.9646264 \leq x_1 \leq 2.318559, \quad 25.005x_1^2 + x_1x_2 + 50x_2^2 - \right. \\ \left. -500x_1x_3 + 3000x_3^2 - 100 \cos[x_1 + 0.41151685] - 40x_1 < 22.387907 \right\},$$

co jest wynikiem identycznym z uzyskanym w [102], przy znacznie mniejszym nakładzie obliczeń.

Pokażemy obecnie, że powyższy wynik można uzupełnić stosując Twierdzenie 2.5.2. W tym celu wyliczamy

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= \operatorname{Re}[j\omega G(j\omega)] = -\omega \operatorname{Im} G(j\omega) = \\ &= \frac{(\omega^2 D + \alpha^2 D + \alpha\gamma)\omega^2}{\omega^2 [(\gamma + \alpha D - \omega^2)^2 + \omega^2(\alpha + D)^2]} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A). \end{aligned}$$

Z (2.98) ÷ (2.99) otrzymujemy

$$\phi(s) = -\sqrt{\alpha^2 D + \alpha\gamma} s - \sqrt{D} s^2 \equiv s^2 g_2 + s(g_3\gamma + g_2\alpha + g_1) + g_1\alpha,$$

skąd

$$g^T = [g_1 \quad g_2 \quad g_3] = \left[0 \quad -\sqrt{D} \quad \frac{\sqrt{\alpha^2 D + \alpha\gamma} + \alpha\sqrt{D}}{\gamma} \right].$$

Z układu (2.49) otrzymujemy

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma + 2\alpha D + 2\sqrt{\alpha^2 D + \alpha\gamma D}}{2\gamma^2} \end{bmatrix} \geq 0$$

(warunek (2.97) nie jest spełniony). Twierdzenie 2.5.2 pozwala teraz uzyskać następujący podobszar atrakcji **AS** zerowego punktu równowagi

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_2^2}{2} - \cos(x_1 + \sigma_0) - x_1 \sin \sigma_0 + \frac{2\alpha D + \gamma + 2\sqrt{\alpha^2 D + \alpha\gamma D}}{2\gamma^2} x_3^2 < \right. \\ \left. < \cos \sigma_0 - (\pi - 2\sigma_0) \sin \sigma_0, \quad -\pi - 2\sigma_0 \leq x_1 \leq \pi - 2\sigma_0 \right\}.$$

Dla poprzednio dyskutowanego zestawu parametrów otrzymujemy

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -3.9646264 \leq x_1 \leq 2.318559, \right. \\ \left. -\cos(x_1 + 0.41151685) - 0.4x_1 + \frac{x_2^2}{2} + 5.1448286x_3^2 < -0.01090844 \right\}.$$

Zbiór Ω_A uzyskany poprzednio i aktualnie uzupełniają się wzajemnie. Pośrednie postacię zbioru Ω_A można znaleźć z Twierdzenia 2.5.1 biorąc $q \in (\frac{1}{D}, \infty)$.

4.4. PRZYKŁAD DEWEY'A–JURY'EGO

W związku z hipotezą Ajzermana, Dewey i Jury [34] rozpatrywali trójwymiarowy układ Lurie (2.39) z

$$A = \begin{bmatrix} -\gamma & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma > 0, \quad \gamma^2 > \beta > 0,$$

nieliniowość F jest ciągła, lokalnie akkretywna. Zauważmy, że para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna, widmo macierzy A ma postać $\lambda(A) = \{-j, j, -\gamma\}$. Transmitancja części liniowej wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{s^2 - \beta}{(s^2 + 1)(s + \gamma)}.$$

Stąd

$$\operatorname{Res}_{s=\pm j} (1 + qs)G(s) = \frac{\beta + 1}{2} > 0,$$

o ile $q = -\gamma < 0$. Dla $q = -\gamma$ mamy

$$\pi(\omega) = \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \frac{(1 - k\gamma)\omega^2 + (\gamma^2 - k\beta\gamma)}{k(\gamma^2 + \omega^2)}.$$

Nietrudno zauważyć, że największą liczbą k , przy której zachodzi nierówność (2.84) jest $k = \frac{1}{\gamma}$. Warunek (2.89) jest spełniony.

Na mocy Lematu 2.6.1 i Uwagi 2.6.3 wnosimy, że układ (2.44) posiada rozwiązanie względem pary (H, g) , które może być wyznaczone z pomocą Algorytmu 2.7.1.

W przypadku $q = -\gamma$, $k = \frac{1}{\gamma}$ mamy

$$\pi(\omega) = \frac{\gamma(\gamma^2 - \beta)(1 - \omega^2)^2}{(\gamma^2 + \omega^2)(1 - \omega^2)^2}.$$

Z (2.98)÷(2.99) wynika, że

$$\phi(s) = \sqrt{\gamma(\gamma^2 - \beta)}(s^2 + 1) \equiv -g^T \operatorname{adj}(A - sI)b,$$

skąd

$$g^T = \left[\gamma^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma^2 - \beta}} \quad -\gamma \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma^2 - \beta}} \quad \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma^2 - \beta}} \right].$$

Po uwzględnieniu postaci g , z układu (2.44) znajdujemy

4.4. PRZYKŁAD DEWEY'A-JURY'EGO

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^4(1+\beta)(\gamma^2-\beta)}{2(\gamma^2-\beta)(1+\beta)} & -\frac{\gamma^3}{2(\gamma^2-\beta)} & \frac{\beta(\gamma^2+1)}{2(\gamma^2-\beta)(1+\beta)} \\ -\frac{\gamma^3}{2(\gamma^2-\beta)} & \frac{2\gamma^2+\gamma^2\beta-\beta}{2(\gamma^2-\beta)(1+\beta)} & -\frac{\gamma}{2(\gamma^2-\beta)} \\ \frac{\beta(\gamma^2+1)}{2(\gamma^2-\beta)(1+\beta)} & -\frac{\gamma}{2(\gamma^2-\beta)} & \frac{1+\gamma^2}{2(\gamma^2-\beta)(1+\beta)} \end{bmatrix} > 0 .$$

Zatem

$$\det(H + \frac{kq}{2}cc^T) = \frac{\gamma^2}{8(1+\beta)^2} > 0 .$$

Z Twierdzenia 2.5.3 wynika, że warunkiem wystarczającym **ABSS** układu są nierówności

$$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < \frac{\sigma}{\gamma} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad F(0) = 0 \quad (4.6)$$

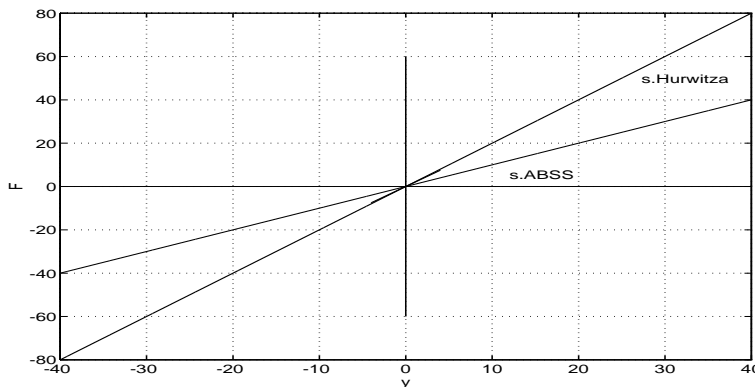
Funkcjonał Lapunowa ma postać (tej samej funkcji używał Barbašin [10, str. 163])

$$V(x) = \frac{(\gamma^2 x_1 - \gamma x_2 + x_3)^2}{2(\gamma^2 - \beta)} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{2(1 + \beta)} + \frac{x_2^2}{2(1 + \beta)} - \gamma \int_0^{x_1} F(\sigma) d\sigma ,$$

a jej pochodna wzdłuż rozwiązań badanego układu przyjmuje postać

$$\dot{V}(x) = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - \beta} (\gamma^2 x_1 - \gamma x_2 + x_3)^2 - F(x_1) [x_1 - \gamma F(x_1)] .$$

Przy wartościach liczbowych $\beta = 0.5$, $\gamma = 1$ sektorem Hurwitza dla nieliniowości F jest przedział $(0, 2)$, podczas gdy z (4.6) wynika, że sektorem **ABSS** jest przedział $(0, 1)$. Rysunek 4.5 pokazuje, że wykres odcinkowo-liniowej funkcji



Rysunek 4.5. Wykres nieliniowości używanej do symulacji układu Dewey'a i Jury'ego

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

$$F(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{15}{8}y, & \text{gdy } |y| \leq \frac{80}{3} \\ -\frac{465}{64}y + \frac{975}{4}\text{sign}(y), & \text{gdy } \frac{80}{3} \leq |y| \leq \frac{100}{3} \\ \frac{3}{64}y, & \text{gdy } |y| \geq \frac{100}{3} \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

leży w stożku Hurwitza, ale nie leży w stożku **ABSS**. W wyniku numerycznego całkowania równań systemowych w przedziale czasowym $[0, 100]$ i przy warunku początkowym $x(0) = [80 \ 50 \ 24.9]^T$ wykryto istnienie nietrywialnej trajektorii okresowej. Wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 4.6. Istnienie nietrywialnej trajektorii okresowej dowodzi, że dla analizowanego systemu jest nieprawdziwa hipoteza Ajzermana.

Twierdzenie 2.5.1 nie może być bezpośrednio użyte do wyznaczenia obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi, gdyż nieliniowość F nie spełnia warunku (2.41). Można jednak dokonać takiej modyfikacji równań systemu, że wszystkie założenia Twierdzenia 2.5.1 będą spełnione. Układ zmodyfikowany jest równoważny poprzedniemu i także może być interpretowany jako układ Lurie (2.39) z

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{29}{10} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{20} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

przy czym nową nieliniowością jest φ ,

$$\varphi(\sigma) = -F(\sigma) + 1.9\sigma.$$

Teraz mamy

$$G(s) = \frac{-s^2 + \frac{1}{2}}{s^3 + \frac{29}{10}s^2 + s + \frac{1}{20}},$$

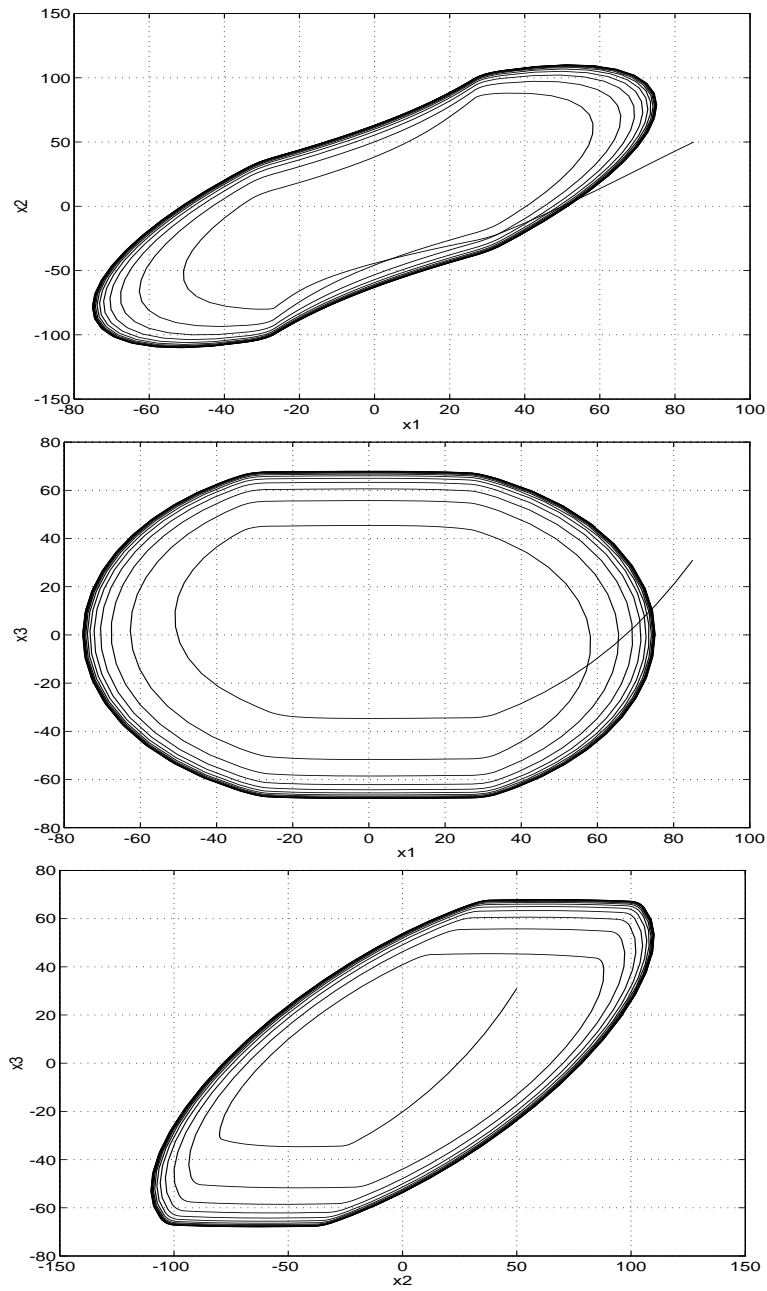
i w konsekwencji

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= \frac{1}{k} + \text{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) = \\ &= \frac{\omega^6(1 - qk) + \omega^4\left(\frac{641}{100} - \frac{29k}{10} + \frac{qk}{2}\right) + \omega^2\left(\frac{71}{100} - \frac{28k}{20} + \frac{kq}{2}\right) + \left(\frac{1}{400} + \frac{k}{40}\right)}{k\left[\left(\frac{1}{20} - \frac{29}{10}\omega^2\right)^2 + (\omega - \omega^3)^2\right]}. \end{aligned}$$

Weźmy $kq = 1$. Nierówność Popova (2.84) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność wielomianowa

$$\omega^4(2764 - 1160k) + \omega^2(484 - 560k) + (1 + 10k) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

4.4. PRZYKŁAD DEWEY'A-JURY'EGO



Rysunek 4.6. Wyniki symulacji układu Deweya i Jury'go

4. SYSTEMY ZE SKOŃCZONYMI OBSZARAMI ATRAKCJI

Korzystając z równania $\Delta(k) = 450k^2 - 810k + 279 = 0$ ustalamy, że maksymalną liczbą k , przy której zachodzi (2.84), jest

$$k = k(\alpha) = 0.9 + \sqrt{0.19} .$$

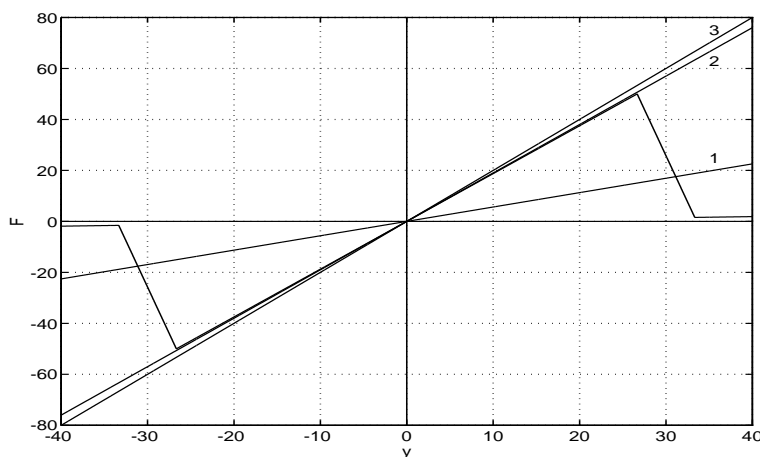
Układ jest zatem absolutnie stabilny dla lokalnie-lipschitzowskich nieliniowości φ spełniających warunek sektorowy

$$0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < 0.9 + \sqrt{0.19} \quad \forall \sigma \neq 0$$

lub, równoważnie, dla lokalnie-lipschitzowskich nieliniowości F spełniających warunek sektorowy

$$1 - \sqrt{0.19} < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < 1.9 \quad \forall \sigma \neq 0 .$$

Wykres funkcji (4.7) leży w sektorze $(1 - \sqrt{0.19}, 1.9)$, ale tylko nad przedziałem (σ_1, σ_2) , $-\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{15600}{529 - 64\sqrt{0.19}}$ – patrz rysunek 4.7.



Rysunek 4.7. Weryfikacja warunku sektorowego dla układu zmodyfikowanego: 1 – dolna granica stożka absolutnej stabilności, 2 – górna granica stożka absolutnej stabilności, 3 – górna granica stożka Hurwitza

Dla wartości $k = 0.9 + \sqrt{0.19}$, $kq = 1$ mamy

$$\pi(\omega) = \frac{1720 - 116\sqrt{19}}{40(9 + \sqrt{19})} \frac{\left(\omega^2 - \frac{8 + 5\sqrt{19}}{274}\right)^2}{\left[\left(\frac{1}{20} - \frac{29}{10}\omega^2\right)^2 + (\omega - \omega^3)^2\right]} .$$

4.4. PRZYKŁAD DEWEY'A-JURY'EGO

Wobec tego spektralny faktor ma postać

$$\phi(s) = -\sqrt{\frac{1720 - 116\sqrt{19}}{40(9 + \sqrt{19})}} \frac{s^2 + \frac{8 + 5\sqrt{19}}{274}}{s^3 + \frac{29}{10}s^2 + s + \frac{1}{20}} = -g^T(A - sI)^{-1}b .$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu (2.44):

$$g = \begin{bmatrix} -2.1193 \\ 1.2236 \\ -1.2236 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1.0176 & -0.7486 & 0.8644 \\ -0.7486 & 0.6328 & -0.7486 \\ 0.8644 & -0.7486 & 1.7287 \end{bmatrix} = H^T > 0 .$$

Obszar atrakcji zerowego punktu równowagi wyznaczamy ze wzorów (2.45), (2.46)

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |c^T x| \leq \sigma_2, \quad x^T H x + q \int_0^{c^T x} \varphi(\sigma) d\sigma < \eta \right\} ,$$

gdzie

$$\int_0^{c^T x} \varphi(\sigma) d\sigma = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{80}x_1^2, & \text{gdy } |x_1| \leq \frac{80}{3} \\ \frac{2933}{640}x_1^2 - \frac{975}{4}|x_1| + 3250, & \text{gdy } \frac{80}{3} \leq |x_1| \leq \frac{100}{3} \\ \frac{593}{640}x_1^2 - \frac{1625}{2}, & \text{gdy } |x_1| \geq \frac{100}{3} \end{array} \right\} ,$$

oraz

$$\eta = \frac{\sigma_2^2}{c^T H^{-1} c} + q \int_0^{\sigma_2} \varphi(\sigma) d\sigma = 204.7141 .$$

5. UKŁAD LURIE Z NIELINIOWOŚCIĄ WIELOMIANOWĄ

5.1. ESTYMATA OBSZARU ATRAKCJI UKŁADU LURIE

Jeżeli w układzie (2.39) nieliniowość F jest typu wielomianowego to, oprócz cytowanych dotychczas twierdzeń, do analizy stabilności takiego układu może być dodatkowo stosowany poniższy wynik.

Twierdzenie 5.1.1. Przypuśćmy, że

$$\operatorname{Re} \lambda(A) < 0 \quad (5.1)$$

para (A, c^T) jest obserwowalna,

$$F(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3 + \dots + a_m\sigma^m, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 2, 3, \dots, m .$$

Wtedy $x \equiv 0$ jest **AS** trywialnym rozwiązaniem układu (2.39), a zbiór

$$\Omega_A = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < \eta\} \quad (5.2)$$

gdzie H jest jednoznacznym rozwiązaniem macierzowego równania Lapunowa

$$A^T H + H A = -c c^T \quad (5.3)$$

oraz

$$\eta = \min_{\{x \in \mathbb{R}^n : 1 - 2b^T H x [a_2 + a_3 c^T x + \dots + a_m (c^T x)^{m-2}] = 0\}} x^T H x \leq \infty \quad (5.4)$$

(równość odpowiada **GAS**), jest podzbiorem obszaru atrakcji tego rozwiązania.

Dowód. Wobec (5.1) i obserwowalności pary (A, c^T) , równanie (5.3) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$ [2]. Zatem forma kwadratowa $V(x) = x^T H x$ jest dodatnio określona i dla niej $l_0 = \infty$, gdzie l_0 jest liczbą określoną w Lemacie 2.3.1. Pochodną formy V wzdłuż rozwiązań układu (2.39) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -x^T c c^T x \left\{ 1 - \frac{2b^T H x F(c^T x)}{x^T c c^T x} \right\} = \\ &= -x^T c c^T x \left\{ 1 - 2b^T H x [a_2 + a_3 c^T x + \dots + a_m (c^T x)^{m-2}] \right\} . \end{aligned}$$

Niech $l \in (0, \eta)$. Wtedy w Twierdzeniu 2.3.2 mamy

$$\Omega_l = \Omega_l^* = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l\}, \quad \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_l .$$

5.2. PRZYKŁAD. OSCYLATOR ASYMETRYCZNY

Ponadto jedynym rozwiązaniem (2.39) określonym na \mathbb{R} i zlokalizowanym całkowicie w zbiorze

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0 \right\} \cap \text{Int}\Omega_l = \{ x \in \text{Int}\Omega_l : c^T x = 0 \}$$

jest trywialne rozwiązanie zerowe. Istotnie, jeśli $x(\cdot, x_0)$ – rozwiązanie (2.39) określone na \mathbb{R} i zlokalizowane w E , to rozwiązanie to spełnia układ

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax \\ c^T x = 0 \end{array} \right\},$$

skąd otrzymujemy $c^T e^{tA} x_0 \equiv 0$. Wobec obserwowalności pary (A, c^T) mamy $x_0 = 0$ i ostatecznie $x(t, x_0) \equiv 0$. Z Twierdzenia 2.3.2 wynika, że dla dowolnego $l \in (0, \eta)$ zbiór Ω_l jest podzbiorem obszaru atrakcji **AS** trywialnego rozwiązania $x \equiv 0$. Po mnogościowym zsumowaniu tych obszarów atrakcji po $l \in (0, \eta)$ otrzymujemy tezę Twierdzenia 5.1.1. Ponadto z Uwagi 2.3.3 wynika, że gdy $\eta = \infty$ to $x \equiv 0$ jest **GAS**. \square

5.2. PRZYKŁAD. OSCYLATOR ASYMETRYCZNY

Rozważmy układ zwany *asymetrycznym oscylatorem LaSalle'a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - \xi x_2 - x_1^2 \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

gdzie $\xi > 0$ oznacza współczynnik tłumienia.

Jeżeli układ (5.5) potraktujemy jako układ Lurie (2.39) z:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\xi \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(\sigma) = \sigma^2$$

to założenia Twierdzenia 5.1.1 są spełnione, przy czym $m = 2$, $a_2 = 1$. Z (5.3) znajdujemy

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\xi}{4} + \frac{1}{2\xi} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4\xi} \end{bmatrix} = H^T > 0$$

i problem minimalizacyjny (5.4) przyjmuje postać

$$\eta = \min_{1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2\xi}x_2 = 0} \left(\frac{\xi}{4} + \frac{1}{2\xi} \right) x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{4\xi}x_2^2.$$

Minimum jest osiągane w punkcie $\begin{bmatrix} 0 \\ -2\xi \end{bmatrix}$ i wynosi ξ . Z pomocą (5.2) wyznaczamy następującą estymatę obszaru atrakcji początku układu

5. UKŁAD LURIE Z NIELINIOWOŚCIĄ WIELOMIANOWĄ

$$\Omega_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{2} \right) x_1^2 + \frac{\xi}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{4} x_2^2 < \xi^2 \right\} \quad (5.6)$$

Układ (5.5) można również potraktować jako układ Lurie (2.39) z:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\xi \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(\sigma) = 2\sigma + \sigma^2,$$

a następnie zastosować Twierdzenie 2.5.1 do uzyskania estymaty obszaru atrakcji. Dla $k = \infty$, $q = \frac{1}{\xi}$ założenia Twierdzenia 2.5.1 są spełnione przy $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = \infty$,

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\xi}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\xi} \end{bmatrix} = H^T, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det H = 0$, więc z (2.46) otrzymujemy $\eta = \frac{4}{3\xi}$. Zatem zgodnie z (2.45), z Twierdzenia 2.5.1 uzyskujemy następującą estymatę obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi

$$\Omega_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq -2, \quad \frac{\xi^2}{2} x_1^2 + \xi x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 + x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 < \frac{4}{3} \right\} \quad (5.7)$$

Także i Twierdzenie 2.5.2 może być zastosowane do uzyskania estymaty obszaru atrakcji. Założenia Twierdzenia 2.5.2 są spełnione przy $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = \infty$,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = H^T, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\xi} \end{bmatrix}.$$

Znowu $\det H = 0$, a więc z (2.55) otrzymamy $\eta = \frac{4}{3}$. Ostatecznie, z pomocą (2.54) wyznaczamy następującą estymatę obszaru atrakcji

$$\Omega_3 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq -2, \quad \frac{1}{2} x_2^2 + x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 < \frac{4}{3} \right\} \quad (5.8)$$

Obserwując wzory (5.6)÷(5.8) można zauważyć, że Ω_3 nie zależy od ξ , dla $\xi \searrow 0$ estymata Ω_1 dąży do początku układu, a Ω_2 do Ω_3 . Zatem dla małych wartości współczynnika tłumienia ξ estymaty (5.7), (5.8) są jednoznacznie lepsze niż (5.6). Dla dużych wartości współczynnika tłumienia ξ estymaty (5.7)÷(5.8) wzajemnie się uzupełniają, z tym, że część wspólna zbioru Ω_1 z osią $0x_2$ powiększa się ze wzrostem ξ , natomiast wspólne części zbiorów Ω_2 i Ω_3 z osią $0x_2$ są identyczne i nie zmieniają się ze wzrostem ξ .

5.2. PRZYKŁAD. OSCYLATOR ASYMETRYCZNY

W oparciu o ten sam funkcjonal Lapunowa, którego użyto celem otrzymania estymaty (5.7) można uzyskać nową, lepszą niż Ω_2 estymatę obszaru atrakcji

$$\Omega'_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > -2, \frac{1}{2} (\xi x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 < \frac{4}{3} + 2\xi^2 \right\} \quad (5.9)$$

Wynika to stąd, że wzdłuż tej części poziomic

$$V(x_1, x_2) = \frac{\xi^2}{2} x_1^2 + \xi x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 + x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 = V(-2, 0) = \frac{4}{3} + 2\xi^2 > \frac{4}{3} = V(-2, 2\xi) ,$$

która leży w półpłaszczyźnie $x_1 > -2$ nadal mamy

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\xi x_1^2 (2 + x_1) \leq 0 ,$$

a na wspólnej części zbioru $\partial\Omega'_2$ z prostą $x_1 + 2 = 0$ trajektorie skierowane są do wnętrza Ω'_2 . Zatem zbiór $\overline{\Omega'_2}$ jest inwariantny. Jest on także zwarty. Teraz każda trajektoria startująca z Ω'_2 dąży do największego zbioru mocno-inwariantnego zawartego w prostej $x_1 = 0$, ale takim zbiorem jest tylko początek układu. Przedstawiona idea zastąpienia estymaty (5.7) przez (5.9) pochodzi od Willemsa [151]. Zauważmy, że wspólna część zbioru Ω'_2 z osią $0x_2$ powiększa się ze wzrostem ξ .

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

Modelem matematycznym dynamiki wielu systemów fizycznych jest układ semiliniowy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BF[x(t)] \quad (6.1)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dla ustalonego $t \geq 0$, $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, F jest odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim z \mathbb{R}^n w \mathbb{R}^m , $F(0) = 0$. W szczególności (6.1) opisuje obwody elektryczne z nieliniowymi elementami aktywnymi [94], [17], [2], [89], z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym [152], [96], [33], [9, Rozdziały II, III], [40], [138]. Do omawianej klasy należy również szeroka gama modeli dynamiki systemów elektroenergetycznych – patrz [154], [103], [104], [60], [105], [106], [67], [68], [123], [107].

Definicja 6.1.1. Mówimy, że punkt równowagi $0 \in \mathbb{R}^n$ systemu (6.1) jest *stabilny (S)* jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \implies \|x(t, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 ,$$

gdzie $x(\cdot, x_0)$ oznacza rozwiązanie (6.1) z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Zbiór $\{x_0 \in \mathbb{R}^n : x(t, x_0) \rightarrow 0 \text{ gdy } t \rightarrow \infty\}$ jest nazywany *obszarem atrakcji* zerowego punktu równowagi systemu (6.1). Jeżeli obszar atrakcji stabilnego punktu równowagi $0 \in \mathbb{R}^n$ zawiera otwarte otoczenie początku układu to mówimy, że $0 \in \mathbb{R}^n$ jest *lokalnie asymptotycznie stabilny (AS)*. Jeżeli $0 \in \mathbb{R}^n$ jest stabilnym punktem równowagi, a jego obszar atrakcji jest równy \mathbb{R}^n to $0 \in \mathbb{R}^n$ jest nazywany *globalnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi (GAS)* systemu (6.1).

Sformułujemy i udowodnimy teraz twierdzenie, które jest uogólnieniem wielowymiarowej wersji twierdzenia Popova [33]. Dostarcza ono warunków dostatecznych lokalnej i globalnej stabilności punktu równowagi $0 \in \mathbb{R}^n$ systemu (6.1), niezależnie od $F \in \mathcal{M}$, gdzie \mathcal{M} jest podklasą klasy odwzorowań lokalnie lipschitzowskich z \mathbb{R}^n w \mathbb{R}^m .

Twierdzenie 6.1.2. Niech \mathcal{M} będzie taką klasą funkcji, że:

- (i) $\mathcal{M} \subset \{P : P \text{ jest odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim } P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, P(0) = 0\}$,
- (ii) Istnieją macierze $Q \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $M \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $M = M^T$, $L \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $K \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, $K = K^T$ i otwarty zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, takie, że:
 - (H1) dla każdego $F \in \mathcal{M}$ operator QF jest typu *gradientowego*, tzn.

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

$$\nabla \int_0^1 x^T QF(sx) ds = \nabla \int_0^x dy^T QF(y) = QF(x) ,$$

gdzie $\nabla W(x)$ oznacza gradient funkcjonału W w punkcie x ,

(H2) dla każdego $x \in \Omega$ i każdego $F \in \mathcal{M}$ mamy

$$\begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.2)$$

(H3) układ równań rozwiązujących Lurie

$$\begin{cases} A^T H + HA - M = -GG^T \\ HB + \frac{1}{2}A^T Q + L = -GV \\ K - \frac{1}{2}(Q^T B + B^T Q) = V^T V \end{cases} \quad (6.3)$$

posiada rozwiązanie (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $V \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$,

(H4) dla każdego $F \in \mathcal{M}$ punkt równowagi 0 jest jedyną całą trajektorią (6.1) zawartą w zbiorze

$$E = \left\{ x \in \Omega : \|G^T x + VF(x)\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix} = 0 \right\} \quad (6.4)$$

(H5) jeżeli $F \in \mathcal{M}_L = \mathcal{M} \cap \mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ to

$$\operatorname{Re} \sigma(A_F) < 0, \quad A_F := A + BF \quad (6.5)$$

gdzie $\sigma(A_F)$ oznacza widmo macierzy A_F ,

(H6) dla każdego $F \in \mathcal{M}$ i każdego $x \in \Omega \setminus \{0\}$ istnieje $\kappa \in \mathcal{M}_L$ takie, że

$$\int_0^1 x^T Q[F(sx) - s\kappa x] ds = 0 .$$

Wtedy punkt równowagi $0 \in \mathbb{R}^n$ jest **AS** dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$. Więcej, jeśli $\Omega = \mathbb{R}^n$ oraz

$$x^T Hx + \int_0^1 x^T QF(sx) ds \longrightarrow \infty, \quad \text{gdy} \quad \|x\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty \quad \forall F \in \mathcal{M} \quad (6.6)$$

to punkt równowagi $0 \in \mathbb{R}^n$ jest **GAS** dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$ (*stabilność absolutna* w klasie \mathcal{M}).

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

Dowód. Założenie **(i)** gwarantuje, że dla każdego $F \in \mathcal{M}$ rozwiązania (6.1) generują **LCSDS** na \mathbb{R}^n mający punkt równowagi w początku układu. Z **(H1)** wynika, że funkcjonal

$$V(x) = x^T H x + \int_0^1 x^T Q F(sx) ds$$

jest dobrze określony, ciągle różniczkowalny, a jego pochodną wzdłuż rozwiązań systemu (6.1) można przedstawić w postaci

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T H + H A & H B + \frac{1}{2} A^T Q \\ B^T H + \frac{1}{2} Q^T A & \frac{1}{2} (Q^T B + B^T Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix} .$$

Pokażemy teraz, że V spełnia wszystkie założenia Twierdzenia 2.3.2, niezależnie od $F \in \mathcal{M}$.

Na mocy **(H2)** i **(H3)** $\dot{V}(x)$ może być przedstawiony jako

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T H + H A - M & H B + \frac{1}{2} A^T Q + L \\ B^T H + \frac{1}{2} Q^T A + L^T & \frac{1}{2} (Q^T B + B^T Q) - K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix} = - \|G^T x + V F(x)\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \\ &\quad - \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix} \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall F \in \mathcal{M} . \end{aligned}$$

Z **(H1)** wynika, że dla każdego $F \in \mathcal{M}_L$, macierz QF jest symetryczna. Teraz na mocy **(H6)** dla dowolnego $x \in \Omega \setminus \{0\}$ i dowolnego $F \in \mathcal{M}$ istnieje macierz $\kappa \in \mathcal{M}_L$, taka, że

$$V(x) = x^T \left(H + \frac{1}{2} Q \kappa \right) x + \int_0^1 x^T Q [F(sx) - s \kappa x] ds = x^T \left(H + \frac{1}{2} Q \kappa \right) x .$$

Dla dowodu dodatniej określoności V na Ω , niezależnie od $F \in \mathcal{M}$, wystarczy pokazać, że

$$H + \frac{1}{2} Q F > 0 \quad \forall F \in \mathcal{M}_L \quad (6.7)$$

Dzięki **(H2)** mamy

$$M_F := M - F^T L^T - L F + F^T K F \leq 0 .$$

Jeżeli $F \in \mathcal{M}_L$ to oba funkcjonały V , $(-\dot{V})$ są formami kwadratowymi reprezentowanymi macierzami, odpowiednio $H + \frac{1}{2} Q F$, $G_F G_F^T - M_F$,

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

$$G_F := G + F^T V^T ,$$

a $X = H + \frac{1}{2}QF$ jest rozwiązaniem macierzowego równania Lapunowa

$$A_F^T X + X A_F = -G_F G_F^T + M_F \quad (6.8)$$

Na mocy **(H5)** i Twierdzenia 2.4.2 $X = H + \frac{1}{2}QF$ jest jedynym rozwiązaniem (6.8)

$$H + \frac{1}{2}QF = \int_0^\infty e^{tA_F^T} (G_F G_F^T - M_F) e^{tA_F} dt \geq 0 .$$

Więcej,

$$\begin{aligned} E_F &= \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0^T \left(H + \frac{1}{2}QF \right) x_0 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0^T e^{tA_F^T} (G_F G_F^T - M_F) e^{tA_F} x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0 \right\} . \end{aligned}$$

Dla wszystkich $\xi \geq 0$ mamy

$$x_0^T e^{-\xi A_F^T} e^{(t+\xi)A_F^T} (G_F G_F^T - M_F) e^{(t+\xi)A_F} e^{-\xi A_F} x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0 .$$

Stąd $e^{-\xi A_F} x_0 \in E_F$ dla $\xi \geq 0$ i E_F składa się z całych trajektorii systemu liniowego

$$\dot{x}(t) = A_F x(t) \quad (6.9)$$

Ponieważ dla $F \in \mathcal{M}_L$ (6.1) redukuje się do (6.9), to na mocy **(H4)**, E_F składa się tylko z zerowego punktu równowagi. W konsekwencji zachodzi (6.7).

Wykazaliśmy, że $V(x) > 0$ dla $x \in \Omega \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$, $\dot{V}(x) \leq 0$ dla $x \in \Omega$. Dodatkowo, wiemy, że zerowy punkt równowagi jest jedyną całą trajektorią układu (6.1) zawartą w E . Na mocy Twierdzenia 2.3.2 początek układu jest **AS**.

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}^n$ i (6.6) zachodzi to (6.1) jest **GAS** na mocy Uwagi 2.3.3. \square

Uwaga 6.1.3. Jeżeli odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^1 to operator QF jest typu gradientowego wtedy i tylko wtedy, gdy ma symetryczną macierz Jacobiego.

Lemat 6.1.4 (Popov). Jeżeli para (A, B) jest sterowalna to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zachodził warunek **(H3)** jest

$$\begin{aligned} \Pi(j\omega) := & K + L^T (A - j\omega I)^{-1} B + B^T (A^T + j\omega I)^{-1} L + \\ & + \frac{j\omega}{2} Q^T (A - j\omega I)^{-1} B - \frac{j\omega}{2} B^T (A^T + j\omega I)^{-1} Q + \\ & + B^T (A^T + j\omega I)^{-1} M (A - j\omega I)^{-1} B \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, j\omega \notin \sigma(A) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Więcej, jeśli (6.10) jest spełniona to rozwiązanie systemu (6.3) można otrzymać następująco:

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

1°. dokonać faktoryzacji

$$\pi(j\omega) = \psi(-j\omega)\psi(j\omega), \quad H(j\omega) = \Phi^T(-j\omega)\Phi(j\omega) \quad (6.11)$$

gdzie

$$\pi(j\omega) := \det(A^T + j\omega I) \det(A - j\omega I) \det \Pi(j\omega) ;$$

2°. znaleźć V i G z tożsamości

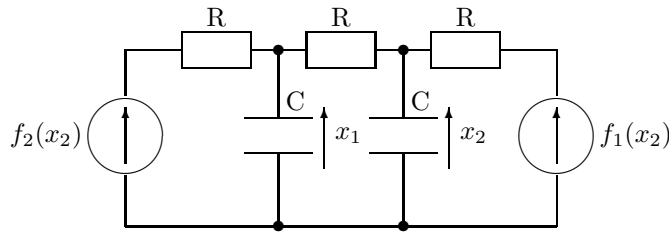
$$\Phi(s) = V - G^T(A - sI)^{-1}B, \quad \det \Phi(s) = \frac{(-1)^n \psi(s)}{\det(A - sI)} \quad (6.12)$$

3°. podstawić V i G do (6.3) i z powstającego układu określić H .

Dowód Lematu 6.1.4 podano w [113, Lemat 1] oraz [114].

6.1.1. Przykład. Generatory z filtrami RC

Dla wyjaśnienia zjawiska zatrząskiwania się generatorów z filtrami RC w [14], rozważono dwa obwody nieliniowe. Schemat pierwszego z nich jest przedstawiony na rysunku 6.1 (analiza drugiego jest analogiczna).



Rysunek 6.1. Generator z filtrem RC

Przeskalowując czas, jeśli potrzeba, można bez straty ogólności rozważać przyjąć $RC = 1$. Dzięki temu dynamika systemu może być opisana układem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_2) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

(6.13) ma postać układu semiliniowego (6.1) z

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_2) \end{bmatrix} .$$

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

Notacja quasiliniowa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 + \frac{f_2(x_2)}{x_2} \\ 1 & -2 + \frac{f_1(x_2)}{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

pozwala określić warunki Hurwitza dla f_1 i f_2 , mianowicie,

$$\frac{f_1(\sigma)}{\sigma} < 4, \quad \frac{f_2(\sigma)}{\sigma} < 3 - 2\frac{f_1(\sigma)}{\sigma} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0 .$$

Podstawiamy

$$\mathcal{M} = \left\{ F : F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_2) \end{bmatrix}, \quad f_1, f_2 \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \right. \\ \left. \frac{f_1(\sigma)}{\sigma} < 4, \quad \frac{f_2(\sigma)}{\sigma} < 3 - 2\frac{f_1(\sigma)}{\sigma} \quad \forall \sigma \neq 0 \right\}, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

w Twierdzeniu 6.1.2.

QF jest operatorem typu gradientowego przy założeniu, że $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, gdzie α, β są parametrami rzeczywistymi.

Z warunków Hurwitza dostajemy nierówność

$$[4x_2 - f_1(x_2)][3x_2 - 2f_1(x_2) - f_2(x_2)] \geq 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

którą można doprowadzić do postaci (6.2) przyjmując

$$M = M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{11}{2} & -2 \end{bmatrix}, \quad K = K^T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} .$$

Dla $\alpha = -2, \beta = -1$, (6.3) ma rozwiązanie (H, G, V) postaci

$$H = H^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \quad V = G = 0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) .$$

Zbiór E zdefiniowany w (6.4) pokrywa się z prostą $x_2 = 0$ i jedyną całą trajektorią (6.13) w E jest punkt równowagi $0 \in \mathbb{R}^2$. Zauważmy, że

$$F \in \mathcal{M}_L \iff F = \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 < 4, \quad \mu_2 < 3 - 2\mu_1 .$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

Teraz zachodzi (6.5), co wynika z faktu, że w naszym przykładzie, (6.2) odpowiada warunkom Hurwitza.

Celem sprawdzenia, że **(H6)** jest spełniony bierzemy

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x_2^2} \int_0^{x_2} f_1(s) ds, \quad x_2 \neq 0 \\ \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 < 4, \quad x_2 = 0 \end{array} \right\} \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x_2^2} \int_0^{x_2} f_2(s) ds, \quad x_2 \neq 0 \\ \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 < 3 - 2\varepsilon_1, \quad x_2 = 0 \end{array} \right\} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_L .$$

Dla zapewnienia **GAS**, niezależnie od $F \in \mathcal{M}$, należy założyć dodatkowo

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{7}{2}x_2^2 - 2 \int_0^{x_2} f_1(\sigma) d\sigma - \int_0^{x_2} f_2(\sigma) d\sigma \longrightarrow \infty \quad \text{gdy} \quad \|x\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty \quad (6.14)$$

Teraz pokażemy, że warunek (6.14) jest istotny dla zagwarantowania **GAS** zerowego punktu równowagi niezależnie od $F \in \mathcal{M}$. Biorąc $f_1(x_2) = -\phi(x_2) + 4x_2$, $f_2(x_2) = \phi(x_2) - 5x_2$, dostajemy układ

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2 + \phi(x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - \phi(x_2) \end{array} \right\} .$$

Liniowa transformacja $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1 + x_2$ redukuje powyższy układ do

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 - \phi(y_1) \\ \dot{y}_2 = -y_1 - y_2 \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

Jeżeli ϕ jest zdefiniowana wzorem (4.5) to, jak wykazano w rozdziale 4.1, system (6.15) posiada rozwiązania nieograniczone i początek układu nie jest **GAS**.

Przyczyną braku **GAS** w kontrprzykładzie Krasowskiego jest fakt, że wykres ϕ dąży asymptotycznie do granicy stożka Hurwitza. Dokładniej, $\frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \rightarrow 0$ gdy $|\sigma| \rightarrow \infty$. Przywołując związki pomiędzy funkcjami f_1 , f_2 i ϕ możemy ustalić, że w płaszczyźnie stosunków $\left(\frac{f_1(x_2)}{x_2}, \frac{f_2(x_2)}{x_2} \right)$ mamy $\frac{f_1(x_2)}{x_2} \nearrow 4$, $\frac{f_2(x_2)}{x_2} \searrow -5$ gdy $|x_2| \rightarrow \infty$ wzdłuż linii $\frac{f_1(x_2)}{x_2} + \frac{f_2(x_2)}{x_2} = -1$. Punkt $(4, -5)$ leży na brzegu obszaru Hurwitza. Zatem, wykres \bar{F} może asymptotycznie zdążyć do brzegu obszaru Hurwitza w taki sposób, że destabilizuje to układ.

6.1.2. Twierdzenie Popova dla systemów z jedną nieliniowością

Z Twierdzenia 6.1.2 i Lematu 6.1.4 można wyprowadzić następujące uogólnienie twierdzenia Popova dla systemów z jedną nieliniowością.

Twierdzenie 6.1.5. Niech $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że para (A, c^T) jest obserwowalna, a para (A, b) jest sterowalna i $G(s) := c^T(A - sI)^{-1}b$, $s \notin \sigma(A)$. Załóżmy, że zachodzi jeden z następujących zestawów warunków:

(I)

Istnieją $k_1, k_2, q \in \mathbb{R}$, $k_2 > k_1$ takie, że:

$$1 + (k_1 + k_2) \operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) + k_1 k_2 |G(j\omega)|^2 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \sigma(A) \quad (6.16)$$

$$\operatorname{Re} \sigma(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu \in (k_1, k_2) \quad (6.17)$$

(II)

Istnieją $k_1, q \in \mathbb{R}$ takie, że:

$$\operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) + k_1 |G(j\omega)|^2 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \sigma(A) \quad (6.18)$$

$$\operatorname{Re} \sigma(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu > k_1 \quad (6.19)$$

(III)

Istnieją $k_2, q \in \mathbb{R}$ takie, że:

$$- \operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) - k_2 |G(j\omega)|^2 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \sigma(A) \quad (6.20)$$

$$\operatorname{Re} \sigma(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu < k_2 .$$

Wtedy punkt równowagi $0 \in \mathbb{R}^n$ układu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf[c^T x(t)] \quad (6.21)$$

jest **AS** dla każdej lokalnie lipschitzowskiej funkcji f takiej, że $f(0) = 0$ i $\exists \sigma_1 < 0$, $\exists \sigma_2 > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_1 < \frac{f(\sigma)}{\sigma} < k_2, & \text{w przypadku (I)} \\ k_1 < \frac{f(\sigma)}{\sigma}, & \text{w przypadku (II)} \\ \frac{f(\sigma)}{\sigma} < k_2, & \text{w przypadku (III)} \end{array} \right\} \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2) \setminus \{0\} \quad (6.22)$$

Zbiór

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 \leq c^T x \leq \sigma_2, \quad x^T H x + q \int_0^{c^T x} f(s) ds < \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\sigma_i^2 \det H}{c^T (\operatorname{adj} H) c} + q \int_0^{\sigma_i} f(s) ds \right\} \right\} \quad (6.23)$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

jest podzbiorem obszaru atrakcji początku układu, $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$ jest taka, że para (H, g) , $g \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem układu rozwiązujących równań Lurie:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA - k_1 k_2 c c^T = -g g^T \\ Hb + \frac{q}{2} A^T c + \frac{k_1 + k_2}{2} c = -\sqrt{1 - q c^T b g} \end{array} \right\} \text{ dla (I)} \quad (6.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA - k_1 c c^T = -g g^T \\ Hb + \frac{q}{2} A^T c + \frac{1}{2} c = -\sqrt{-q c^T b g} \end{array} \right\} \text{ dla (II)} \quad (6.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA + k_2 c c^T = -g g^T \\ Hb + \frac{q}{2} A^T c - \frac{1}{2} c = -\sqrt{-q c^T b g} \end{array} \right\} \text{ dla (III)} \quad (6.26)$$

Dowolne rozwiązanie (H, g) układu Lurie może być otrzymane w sposób opisany poniżej. Znajdujemy wielomian $\phi(s)$ taki, że

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{lewa strona (6.16) jeśli (I)} \\ \text{lewa strona (6.18) jeśli (II)} \\ \text{lewa strona (6.20) jeśli (III)} \end{array} \right\} = \frac{\phi(j\omega)}{\det(A - j\omega I)} \cdot \frac{\phi(-j\omega)}{\det(A + j\omega I)} \quad (6.27)$$

oraz

$$\phi(s) = (-1)^n \sqrt{\gamma} s^n + \dots, \quad \gamma = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - q c^T b & \text{jeśli (I)} \\ -q c^T b & \text{jeśli (II) i (III)} \end{array} \right\} \quad (6.28)$$

Z tożsamości

$$\sqrt{\gamma} \det(A - sI) - \phi(s) = g^T \text{adj}(A - sI)b, \quad s \notin \sigma(A) \quad (6.29)$$

określamy $g \in \mathbb{R}^n$. Podstawiając ten wektor do układu Lurie i rozwiązując otrzymany w ten sposób układ, znajdujemy $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$.

Jeżeli $\sigma_1 = -\infty$, $\sigma_2 = \infty$ i jedna z poniższych implikacji jest spełniona

$$q < 0, \quad \det(H + \frac{k_2 q}{2} c c^T) = 0 \implies \lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma [k_2 s - f(s)] ds = \infty \quad (6.30)$$

$$q > 0, \quad \det(H + \frac{k_1 q}{2} c c^T) = 0 \implies \lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma [f(s) - k_1 s] ds = \infty \quad (6.31)$$

to wtedy $0 \in \mathbb{R}^n$ jest **GAS** (absolutna stabilność w sektorach Popova:

$$\begin{array}{ll} \underline{(k_1, k_2)} & \text{jeśli (I) ,} \\ \underline{(k_1, \infty)} & \text{jeśli (II) ,} \\ \underline{(-\infty, k_2)} & \text{jeśli (III) ,} \end{array}$$

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

i kreski poniżej nawiasów oznaczają, że odpowiednie granice są brane z dokładnością do spełnienia (6.30) lub (6.31)).

Dowód. Podamy dowód tylko w przypadku **(I)**, gdyż dowody pozostałych przypadków są analogiczne.

Kładziemy $m = 1$, $B = b$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\{ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : F(x) = f(c^T x), \quad f \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \right. \\ &\quad \left. \exists \sigma_1 < 0, \exists \sigma_2 > 0 : k_1 < \frac{f(\sigma)}{\sigma} < k_2 \quad \forall \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2) \setminus \{0\} \right\}, \\ Q &= qc, \quad M = k_1 k_2 c c^T, \quad L = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)c, \quad K = 1, \\ \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 < c^T x < \sigma_2\} \end{aligned}$$

w Twierdzeniu 6.1.2 i sprawdzamy warunki **(H1)** ÷ **(H6)**.

(H1) $QF(x) = qf(c^T x)c$ jest gradientem funkcjonału

$$q \int_0^1 x^T c f(sc^T x) ds = q \int_0^x f(c^T y) d(c^T y) = q \int_0^{c^T x} f(\xi) d\xi.$$

(H2)

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x \\ f(c^T x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -k_1 k_2 c c^T & \frac{(k_1 + k_2)c}{2} \\ \frac{(k_1 + k_2)c^T}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ f(c^T x) \end{bmatrix} = \\ &= [k_2 c^T x - f(c^T x)] [f(c^T x) - k_1 c^T x] \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall F \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

ponieważ warunki sektorowe nakładane na f są spełnione na przedziale (σ_1, σ_2) .

(H3) Ponieważ para (A, b) jest sterowalna to z Lematu 6.1.4 wynika, że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia (H, g) , $H = H^T$, rozwiązania (6.3), równoważnego (6.24), jest aby (6.16) zachodziło. Więcej, wzory faktoryzacyjne (6.11) redukują się do przypadku **(I)** wzorów (6.27), (6.28), podczas gdy tożsamość (6.29) wynika z (6.12).

(H4) $E = \{x \in \Omega : c^T x = 0, \quad g^T x = 0\}$. Teraz, spełnienie **(H4)** wynika z obserwowalności pary (A, c) .

(H5) $F \in \mathcal{M}_L$ (równoważnie $F = \mu c^T$, $\mu \in (k_1, k_2)$) i **(H5)** zachodzi co wynika bezpośrednio z (6.17).

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

(H6) Dla każdego $F \in \mathcal{M}$ i każdego $x \in \Omega \setminus \{0\}$ istnieje $\kappa \in \mathcal{M}_L$ (na mocy warunków sektorowych (6.22)), a mianowicie

$$\kappa = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{(c^T x)^2} \int_0^{c^T x} f(\sigma) d\sigma, & \text{gd}y \quad c^T x \neq 0 \\ \varepsilon, \quad \varepsilon \in (k_1, k_2), & \text{gd}y \quad c^T x = 0 \end{array} \right\} c^T$$

takie, że

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^T Q[F(sx) - s\kappa x] ds = \\ & = q \int_0^1 c^T x \left[f(sc^T x) - s \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{c^T x} \int_0^{c^T x} f(\sigma) d\sigma, & c^T x \neq 0 \\ 0, & c^T x = 0 \end{array} \right\} \right] ds = \\ & = q \int_0^1 c^T x f(sc^T x) ds - 2q \int_0^1 f(\xi) d\xi \int_0^1 s ds = \\ & = q \int_0^{c^T x} f(\xi) d\xi - q \int_0^{c^T x} f(\xi) d\xi = 0 . \end{aligned}$$

Zweryfikowaliśmy wszystkie założenia Twierdzenia 6.1.2 i dlatego lokalna stabilność początku układu wynika z tezy Twierdzenia 6.1.2.

Estymata obszaru atrakcji ma postać

$$\begin{aligned} \Omega_a = & \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sigma_1 < c^T x < \sigma_2, \quad V(x) = x^T Hx + q \int_0^{c^T x} f(\sigma) d\sigma < \right. \\ & \left. < \min_{c^T x = \sigma_i, i=1,2} V(x) \right\} . \end{aligned}$$

Minimum może być wyliczone analitycznie. Z pomocą metody mnożników Lagrange'a

$$\begin{bmatrix} H & \frac{1}{2}c \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q}{2}f(\sigma_i)c \\ \sigma_i \end{bmatrix} .$$

Stąd

$$\lambda = \frac{\sigma_i \det H + \frac{q}{2}f(\sigma_i)c^T(\text{adj } H)c}{-\frac{1}{2}c^T(\text{adj } H)c}, \quad Hx = \frac{\sigma_i \det H}{-\frac{1}{2}c^T(\text{adj } H)c} .$$

Mnożąc ostatni związek z lewej strony przez x^T otrzymujemy

$$\min_{c^T x = \sigma_i, i=1,2} V(x) = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{\sigma_i^2 \det H}{c^T(\text{adj } H)c} + q \int_0^{\sigma_i} f(\sigma) d\sigma \right\} .$$

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

W ten sposób udowodniliśmy (6.23). Zgodnie z Twierdzeniem 6.1.2 dla zachodzenia **GAS**, oprócz $\sigma_1 = -\infty$, $\sigma_2 = \infty$, powinniśmy założyć, że V jest *promieniowo-nieograniczony*, tj., warunek (6.6) powinien być spełniony. Z dowodu Twierdzenia 6.1.2 wiemy, że

$$H + \frac{\mu q}{2} cc^T > 0 \quad \forall \mu \in (k_1, k_2) \quad (6.32)$$

Ponieważ funkcja $\mu \mapsto \lambda_{\min}(H + \frac{\mu q}{2} cc^T)$ jest ciągła, więc mamy $H + \frac{k_i q}{2} cc^T \geq 0$, $i = 1, 2$. Zauważmy, że $(n-1)$ -wymiarowa hiperpłaszczyzna $c^T x = 0$ leży w zbiorze $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T(H + \frac{k_i q}{2} cc^T)x > 0\} \cup \{0\}$, gdyż w przeciwnym przypadku, istniałby wektor $d \in \mathbb{R}^n$ taki, że $c^T d = 0$, $d^T H d \leq 0$, co jest sprzeczne z (6.32). Zatem albo

1°. $H + \frac{k_i q}{2} cc^T > 0$, albo

2°. $\ker(H + \frac{k_i q}{2} cc^T) \oplus \ker cc^T = \mathbb{R}^n$.

Jeśli $q = 0$ to oczywiście $H > 0$ i $V(x) = x^T H x \rightarrow \infty$ gdy $\|x\| \rightarrow \infty$.

Jeśli $q > 0$ to bierzemy $i = 1$ i na mocy warunków sektorowych nakładanych na f mamy

$$q \int_0^{c^T x} [f(\sigma) - k_1 \sigma] d\sigma \geq 0 \quad (= 0 \text{ dla } c^T x = 0) .$$

Jeżeli 1° zachodzi to

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T \left(H + \frac{k_1 q}{2} cc^T \right) x + q \int_0^{c^T x} [f(\sigma) - k_1 \sigma] d\sigma \geq \\ &\geq x^T \left(H + \frac{k_1 q}{2} cc^T \right) x \rightarrow \infty \text{ gdy } \|x\| \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Jeżeli 2° zachodzi to

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_0 + d) = x_0^T \left(H + \frac{k_1 q}{2} cc^T \right) x_0 + 2d^T \left(H + \frac{k_1 q}{2} cc^T \right) x_0 + \\ &+ d^T \left(H + \frac{k_1 q}{2} cc^T \right) d + q \int_0^{c^T x_0 + c^T d} [f(\sigma) - k_1 \sigma] d\sigma = d^T H d + \\ &+ q \int_0^{c^T x_0} [f(\sigma) - k_1 \sigma] d\sigma \rightarrow \infty \text{ gdy } \|x_0\| + \|d\| \rightarrow \infty \quad (\Leftrightarrow \|x\| \rightarrow \infty) . \end{aligned}$$

Jeśli $q < 0$ bierzemy $i = 2$. Dzięki warunkom sektorowym dla f dostajemy

$$(-q) \int_0^{c^T x} [k_2 \sigma - f(\sigma)] d\sigma \geq 0 \quad (= 0 \text{ dla } c^T x = 0)$$

i postępujemy podobnie jak dla $q > 0$. □

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

Uwaga 6.1.6. W przypadku (II) można bez straty ogólności rozważać zakładając, że $q \geq 0$, a w przypadku (III), że $q \leq 0$. Istotnie, ze stosowanej wersji nierówności (6.32) dla przypadku (II) dostajemy $c^T H c + \frac{\mu q}{2} \|c\|^4 > 0$ gdy $\mu \rightarrow \infty$, do daje $q \geq 0$. W przypadku (III) należy wziąć $\mu \rightarrow -\infty$.

Uwaga 6.1.7. Zakładając

$$X(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad Y(\omega) = k_1 k_2 \operatorname{Im}^2 G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega)$$

możemy (6.16) zapisać jako

$$Y(\omega) \geq -k_1 k_2 X^2(\omega) - (k_1 + k_2)X(\omega) - 1 .$$

Nierówność (6.16) oznacza, że plot $\{(X(\omega), Y(\omega))\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ jest zlokalizowany w tej części płaszczyzny $0XY$, ograniczonej krzywą $Y = -k_1 k_2 X^2 - (k_1 + k_2)X - 1$, w której znajduje się początek układu. Krzywa ta jest parabolą o miejscach zerowych $(-\frac{1}{k_1}, 0)$, $(-\frac{1}{k_2}, 0)$ przechodzącą przez punkt $(0, -1)$, o ile $k_1 k_2 \neq 0$. Jeżeli $k_1 k_2 = 0$ to ta parabola degeneruje się do linii prostej przechodzącej przez punkty $(-\frac{1}{k_1}, 0)$ lub $(-\frac{1}{k_2}, 0)$ i $(0, -1)$.

Uwaga 6.1.8. Nierówność częstotliwościowa (6.16) może być równoważnie zapisana w postaci

$$\frac{1}{k_2 - k_1} + \operatorname{Re} \frac{G(j\omega)}{1 + k_1 G(j\omega)} - \frac{\omega q}{k_2 - k_1} \operatorname{Im} \frac{G(j\omega)}{1 + k_1 G(j\omega)} \geq 0 ,$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \sigma(A + k_1 b c^T)$$

tj., jako klasyczna nierówność Popova

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} G_0(j\omega) - \omega q_0 \operatorname{Im} G_0(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \sigma(A + k_1 b c^T) ,$$

$$k = k_2 - k_1, \quad q_0 = \frac{q}{k_2 - k_1}, \quad G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)} .$$

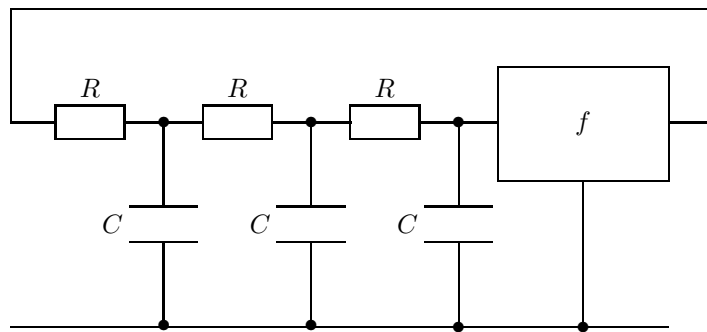
Obszar Hurwitza dla układu skończenie wymiarowego z jedną nieliniowością jest unią co najwyżej skończonej ilości otwartych, najogólniej nieograniczonych interwałów. W tym przypadku, warunki na to, aby wykres nieliniowości był zlokalizowany w sektorze, mogą być zapisane jako forma kwadratowa argumentów x i F , typu (6.2). Jednakowoż, dla systemu z wieloma nieliniowościami, obszar Hurwitza

rzadko może być wyrażony nierównością (6.2). Ma to miejsce w przykładzie dyskuutowanym w podrozdziale 6.1.1, ale zazwyczaj wszystko co możemy zrobić to rozważyć taką nierówność (6.2), która opisuje otwarty podzbiór obszaru Hurwitza.

Dalsze polepszenie warunków zapewniających **GAS** może być osiągnięte przez zawężenie klasy dopuszczalnej nieliniowości z jednoczesną modyfikacją konstrukcji funkcjonału Lapunowa.

6.1.3. Przykład. Aspekty strukturalne metody Popova

Rozważmy obwód elektryczny przedstawiony na rysunku 6.2, złożony z filtra drabinkowego RC – RC – RC i nieliniowego, napięciowo-napięciowego sprzężenia zwrotnego, opisanego lokalnie lipschitzowską funkcją $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$.



Rysunek 6.2. Nieliniowy obwód elektryczny z filtrem drabinkowym RC – RC – RC

Sprzężenie takie można zrealizować z wykorzystaniem elementów aktywnych. Przyjmijmy napięcia na kondensatorach jako zmienne stanu. Dla zbadania stabilności układu skala czasu jest nieistotna i bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć $RC = 1$. Z równań Kirchoffa wynika model dynamiki w postaci układu Lurie (6.21) z:

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$G(s) = c^T(A - sI)^{-1}b = \frac{-1}{s^3 + 5s^2 + 6s + 1}.$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna. Macierz $(A + \mu bc^T)$ jest stabilna dla tych μ , dla których wielomian $s^3 + 5s^2 + 6s + 1 - \mu$ ma zera w $\text{Re } s < 0$. Zastosowanie kryterium Hurwitza daje $-29 < \mu < 1$.

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINEOWYCH

Szukamy warunków typu sektorowego nakładanych na f gwarantujących **GAS** zerowego punktu równowagi. Stożek **ABSS** zawiera się w stożku Hurwitza, zatem muszą zachodzić nierówności $k_1 \geq -29$, $k_2 \leq 1$.

Próbujemy przyjąć: $k_1 = -29$, $k_2 = 1$. Nierówność częstotliwościowa (6.16) przyjmuje postać

$$\pi(\omega) = 1 - 28 \operatorname{Re} G(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} G(j\omega) - 29 |G(j\omega)|^2 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

i zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\omega^4 + (13 + q)\omega^2 - (114 + 6q) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Dla zbadania ostatniej nierówności posłużymy się Lematem 3.1.1 podstawiając w nim $P = 13 + q$, $Q = -114 - 6q$. Zatem $\Delta = (13 + q)^2 + 456 + 24q = (q + 25)^2 \geq 0$. Nierówności $P \geq 0$, $Q \geq 0$ są sprzeczne. Stąd $\Delta = 0$, co daje $q = -25$. Ostatecznie

$$k_1 = -29, \quad k_2 = 1, \quad q = -25, \quad \gamma = 1 - qc^T b = 1$$

i wtedy

$$\pi(\omega) = \frac{\omega^2(\omega^2 - 6)^2}{(1 - 5\omega^2)^2 + (6\omega - \omega^3)^2} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Z (6.27) otrzymujemy

$$\phi(s) = -s^3 - 6s = \sqrt{\gamma} \det(A - sI) - g^T \operatorname{adj}(A - sI)b .$$

Po elementarnych rachunkach dostajemy

$$g^T = [-5 \quad 15 \quad -11] .$$

Podstawiając wszystkie znane wielkości do (6.24), dochodzimy do równania

$$AH + HA = -gg^T - 29cc^T = \begin{bmatrix} -25 & 75 & -55 \\ 75 & -225 & 165 \\ -55 & 165 & -150 \end{bmatrix} .$$

Rozwiązując to równanie dostajemy

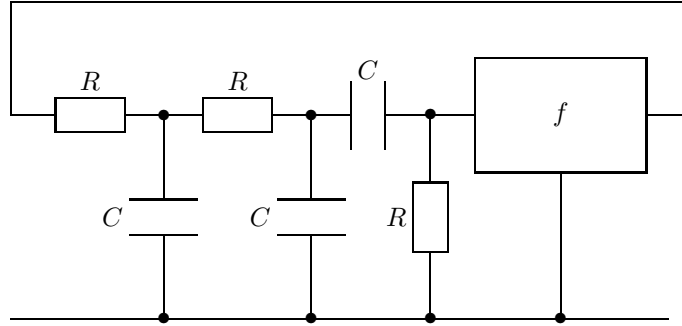
$$H = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{5}{2} & \frac{25}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{95}{2} & -15 \\ \frac{25}{2} & -15 & 60 \end{bmatrix}, \quad H + \frac{qk_2}{2}cc^T = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{5}{2} & \frac{25}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{95}{2} & -15 \\ \frac{25}{2} & -15 & \frac{95}{2} \end{bmatrix} .$$

Stosując kryterium Sylwestra stwierdzamy, że $H + \frac{qk_2}{2}cc^T > 0$. Tak więc $q < 0$, $\det\left(H + \frac{qk_2}{2}cc^T\right) > 0$ i dodatkowe warunki stabilności są zbędne (poprzednik implikacji (6.30) nie jest spełniony).

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

System jest **GAS** dla lokalnie lipschitzowskich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $-29 < \frac{f(\sigma)}{\sigma} < 1$ dla każdego $\sigma \neq 0$, $f(0) = 0$. Stożek **ABSS** pokrywa się ze stożkiem Hurwitza, co oznacza, że dla badanego systemu prawdziwa jest hipoteza Ajzermana.

Rozważmy teraz układ z filtrem drabinkowym $RC-RC-CR$ przedstawiony na rysunku 6.3 (zamiana położenia elementów R i C w ostatniej gałęzi w stosunku do układu z rysunku 6.2).



Rysunek 6.3. Nieliniowy obwód elektryczny z filtrem drabinkowym $RC-RC-CR$

Modelem matematycznym dynamiki tego układu jest układ Lurie z

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$G(s) = \frac{-s}{s^3 + 5s^2 + 6s + 1}.$$

Macierz $A + \mu bc^T$ jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $s^3 + 5s^2 + (6 - \mu)s + 1$ jest hurwitzowski, co zachodzi dla $\mu < 29/5$.

Próbujemy przyjąć $k_1 = -\infty$, $k_2 = 29/5$. Nierówność częstotliwościowa (6.20) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność wielomianowa

$$(1 + 5q)(1 - 5\omega^2) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

co ma miejsce tylko gdy $q = -1/5$ (porównać z Uwagą 6.1.6). Wtedy $\pi(\omega) \equiv 0$, co natychmiast daje $\phi \equiv 0$. Wobec $\gamma = -qc^T b = 0$ z (6.29) otrzymujemy $g = 0 \in \mathbb{R}^3$ i pierwsze równanie układu Lurie (6.26) przyjmuje postać

$$AH + HA = -\frac{29}{5}cc^T.$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

Stąd

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{11}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{11}{10} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}, \quad H + \frac{qk_2}{2}cc^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{21}{50} & -\frac{13}{25} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{13}{25} & \frac{61}{50} \end{bmatrix}.$$

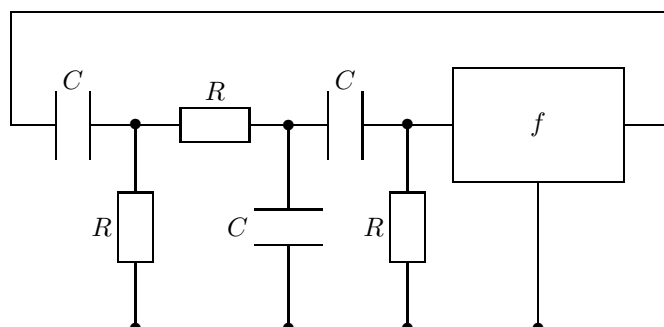
Zatem $q < 0$ i $\det \left(H + \frac{qk_2}{2}cc^T \right) = 0$. Zgodnie z Twierdzeniem 6.1.5 dla zagwarantowania **ABSS** systemu w klasie lokalnie lipschitzowskich funkcji f należy do warunku sektorowego

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma} < \frac{29}{5} \quad \forall \sigma \neq 0, \quad f(0) = 0$$

dopisać, wynikający z (6.30), warunek

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma \left[\frac{29}{5}z - f(z) \right] dz = \infty.$$

Rozważmy teraz układ z filtrem drabinkowym $CR-RC-CR$ przedstawiony na rysunku 6.4 (zmiana położenia elementów R i C w ostatniej oraz w pierwszej gałęzi w stosunku do układu z rysunku 6.2).



Rysunek 6.4. Nieliniowy obwód elektryczny z filtrem drabinkowym $CR-RC-CR$

Modelem matematycznym dynamiki jest znów układ Lurie z

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6.1. SKOŃCZENIE WYMIAROWE SYSTEMY SEMILINIOWE

i transmitancją części liniowej

$$G(s) = c^T (A - sI)^{-1} b = \frac{-s^2}{s^3 + 5s^2 + 6s + 1} .$$

Macierz $A + \mu bc^T$ jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu < \frac{29}{6}$. Sugeruje to wzięcie $k_1 = -\infty$, $k_2 = \frac{29}{6}$, jednak w tym przypadku nierówność częstotliwościowa (6.20) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi nierówność wielomianowa

$$-q\omega^4 + \left(6q + \frac{1}{6}\right) \omega^2 - 1 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Ostatnia nierówność jest fałszywa, więc nie można przyjąć $k_1 = -\infty$, $k_2 = \frac{29}{6}$.

Zbadajmy teraz przy jakim najmniejszym k_1 można wziąć $k_2 = \frac{29}{6}$. Wymaga to weryfikacji nierówności częstotliwościowej (6.16). Jest ona równoważna nierówności wielomianowej

$$6(1 - q)\omega^6 + (-67 - k_1 + 36q)\omega^4 + (185 + 6k_1)\omega^2 + 6 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Przy $q = 1$ uzyskuje się najmniejsze możliwe $k_1 = -\frac{187}{6}$. Wtedy

$$\pi(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega^2}{6} - 1\right)^2}{(1 - 5\omega^2)^2 + (6\omega - \omega^3)^2} .$$

Zatem zgodnie z (6.27), (6.28) faktorem spektralnym jest

$$\phi(s) = -\frac{\frac{s^2}{6} + 1}{s^3 + 5s^2 + 6s + 1} .$$

Tożsamość (6.29) pozwala określić wektor

$$g = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{11}{6} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix} .$$

Pierwsze równanie układu (6.24) ma postać równania Lapunowa

$$AH + HA = k_1 k_2 cc^T - gg^T .$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$H = \begin{bmatrix} 6 & -\frac{23}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{23}{2} & \frac{113}{3} & -\frac{79}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{79}{6} & \frac{406}{6} \end{bmatrix}, \quad H + \frac{qk_1}{2}cc^T = \begin{bmatrix} 6 & -\frac{23}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{23}{2} & \frac{265}{12} & -\frac{29}{12} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{29}{12} & \frac{69}{12} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det\left(H + \frac{qk_1}{2}cc^T\right) = \frac{1}{8} > 0$ więc poprzednik implikacji (6.31) nie jest spełniony i ostatecznie system jest **ABSS** w sektorze $\left(-\frac{187}{6}, \frac{29}{6}\right)$.

6.2. SYSTEMY SEMILINIOWE W PRZESTRZENI HILBERTA

Definicja 6.2.1. Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami Hilberta z iloczynami skalarnymi, odpowiednio $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2}$. Załóżmy, że operator liniowy $T : (D(T) \subset H_1) \rightarrow H_2$ jest gęsto zdefiniowany, tzn. $\overline{D(T)} = H_1$. Operatorem sprzężonym do T nazywamy operator liniowy $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ o dziedzinie

$$D(T^*) = \{g \in H_2 : \exists h_g \in H_1 : \langle h_g, f \rangle_{H_1} = \langle g, Tf \rangle_{H_2} \quad \forall f \in D(T)\},$$

zdefiniowany wzorem $T^*g = h_g$ dla $g \in D(T^*)$ (element h_g jest wyznaczony jednoznacznie).

Definicja 6.2.2. Niech X będzie przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|$. Rodzinę operatorów $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathbf{L}(X)$ nazywamy C_0 -półgrupą na X jeśli spełnione są następujące warunki:

- (i) $T(0) = I, \quad T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0,$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)y = y \quad \forall y \in X.$

Jeżeli dodatkowo,

- (iii) dla dowolnego ustalonego $y \in X$, odwzorowanie $t \mapsto T(t)y$ jest rzeczywistą funkcją analityczną na $(0, \infty)$,

to $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ jest *półgrupą analityczną* na X .

Definicja 6.2.3. Operator liniowy $A : (D(A) \subset X) \rightarrow X$ zdefiniowany wzorem

$$Ay = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)y - y}{t},$$

z dziedziną tych wszystkich $y \in X$, dla których granica ta istnieje jest nazywany *generatorem infinitesimalnym* C_0 -półgrupy $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ na X .

Poniższe twierdzenia charakteryzują generatory półgrup analitycznych i C_0 -półgrup [61], [108], [141].

Twierdzenie 6.2.4 (Hille). Operator liniowy $A : (D(A) \subset X) \rightarrow X$ działający w przestrzeni Banacha X jest generatorem infinitesimalnym liniowej półgrup analitycznej na X wtedy i tylko wtedy, gdy A jest domknięty, gęsto zdefiniowany i istnieją $b \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ oraz $M \geq 1$ takie, że:

- (i) sektor $S_{b,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta \geq |\arg(\lambda - b)|, \lambda \neq b\}$ zawiera się w zbiorze rezolwentowym $\rho(A)$,
- (ii) rezolwenta operatora A spełnia oszacowanie

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathbf{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - b|} \quad \forall \lambda \in S_{b,\theta} .$$

Twierdzenie 6.2.5 (Hille–Phillips–Yosida). Operator liniowy $A : (D(A) \subset X) \rightarrow X$ działający w przestrzeni Banacha X jest generatorem infinitesimalnym liniowej C_0 -półgrup na X wtedy i tylko wtedy, gdy A jest domknięty, gęsto zdefiniowany oraz istnieją $b \in \mathbb{R}$ i $M \geq 1$ takie, że półpłaszczyzna $\Pi_b = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > b\}$ zawiera się w zbiorze rezolwentowym $\rho(A)$, a rezolwenta operatora A spełnia oszacowanie

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathbf{L}(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - b)^n} \quad \forall \lambda \in \Pi_b \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Twierdzenie 6.2.6 (Walker). Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|$. Warunki konieczne i dostateczne na to, aby liniowy operator $A : (D(A) \subset X) \rightarrow X$ był generatorem infinitesimalnym liniowej C_0 -półgrup $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, spełniającej nierówność

$$\|S(t)\|_{\mathbf{L}(X)} \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

dla pewnej $\omega \in \mathbb{R}$ i $M \geq 1$ (jeżeli $\omega < 0$ to o półgrupie $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ mówimy, że jest *eksponencjalnie stabilna* (**EXS**)) mają postać:

- (i) A jest gęsto zdefiniowany,
- (ii) istnieje $\lambda_0 > 0$ taka, że dla każdego $\lambda \in (0, \lambda_0)$ operator $I - \lambda A$ jest surjektywny, tzn. $R(I - \lambda A) = X$,
- (iii) istnieje norma $\|\cdot\|_e$, równoważna z $\|\cdot\|$, względem której operator A jest *dyssypatywny*, tzn.

$$\|(I - \lambda A)u\|_e \geq (1 - \lambda\omega) \|u\|_e \quad \forall u \in D(A), \quad \forall \lambda > 0, \lambda\omega < 1 .$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

W przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ warunek (i) jest zbędny, gdyż wynika z pozostałych. Dla szerokiej klasy problemów (w szczególności zachodzi to dla wszystkich przykładów rozważanych w tym rozdziale) wystarcza wyznaczenie równoważnego iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$, względem którego operator A jest *dysypatywny*,

$$\langle u, Au \rangle_e \leq \omega \|u\|_e^2 \quad \forall u \in D(A) .$$

Ponadto, operator A jest generatorem infinitesimalnym liniowej C_0 -półgrupy, wtedy i tylko wtedy, gdy A^* jest generatorem infinitesimalnym liniowej C_0 -półgrupy. Przy tym półgrupa $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ generowana przez A jest **EXS** wtedy i tylko wtedy, gdy półgrupa sprzężona $\{S^*(t)\}_{t \geq 0}$ generowana przez A^* jest **EXS**.

Modele matematyczne dynamiki wielu systemów można zredukować do abstrakcyjnego układu semiliniowego

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + BF[x(t)], \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \quad (6.33)$$

gdzie $A : (D(A) \subset H) \rightarrow H$ jest operatorem liniowym generującym C_0 -półgrupę $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ na przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, $B \in \mathbf{L}(U, H)$, U jest także przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$, F jest nieliniowym operatorem H z U .

Dla ułatwienia notacji, wprowadźmy operator $f : H \rightarrow H$, $f(x) := BF(x)$.

Definicja 6.2.7. Niech $T > 0$. Funkcję $x \in C([0, T], H)$ nazywamy *słabym rozwiązaniem problemu początkowego* (6.33) na $[0, T]$ jeśli $x(0) = x_0$, $f[x(\cdot)] \in L^1(0, T; H)$ i dla wszystkich $w \in D(A^*)$ funkcja $[0, T] \ni t \mapsto \langle x(t), w \rangle_H$ jest absolutnie ciągła oraz dla prawie wszystkich $t \in [0, T]$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dt} \langle x(t), w \rangle_H = \langle x(t), A^* w \rangle_H + \langle f[x(t)], w \rangle_H .$$

Lemat 6.2.8. Niech $T > 0$. Funkcja $x : [0, T] \ni t \mapsto x(t) \in H$ jest słabym rozwiązaniem (6.33) na $[0, T]$ wtedy i tylko wtedy gdy $f[x(\cdot)] \in L^1(0, T; H)$ i dla prawie wszystkich $t \in [0, T]$ x spełnia formułę wariacji stałych

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t - \tau) f[x(\tau)] d\tau \quad (6.34)$$

Lemat 6.2.9. Niech $T > 0$. Załóżmy, że operator $f : H \rightarrow H$ jest lokalnie lipschitzowski. Wtedy, dla każdego $x_0 \in H$ problem początkowy (6.33) ma słabe rozwiązanie z prawym maksymalnym przedziałem istnienia $[0, t_{\max})$, $t_{\max} > 0$, $x \in C([0, t_{\max}), H)$. Więcej, jeśli $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset C([0, T], H)$ jest ciągiem słabych rozwiązań (6.33) na $[0, T]$

takich, że $x_n(0) \rightarrow x_0$, gdy $n \rightarrow \infty$ to wtedy $x_n \rightarrow x$, gdy $n \rightarrow \infty$ w $C([0, T], H)$ i x jest słabym rozwiązaniem (6.33) na $[0, T]$. Dodatkowo,

$$\lim_{t \nearrow t_{\max}} \|x(t)\|_H = \infty, \quad \int_0^{t_{\max}} \|f[x(\tau)]\|_H d\tau = \infty$$

przy założeniu, że $t_{\max} < \infty$.

Lemat 6.2.8 pojawia się w pracach [4, Twierdzenie 5.1, str. 243] i [3], natomiast Lemat 6.2.9 jest połączeniem rezultatów z [126], [108, Twierdzenie 1.4, str. 185] i [5, Twierdzenie 5.2, str. 244].

Jeżeli $F(0) = 0$ to $0 \in H$ jest punktem równowagi systemu (6.33) (trywialne rozwiązanie zerowe (6.33)).

Definicja 6.2.10. Jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|x_0\|_H < \delta \implies \|x(t, x_0)\|_H < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

to mówimy, że punkt równowagi $0 \in H$ jest *stabilnym (S)* punktem równowagi układu (6.33). Zbiór $\{x_0 \in H : s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0\}$, gdzie $s\text{-}\lim$ oznacza silną granicę w H , nazywamy *obszarem silnej atrakcji* zerowego punktu równowagi (6.33). Jeżeli $0 \in H$ jest **S**, a jego obszarem silnej atrakcji jest H to mówimy, że punkt równowagi $0 \in H$ układu (6.33) jest *globalnie asymptotycznie stabilny (GAS)*. Jeśli punkt $0 \in H$ jest **S** i jest *globalnie jednostajnie atraktywny*, tzn.,

$$\forall \alpha > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists T = T(\varepsilon) : \quad \|x(t, x_0)\|_H < \varepsilon \quad \forall t \geq T, \quad \forall x_0, \quad \|x_0\|_H \leq \alpha$$

to mówimy, że ten punkt jest *globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny (GJAS)*.

Obecnie podamy pewne kryteria **GAS** i **GJAS** punktu równowagi $0 \in H$ systemu (6.33) oparte na uogólnieniu metody funkcjonalów Lapunowa.

Twierdzenie 6.2.11. Niech \mathcal{M} będzie klasą operatorów nieliniowych taką, że:

- (i) $\mathcal{M} \subset \{P : P \text{ jest lokalnie lipschitzowskim operatorem z } H \text{ w } U, P(0) = 0\}$,
- (ii) Istnieją operatory $Q \in \mathbf{L}(U, H)$, $M \in \mathbf{L}(H)$, $M = M^*$, $L \in \mathbf{L}(U, H)$, $K \in \mathbf{L}(U)$, $K = K^*$ takie, że:

(H1) dla każdego $F \in \mathcal{M}$ operator QF jest typu gradientowego,

(H2) dla każdego $x \in H$ i $F \in \mathcal{M}$ mamy

$$\langle x, -Mx \rangle_H + \langle x, LF(x) \rangle_H + \langle L^*x, F(x) \rangle_U + \langle F(x), -KF(x) \rangle_U \geq 0 \quad (6.35)$$

(εH3) istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że *układ rozwiązujących równań Lurie–Lefschetza*

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$\langle Ax, Hx \rangle_{\mathbf{H}} + \langle x, HAx \rangle_{\mathbf{H}} - \langle x, Mx \rangle_{\mathbf{H}} = -\|Gx\|_{\mathbf{U}}^2 - \varepsilon \|x\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall x \in D(A) \quad (6.36)$$

$$B^* Hx + \frac{1}{2} Q^* Ax + L^* x = -V^* Gx \quad \forall x \in D(A) \quad (6.37)$$

$$K - \frac{1}{2}(Q^* B + B^* Q) = V^* V + \varepsilon I \quad (6.38)$$

ma rozwiązanie (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbf{H})$, $H = H^*$, G jest A – ograniczonym operatorem liniowym z \mathbf{H} w \mathbf{U} , $V \in \mathbf{L}(\mathbf{U})$,

(H5) jeśli $F \in \mathcal{M}_L = \mathcal{M} \cap \mathbf{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U})$ to liniowa C_0 – półgrupa generowana przez $A + BF$ jest eksponencjalnie stabilna **EXS**,

(H6) dla każdego $F \in \mathcal{M}$ i $x \in \mathbf{H}$, $x \neq 0$ istnieje $\kappa \in \mathcal{M}_L$ takie, że

$$\int_0^1 \langle x, Q[F(sx) - \kappa sx] \rangle_{\mathbf{H}} ds = 0 \quad (6.39)$$

Wtedy $0 \in \mathbf{H}$ jest **GAS** punktem równowagi systemu (6.33) dla każdego $F \in \mathcal{M}$ (*absolutna stabilność (ABSS)* w klasie \mathcal{M}).

Dowód. Ponieważ w [46], [47] podano tylko szkice dowodów, przedstawimy pełny dowód Twierdzenia (6.2.11). Ustalmy dowolnie $F \in \mathcal{M}$. Istnienie słabego rozwiązania problemu początkowego (6.33) jest, dzięki inkluzji (i), zagwarantowane Lematami 6.2.8 i 6.2.9. Na mocy **(H1)** i twierdzenia Rothego–Gawurina – patrz [13, Twierdzenie 2.5.2, str. 94 - 95] – operator QF jest gradientem funkcjonału

$$\int_0^1 \langle x, QF(sx) \rangle_{\mathbf{H}} ds = \int_0^x \langle dy, QF(y) \rangle_{\mathbf{H}} ,$$

a wartość ostatniej całki nie zależy od drogi całkowania łączącej punkty $0, x$, o ile jest ona pojedynczą i prostowalną krzywą w \mathbf{H} . Teraz, na mocy **(H2)** i **(H3)** funkcjonał

$$V(x) = \langle x, Hx \rangle_{\mathbf{H}} + \int_0^x \langle dy, QF(y) \rangle_{\mathbf{H}} \quad (6.40)$$

jest klasy C^1 i mamy

$$\begin{aligned} \langle Ax + BF(x), \nabla V(x) \rangle_{\mathbf{H}} &= \langle Ax + BF(x), 2Hx + QF(x) \rangle_{\mathbf{H}} = \\ &= -[\langle x, -Mx \rangle_{\mathbf{H}} + \langle x, LF(x) \rangle_{\mathbf{H}} + \langle F(x), L^* x \rangle_{\mathbf{U}} + \langle F(x), -KF(x) \rangle_{\mathbf{U}}] - \\ &\quad - \|Gx + VF(x)\|_{\mathbf{U}}^2 - \varepsilon \|x\|_{\mathbf{H}}^2 - \varepsilon \|F(x)\|_{\mathbf{U}}^2 \leq \\ &\leq -\varepsilon \|x\|_{\mathbf{H}}^2 - \varepsilon \|F(x)\|_{\mathbf{U}}^2 \quad \forall x \in D(A) , \end{aligned} \quad (6.41)$$

gdzie $\nabla V(x)$ oznacza gradient V w punkcie x .

Wykorzystując idee Balla [5, Dowód lematu 5.5, str. 246 - 247] pokażemy, że

6.2. SYSTEMY SEMILINIOWE W PRZESTRZENI HILBERTA

$$\begin{aligned} V[x(t, x_0)] - V(x_0) &\leq \\ &\leq -\varepsilon \int_0^t \|x(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|F[x(\tau)]\|_{\mathbf{U}}^2 d\tau \quad \forall x_0 \in \mathbf{H}, \quad \forall t \in [0, t_{\max}(x_0)) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Niech $x_0 \in \mathbf{H}$, $T > 0$, $T < t_{\max}(x_0)$. Rozważmy funkcję $g(t) = F[x(t)]$ dla $t \in [0, T]$. Ponieważ $x \in C([0, T], \mathbf{H})$ jako słabe rozwiązanie (6.33), $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{U}$ jest ciągle, gdyż $F \in \mathcal{M}$, więc $g \in C([0, T], \mathbf{U})$. Dzięki gęstości $C^1([0, T], \mathbf{U})$ w $C([0, T], \mathbf{U})$ i $D(A)$ w \mathbf{H} istnieją ciągi

$$\begin{aligned} \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\subset C^1([0, T], \mathbf{U}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g, \\ \{x_0^n\}_{n \in \mathbb{N}} &\subset D(A), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = x_0. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Phillipsa – patrz [108, Wniosek 2.5, str. 107], wynika, że ciąg funkcji $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$v_n(t) = S(t)x_0^n + \int_0^t S(t-\tau)Bg_n(\tau)d\tau$$

ma następujące własności:

$$v_n \in C^1([0, T], \mathbf{H}), \quad v_n(t) \in D(A), \quad \dot{v}_n(t) = Av_n(t) + Bg_n(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Dzięki temu funkcja $t \mapsto V[v_n(t)]$ należy do $C^1[0, T]$ i

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[v_n(t)] &= \langle \dot{v}_n(t), \nabla V[v_n(t)] \rangle_{\mathbf{H}} = \\ &= \langle Av_n(t) + Bg_n(t), \nabla V[v_n(t)] \rangle_{\mathbf{H}} \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (6.43)$$

Dodając i odejmując $BF[x(t)]$ w prawej stronie (6.43) i całkując obie strony (6.43) od 0 do t , i wreszcie, biorąc pod uwagę (6.41) dostajemy

$$\begin{aligned} V[v_n(t)] - V(x_0^n) &\leq -\varepsilon \int_0^t [\|v_n(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|F[v_n(\tau)]\|_{\mathbf{U}}^2] d\tau + \\ &+ \int_0^t \langle B\{g_n(\tau) - F[v_n(\tau)]\}, \nabla V[v_n(\tau)] \rangle_{\mathbf{H}} d\tau \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x_0 \in \mathbf{H} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Z definicji v_n , (6.34), podstawowych oszacowań dla półgrupy $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ (tutaj bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że typ tej półgrupy jest $\omega > 0$), oraz pewnych elementarnych oszacowań, wynika, że

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - x(t)\|_{\mathbf{H}} &= \left\| S(t)(x_0^n - x_0) + \int_0^t S(t-\tau)B[g_n(\tau) - g(\tau)]d\tau \right\|_{\mathbf{H}} \leq \\ &\leq Me^{\omega T} \|x_0^n - x_0\|_{\mathbf{H}} + \|B\|_{\mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H})} M \frac{1}{\omega} (e^{\omega T} - 1) \|g_n - g\|_{C([0, T], \mathbf{U})}. \end{aligned}$$

Stąd $v_n \rightarrow x$ gdy $n \rightarrow \infty$ w $C([0, T], \mathbf{H})$ i w konsekwencji, na mocy ciągłości operatora Niemyckiego dostajemy

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$C([0, T], \mathbf{H}) \ni x \longmapsto F[x(\cdot)] \in C([0, T], \mathbf{U}) .$$

Mamy także $F[v_n(\cdot)] \longrightarrow F[x(\cdot)]$ gdy $n \rightarrow \infty$ w $C([0, T], \mathbf{U})$ i dlatego pierwszy człon w prawej stronie oszacowania (6.44) dąży do

$$-\varepsilon \int_0^t [\|v_n(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|F[v_n(\tau)]\|_{\mathbf{U}}^2] d\tau ,$$

gdy $n \rightarrow \infty$. Po dodaniu i odjęciu wyrażenia $\langle Bg(\tau), \nabla V[v_n(\tau)] \rangle_{\mathbf{H}}$, drugi człon można oszacować następująco:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \langle B\{g_n(\tau) - F[v_n(\tau)]\}, \nabla V[v_n(\tau)] \rangle_{\mathbf{H}} d\tau \right| \leq \|B\|_{\mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H})} [\|g_n - g\|_{C([0, T], \mathbf{U})} + \\ & + \|F[x(\cdot)] - F[v_n(\cdot)]\|_{C([0, T], \mathbf{U})}] \int_0^t \|\nabla V[v_n(\tau)]\|_{\mathbf{H}} d\tau . \end{aligned}$$

Ponieważ $x_0 \in \mathbf{H}$, $T \in (0, t_{\max}(x_0))$ był dowolny, więc z twierdzenia Weierstrassa widać, że dla zachodzenia (6.42) wystarcza, aby $\{v_n(t) : t \in [0, T], n \in \mathbb{N}\}$ był zwarty w \mathbf{H} . Tak jednak jest, gdyż ostatni zbiór zawiera się w obrazie, zwanego w $C([0, T], \mathbf{H}) \times [0, T]$, zbioru $[\{v_n\} \cup \{x\}] \times [0, T]$ w ewaluacji $\Omega : C([0, T], \mathbf{H}) \times [0, T] \longrightarrow \mathbf{H}$, $\Omega(y, t) = y(t) - \text{obj.}$ [35, str. 147]. Korzysta się tu z faktu, że obcięcie ewaluacji Ω do zbioru $\mathcal{F} \times [0, T]$ jest ciągle, jeśli \mathcal{F} jest zwarty w $C([0, T], \mathbf{H})$ – por. [35, str. 211, w dowodzie twierdzenia Ascoliiego] (podstawia się $\mathcal{F} := \{v_n\} \cup \{x\}$) oraz obraz zwanego w $C([0, T], \mathbf{H}) \times [0, T]$ zbioru $\mathcal{F} \times [0, T]$ – obj. [35, Twierdzenie Tichonowa, str. 182] – w odwzorowaniu ciągłym jest zwarty – obj. [35, Twierdzenie 8, str. 167].

Ważnym wnioskiem z (6.42) jest następująca implikacja

$$V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{H} \implies t_{\max}(x_0) = \infty$$

oraz

$$\varepsilon \int_0^\infty [\|x(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|F[x(t)]\|_{\mathbf{U}}^2] dt \leq V(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbf{H} \quad (6.45)$$

Istotnie, jeśli $V(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbf{H}$ to z (6.42) otrzymujemy oszacowanie

$$\infty > V(x_0) \geq \varepsilon \int_0^{t_{\max}(x_0)} \|F[x(\tau)]\|_{\mathbf{U}}^2 d\tau \quad \forall x_0 \in \mathbf{H} .$$

Gdyby istniał $x_0 \in \mathbf{H}$, dla którego $t_{\max}(x_0) < \infty$ to z Lematu 6.2.9, oszacowania

$$\infty = \int_0^{t_{\max}(x_0)} \|BF[x(t)]\|_{\mathbf{H}} dt \leq \|B\|_{\mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H})} \int_0^{t_{\max}(x_0)} \|F[x(t)]\|_{\mathbf{U}} dt$$

i związków między normami w przestrzeniach $L^1(0, t_{\max}(x_0))$, $L^2(0, t_{\max}(x_0))$ otrzymalibyśmy $\int_0^{t_{\max}(x_0)} \|F[x(\tau)]\|_{\mathbf{U}}^2 d\tau = \infty$. Z otrzymanej sprzeczności wynika zatem, że

6.2. SYSTEMY SEMILINIOWE W PRZESTRZENI HILBERTA

$t_{\max}(x_0) = \infty$ dla dowolnego $x_0 \in \mathbf{H}$ (nieograniczona przedkuzalność w prawo słabego rozwiązania problemu (6.33)). Teraz w (6.42) można przejść z t do ∞ i powtórnie korzystając z nieujemności V , uzyskujemy oszacowanie (6.45).

Wykażemy, że założenia **(H5)**, **(H6)** gwarantują nieujemność V . W tym celu posłużymy się ideą liniowego systemu porównawczego zastosowaną w dowodzie Twierdzenia 6.1.2. Zauważmy najpierw, że na mocy **(H1)**, **(H2)** i **(H5)** mamy

$$\mathcal{M}_L = \{ \mu \in \mathbf{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U}) : (Q\mu) = (Q\mu)^*, -M + L\mu + \mu^*L^* - \mu^*K\mu \geq 0, \\ A + B\mu \text{ jest generatorem nieskończenie małym liniowej EXS } C_0\text{-półgrupy na } \mathbf{H} \} .$$

Jeżeli $\mu \in \mathcal{M}_L$, to zgodnie z (6.40) i (6.41) mamy

$$V(x) = \left\langle x, \left(H + \frac{1}{2}Q\mu \right) x \right\rangle_{\mathbf{H}} , \\ \left\langle (A + B\mu)x, \left(H + \frac{1}{2}Q\mu \right) x \right\rangle_{\mathbf{H}} + \left\langle x, \left(H + \frac{1}{2}Q\mu \right) (A + B\mu)x \right\rangle_{\mathbf{H}} \leq \\ \leq -\varepsilon \left[1 + \|\mu\|_{\mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H})}^2 \right] \|x\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall x \in D(A)$$

a zatem na mocy twierdzenia Datki – patrz np. [42, Twierdzenie 6.2.3, str. 126],

$$H + \frac{1}{2}Q\mu \geq 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_L \quad (6.46)$$

Ustalamy teraz dowolnie $x \in \mathbf{H}$, $x \neq 0$. Na mocy **(H6)** istnieje taki $\kappa \in \mathcal{M}_L$, że (6.39) zachodzi. Z (6.39) i (6.46) otrzymujemy

$$V(x) = \left\langle x, \left(H + \frac{1}{2}Q\kappa \right) x \right\rangle_{\mathbf{H}} + \int_0^1 \left\langle x, Q[F(sx) - \kappa sx] \right\rangle_{\mathbf{H}} ds \geq 0 ,$$

ponadto

$$V(0) = 0 .$$

Weźmy teraz dowolny $\mu \in \mathcal{M}_L$ i rozważmy nieliniowy operator G , $G(x) := F(x) - \mu x$. Z **(H5)** wynika, że liniowa C_0 -półgrupa $\{S_\mu(t)\}_{t \geq 0}$ generowana przez $A + B\mu$ jest **EXS**, tzn. istnieją stałe $M_\mu \geq 1$, $\alpha > 0$ takie, że

$$\|S_\mu(t)\|_{\mathbf{L}(\mathbf{H})} \leq M_\mu e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

i z (6.34) łatwo otrzymujemy oszacowanie

$$\|x(t)\|_{\mathbf{H}} \leq a(t) \|x_0\|_{\mathbf{H}} + (a \star b)(t) , \\ a(t) = \|S_\mu(t)\|_{\mathbf{L}(\mathbf{H})}, \quad b(t) = \|BG[x(t)]\|_{\mathbf{H}}, \quad t \geq 0 \quad (6.47)$$

$a, b \in L^2(0, \infty)$. Dla a jest to oczywiste, dla b wynika z (6.45), dokładniej,

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$\|b\|_{L^2(0,\infty)} \leq \|B\|_{\mathbf{L}(U,H)} \left(1 + \|\mu\|_{\mathbf{L}(H,U)}\right) \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} V(x_0)} \quad (6.48)$$

Korzystając z własności splotu $a \star b$ dostajemy

$$|(a \star b)(t)| \leq \|a\|_{L^2(0,\infty)} \|b\|_{L^2(0,\infty)}, \quad (a \star b)(t) \longrightarrow 0 \quad \text{przy } t \rightarrow \infty$$

– patrz [21, Propozycja 0.2.1, str. 4]. W ten sposób z oszacowań (6.47), (6.48), nieujemności V , ciągłości V w $0 \in H$ i $V(0) = 0$ wynika stabilność punktu równowagi $0 \in H$ i jego globalna atraktywność.

GAS jest absolutną w klasie \mathcal{M} , bowiem F był ustalonym dowolnie operatorem z \mathcal{M} . \square

Uwaga 6.2.12. Przypadek $Q = 0$ analizowany był w [81, Twierdzenie 5, str. 1071], gdzie podano bardzo proste uzasadnienie, że w tym przypadku tezę Twierdzenia 6.2.11 można wzmocnić do globalnej eksponencjalnej stabilności punktu równowagi $0 \in H$, dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$.

Kolejne kryterium **GAS** punktu równowagi $0 \in H$ jakie podamy zawiera inny zestaw założeń, co jest konsekwencją odmienności części dowodu. Kryterium to jest bardziej zbliżone do Twierdzenia 6.1.2 oraz do standardowych ujęć metody funkcyjnałów Lapunowa dla systemów nieskończenie-wymiarowych.

Twierdzenie 6.2.13. Niech \mathcal{M} będzie taką klasą operatorów nieliniowych, że:

- (i) $\mathcal{M} \subset \{P : P \text{ jest operatorem lokalnie lipschitzowskim z } H \text{ w } U, P(0) = 0\}$,
- (ii) Istnieją operatory $Q \in \mathbf{L}(U, H)$, $M \in \mathbf{L}(H)$, $M = M^*$, $L \in \mathbf{L}(U, H)$, $K \in \mathbf{L}(U)$, $K = K^*$, takie, że:
 - (H1) dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$ operator QF jest gradientowy,
 - (H2) dla dowolnego $x \in H$ i dowolnego $F \in \mathcal{M}$ zachodzi (6.35),
 - (H3) układ rozwiązujących równań Lurie

$$\left. \begin{aligned} \langle Ax, Hx \rangle_H + \langle x, HAx \rangle_H - \langle x, Mx \rangle_H &= -\langle Gx, Gx \rangle_U \quad \forall x \in D(A) \\ B^*x + \frac{1}{2}Q^*Ax + L^*x &= -V^*Gx \quad \forall x \in D(A) \\ K - \frac{1}{2}(Q^*B + B^*Q) &= V^*V \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

posiada rozwiązanie (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(H)$, $H = H^*$, G jest operatorem liniowym A – ograniczonym z H w U , $V \in \mathbf{L}(U)$,

- (H7) istnieje ciągła, ściśle rosnąca, określona na $[0, \infty)$ funkcja α , $\alpha(0) = 0$, $\alpha(r) \nearrow \infty$, gdy $r \nearrow \infty$ taka, że dla dowolnego $x \in H$ i dowolnego $F \in \mathcal{M}$ mamy

$$V(x) = \langle x, Hx \rangle_H + \int_0^1 \langle x, QF(sx) \rangle_H ds \geq \alpha(\|x\|_H) \quad (6.50)$$

- (H8) albo półgrupa $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ generowana przez A jest ostatecznie zwarta, albo istnieje $\mu \in \mathbf{L}(\mathbf{H}, \mathbf{U})$ taki, że liniowa C_0 -półgrupa generowana przez $A + B\mu$ jest **EXS** oraz dla każdego $F \in \mathcal{M}$ operator $x \mapsto B[F(x) - \mu x]$ jest *zwarty* (tzn. przeprowadza zbiór ograniczony we względnie zwarty),
- (H9) dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$ rozwiązanie zerowe jest jedynym, określonym i ograniczonym dla $t \in \mathbb{R}$, słabym rozwiązaniem problemu (6.33), na którym $V[x(t, x_0)] = V(x_0)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Wtedy punkt równowagi $0 \in \mathbf{H}$ jest **GAS** dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$ (stabilność absolutna w klasie \mathcal{M}).

Dowód. Dowód jest tylko nieznacznym rozszerzeniem szkicu dowodu przypadku szczególnego, odpowiadającego kwadratowej funkcji α – patrz [47, str. 286 - 287]. Ustalamy dowolnie $F \in \mathcal{M}$. Przy wyprowadzaniu oszacowania (6.42) korzystaliśmy tylko z (H1), (H2) i (ε H3), wobec tego, jeśli zamiast (ε H3) założymy (H3) to w miejsce (6.42) otrzymamy słabsze, bo odpowiadające $\varepsilon = 0$, oszacowanie

$$V[x(t, x_0)] \leq V(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbf{H}, \quad \forall t \in [0, t_{\max}(x_0)] \quad (6.51)$$

Z (6.50) i (6.51) wynika teraz oszacowanie

$$V(x_0) \geq \alpha(\|x(t, x_0)\|_{\mathbf{H}}) \quad \forall x_0 \in \mathbf{H}, \quad \forall t \in [0, t_{\max}(x_0)] \quad (6.52)$$

Gdyby dla pewnego $x_0 \in \mathbf{H}$ istniało rozwiązanie problemu początkowego (6.33) z $t_{\max}(x_0) < \infty$, to wobec własności funkcji α i Lematu 6.2.9 otrzymalibyśmy $\alpha(\|x(t, x_0)\|_{\mathbf{H}}) \nearrow \infty$, gdy $t \nearrow t_{\max}(x_0)$, co jest sprzeczne z (6.52). Z uzyskanej sprzeczności wynika, że wszystkie rozwiązania są nieograniczenie przedłużalne w prawo. Obkładając oszacowanie (6.52), ważne już teraz dla dowolnych $x_0 \in \mathbf{H}$, $t \geq 0$, obustronnie funkcją odwrotną do α i korzystając z ciągłości V otrzymamy stabilność punktu równowagi $0 \in \mathbf{H}$ i ograniczoność wszystkich rozwiązań. Można też zauważyć, że rozwiązania systemu (6.33) generują **CSDS** na \mathbf{H} i dzięki założeniu (H7) i ciągłości V , stabilność punktu równowagi wynika wprost z charakterystyki zbiorów stabilnych w terminach funkcjonałów Lapunowa [15, 4.5 - 4.6, str. 85].

Dowód globalnej atraktywności punktu równowagi $0 \in \mathbf{H}$ opiera się na wykorzystaniu zasady inwariantności LaSalle'a 2.1.5, zgodnie z którą, każda względnie zwarta trajektoria zmierza do największego zbioru mocno-inwariantnego zawartego w zbiorze $\{x_0 \in \mathbf{H} : V[x(t, x_0)] = V(x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$. Z jednej strony na mocy (H9) zbiór ten jest równy $\{0\}$, z drugiej strony każda trajektoria systemu (6.33) jest względnie zwarta, co wynika z (H8) i kryteriów Pazy'ego-Balla [108, Lemat 5.3, str. 244; zastąpienie założenia zwartości półgrupy $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ generowanej przez A , ostateczną zwartością wymaga jedynie nieznacznym modyfikacji w dowodzie i dlatego nie będzie przedmiotem osobnego dowodu] oraz Webba [142, Propozycja 3.2, str. 21].

Udowodniona **GAS** punktu równowagi $0 \in \mathbf{H}$ jest absolutną w klasie \mathcal{M} bowiem $F \in \mathcal{M}$ był ustalonym dowolnie operatorem z \mathcal{M} . \square

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

Twierdzenie 6.2.14. Jeżeli w Twierdzeniu 6.2.11 w miejsce założenia (i) przyjąć następujące założenie:

(i') $\mathcal{M} \subset \{P : P \text{ jest operatorem lokalnie lipschitzowskim z } H \text{ w } U, \text{ który przekształca każdy ciąg słabo zbieżny w } H \text{ w ciąg silnie zbieżny w } U \text{ oraz } P(0) = 0\}$

to tezę Twierdzenia 6.2.11 można wzmocnić następująco: $0 \in H$ jest **GJAS** punktem równowagi systemu (6.33) dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$.

Dowód. Twierdzenie to podano w pracach [46, Twierdzenie 2], [47, Twierdzenie 2] bez dowodu. Idea dowodu jest częściowo oparta na metodzie Wexlera [148, str. 127 - 128], [149, str. 976]. Ustalamy dowolnie $F \in \mathcal{M}$. Założenia Twierdzenia 6.2.14 implikują spełnienie założeń Twierdzenia 6.2.11, skąd wynika **GAS** punktu równowagi $0 \in H$. Pozostaje pokazać jego globalną jednostajną atraktywność. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że tak nie jest – zgodnie z definicją oznacza to, że istnieją liczby $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $T > 0$ mamy $\|x(t, x_0)\|_H \geq \varepsilon$ dla pewnego $t \in [0, T]$ i pewnego x_0 , $\|x_0\|_H \leq \alpha$. W konsekwencji

$$\begin{aligned} \exists \alpha > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x_0^n\}_{n \in \mathbb{N}} : \quad \tau_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty, \\ \|x_0^n\|_H \leq \alpha, \quad \|x(\tau_n, x_0^n)\|_H \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.53)$$

Ponieważ w przestrzeni Hilberta każdy ograniczony ciąg zawiera podciąg słabo zbieżny w H [144, Twierdzenie 4.25, str. 77], zatem istnieje podciąg $\{\hat{x}_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ciągu $\{x_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, słabo zbieżny w H do \hat{x}_0 , $\|\hat{x}_0\|_H \leq \alpha$. Z (i') wynika, że F jest w szczególności słabo-ciągłowo ciągły, co wraz ze stabilnością implikuje, na podstawie twierdzenia o ciągłej zależności słabych rozwiązań od warunków początkowych w słabej topologii – twierdzenie Balla i Slemroda [7, str. 172 - 173], że

$$\forall T > 0 : \quad x(\cdot, \hat{x}_0^n) \longrightarrow x(\cdot, \hat{x}_0) \quad \text{w } C([0, T], H_w) ,$$

gdzie H_w oznacza przestrzeń H z topologią słabej ciągowej zbieżności.

Jeżeli $\mu \in \mathcal{M}_L$, to $A + B\mu$ jest generatorem liniowej, C_0 -półgrupy $\{S_\mu(t)\}_{t \geq 0}$, która jest **EXS**, przy czym dzięki (i') operator liniowy μ jest zwarty (pełnociągły). W konsekwencji operator $G : H \rightarrow U$, $G(x) = F(x) - \mu x$ także przeprowadza każdy ciąg słabo zbieżny w H w ciąg silnie zbieżny w U i $b_n \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$ w $C([0, T])$ dla dowolnego $T > 0$, gdzie

$$b_n(t) = \|B\{G[x(t, \hat{x}_0^n)] - G[x(\cdot, \hat{x}_0)]\}\|_H .$$

Z dowodu Twierdzenia 6.2.11 wiemy, że b_n jest funkcją określoną, ograniczoną i ciągłą na $[0, \infty)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $b_n(t) \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow \infty$. Tak więc z jednej strony $b_n \rightarrow 0$ w $L^\infty(0, \infty)$, a z drugiej, korzystając znów z własności splotu [21, Propozycja 0.2.1, str. 4], w sposób podobny do zastosowanego przy heurezje (6.47), otrzymamy oszacowanie

$$\begin{aligned} \|x(t, \hat{x}_0^n) - x(t, \hat{x}_0)\|_H &\leq a(t) \|\hat{x}_0^n - \hat{x}_0\|_H + (a \star b_n)(t) \leq \\ &\leq 2\alpha a(t) + \|a(t)\|_{L^1(0, \infty)} \|b_n\|_{L^\infty(0, \infty)}, \quad a(t) = \|S_\mu(t)\|_{\mathbf{L}(H)} \leq M_\mu e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (6.54)$$

Z (6.54), $x(\tau_n, \hat{x}_0) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$ (konsekwencja **GAS**) i nierówności trójkąta wynika, że przez wzięcie dostatecznie dużego $n \in \mathbb{N}$ wyrażenie $\|x(\tau_n, \hat{x}_0^n)\|_{\mathbb{H}}$ może być uczynione dowolnie małym, co jest sprzeczne z (6.53). Na mocy rozumowania dowodowego nie wprost i faktu, że $F \in \mathcal{M}$ był ustalony dowolnie, wnosimy, że punkt równowagi $0 \in \mathbb{H}$ jest **GJAS**, niezależnie od $F \in \mathcal{M}$. \square

Lemat 6.2.15. Jeżeli

$$R(Q) \subset D(A^*) \quad (6.55)$$

to przy założeniu, że para (A, B) jest *wykładniczo stabilizowalna*, tzn. istnieje $X \in \mathbf{L}(\mathbb{H}, \mathbb{U})$ takie, że półgrupa generowana przez $A + BX$ jest **EXS**, mamy:

1°. Założenie (ε **H3**) w Twierdzeniu 6.2.11 jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{F}(x, u) \geq \varepsilon \|x\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon \|u\|_{\mathbb{U}}^2 \quad \forall (\omega, x, u) \in \mathbb{R} \times D(A) \times \mathbb{U}, j\omega x = Ax + Bu \quad (6.56)$$

gdzie $\mathcal{F}(x, u)$ jest ciągłą formą kwadratową na $\mathbb{H} \times \mathbb{U}$ (po kompleksyfikacji), określoną wzorem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, u) = & -\left\langle \frac{1}{2}Q^*Ax, u \right\rangle_{\mathbb{U}} - \left\langle \frac{1}{2}A^*Qu, x \right\rangle_{\mathbb{H}} + \langle x, Mx \rangle_{\mathbb{H}} - \\ & - \langle Lu, x \rangle_{\mathbb{H}} - \langle L^*x, u \rangle_{\mathbb{U}} - \left\langle u, \left[K - \frac{1}{2}(Q^*B + B^*Q) \right] u \right\rangle_{\mathbb{U}} \end{aligned} \quad (6.57)$$

2°. (6.56) jest warunkiem wystarczającym na to, aby system (6.49) posiadał rozwiązanie (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{H})$, $G \in \mathbf{L}(\mathbb{H}, \mathbb{U})$, $V \in \mathbf{L}(\mathbb{U})$ (warunek wystarczający spełnienia założenia (**H3**) w Twierdzeniu 6.2.13).

Dowód. (6.55) gwarantuje ciągłość formy kwadratowej $\mathcal{F}(x, u)$, dzięki czemu tezy 1°, 2° wynikają z twierdzenia częstotliwościowego Lichtarnikova–Jakuboviča [82, Twierdzenie 3, str. 902]. \square

Uwaga 6.2.16. W [82] powyższy lemat został wykazany przy założeniu L^2 – sterowalności, a nie wykładniczej stabilizowalności pary (A, B) , jednak w [85, str. 143] udowodniono równoważność tych pojęć.

Jeżeli (6.55) nie zachodzi to Q^*A można być nawet niedomykalny i o rozwiązalności systemów (6.36), (6.37), (6.38), (6.49) nic nie wiadomo. W praktyce możemy posługiwać się formalną procedurą faktoryzacyjno-realizacyjną, którą przedstawimy na przykładzie systemu (6.49).

Jeżeli wspólna część zbioru rezolwentowego $\rho(A)$ i osi urojonej jest „dostatecznie obszerne”, to kładąc w (6.57) $x = (j\omega I - A)^{-1}Bu$ otrzymamy ciągłą formę kwadratową na \mathbb{U} . Szukamy teraz takiej funkcji $\rho(A) \ni s \mapsto \Phi(s) \in \mathbf{L}(\mathbb{U})$, że:

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$\mathcal{F}((j\omega I - A)^{-1}Bu, u) = \|\Phi(j\omega)\|_U^2 \quad (6.58)$$

$$G(A - sI)^{-1}B = V - \Phi(s), \quad V^*V = K - \frac{1}{2}(Q^*B + B^*Q) \quad (6.59)$$

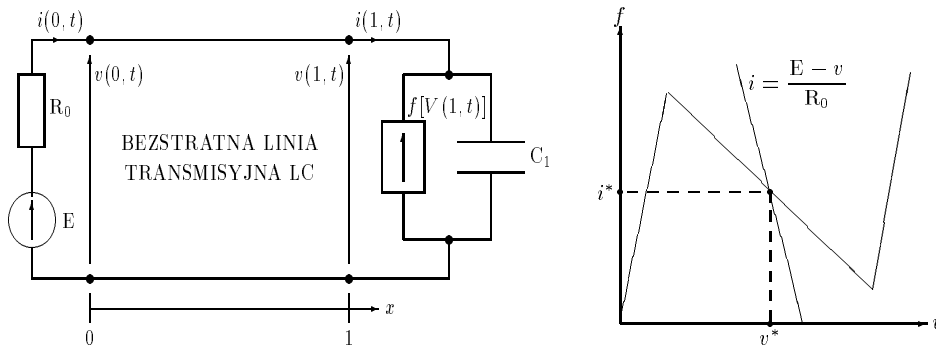
Powyższa formalna procedura faktoryzacyjno-realizacyjna została ściśle uzasadniona jedynie dla szerokiej klasy systemów Lurie równoważnych problemowi lq – patrz [155], [23] oraz [145].

Nadmieńmy jeszcze, że w szeregu prac udało się uzyskać częstotliwościowe warunki stabilności nieskończenie-wymiarowych układów Lurie z jedną nieliniowością dlatego, że w niejawnym sposobie uzyskiwano spełnienie warunku (6.55). Przykładowo w artykułach Wexlera [148], [149] spełnienie (6.55) wynika z faktu, że autor operuje tam produktowymi przestrzeniami stanu przez co Q i A mają blokową strukturę.

6.3. PRZYKŁADY I PROBLEMY OTWARTE

6.3.1. Przykład 1. Obwód Braytona

Jest to system przedstawiony na rysunku 6.5.



Rysunek 6.5. Przykład Braytona. Po prawej stronie charakterystyka diody tunelowej

Można go opisać układem równań

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ 0 = V(x,t) + I(0,t)R_0, \quad t \in \mathbb{R} \\ C_1 \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = I(1,t) - g[V(1,t)], \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right. ,$$

6.3. PRZYKŁADY I PROBLEMY OTWARTE

gdzie $g(y) = f(y + v^*) - f(v^*)$, $V = v - v^*$, $I = i - i^*$, $i^* = f(v^*)$. W oryginalnym przykładzie Braytona źródło prądu reprezentuje diodę tunelową, o charakterystyce przedstawionej na rysunku 6.5, gdzie objaśniono też znaczenie symboli v^* , i^* .

Po uwzględnieniu *rozwiązań d'Alemberta* dla bezstratnej linii transmisyjnej LC

$$I(x, t) = \frac{1}{2z} \left[\Phi\left(t - \frac{x}{\sigma}\right) - \Psi\left(t + \frac{x}{\sigma}\right) \right], \quad V(x, t) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(t - \frac{x}{\sigma}\right) - \Psi\left(t + \frac{x}{\sigma}\right) \right],$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= K\Psi(t), \\ \frac{dV(1, t)}{dt} &= \frac{1}{C_1}I(1, t) - \frac{1}{C_1}g[V(1, t)], \end{aligned}$$

gdzie: $z = \sqrt{L/C}$ jest *impedancją falową* linii, $\sigma = 1/\sqrt{LC}$ – *prędkością propagacji fali*,

a $K = (R_0 - z)/(R_0 + z)$ – *współczynnikiem odbicia*. Podstawienie $y(t) = \frac{1}{2}\Psi\left(t + \frac{1}{\sigma}\right)$ redukuje ten system równań do jednego równania neutralnego

$$\frac{d}{dt}[y(t) + Ky(t - r)] = -\frac{1}{zC_1}y(t) + \frac{K}{zC_1}y(t - r) - \frac{1}{C_1}g[y(t) + Ky(t - r)] \quad (6.60)$$

gdzie $r = 2/\sigma$.

Lopes [83] otrzymał następujące warunki stabilności. Jeżeli:

$$|K| < 1 \quad (6.61)$$

$$\inf \frac{g(\sigma)}{\sigma} > -\frac{1 - |K|}{z(1 + |K|)} = k_1 \quad (k_1 < 0), \quad g(0) = 0 \quad (6.62)$$

to punkt równowagi 0 systemu (6.60), traktowanego jako układ dynamiczny w przestrzeni stanu $C[-r, 0]$ jest globalnie eksponencjalnie stabilny.

Po zapisaniu (6.60) w postaci

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\frac{1}{zC_1}v(t) + \frac{2K}{zC_1}y(t - r) - \frac{1}{C_1}g[v(t)] \\ v(t) &= y(t) + Ky(t - r) \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

jest widoczne, że obwód Braytona może być też interpretowany jako abstrakcyjny układ semiliniowy w przestrzeniach – stanu $H = \mathbb{M}^2 = \mathbb{R} \oplus L^2(-r, 0)$ i sterowań $U = \mathbb{R}$ z operatorami

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{zC_1}v + \frac{2K}{zC_1}\psi(-r) \\ \psi' \end{bmatrix}, \\ D(A) &= \left\{ \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} \in H : \psi \in W^{1,2}(-r, 0), v = \psi(0) + K\psi(-r) \right\}, \end{aligned}$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$Bu = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad F \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = g(v) .$$

A jest generatorem infinitesimalnym liniowej C_0 -półgrupy na H – [42, str. 149], $B \in \mathbf{L}(U, H)$. Korzystając z warunków stabilności [42, Lemma 6.2.11, str. 151], w zastosowaniu do układu (6.63) z $g(v) = \mu v$ można pokazać (np. dokonując wnioskowania z rezultatów podanych w [42, str. 207]), że tak otrzymany system liniowy jest **EXS** niezależnie od r , gdy zachodzi (6.61) oraz (6.62) (w (6.62) mamy $\inf \frac{g(\sigma)}{\sigma} = \mu$). Z tego względu, dla otrzymania możliwie najłagodniejszych warunków stabilności systemu (6.63) kładziemy w Twierdzeniu 6.2.13:

$$\mathcal{M} = \left\{ F \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = g(v) : g \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), g(0) = 0, \frac{g(v)}{v} > k_1 \quad \forall v \neq 0 \right\} ,$$

$$M \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{C_1} v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Lu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad K = 0$$

(tutaj K oznacza operator z $\mathbf{L}(U)$ opisany w Twierdzeniu 6.2.13). Z lokalnej lipschitzowskość g wynika lokalna lipschitzowskość $F \in \mathcal{M}$, dzięki czemu założenie (i) Twierdzenia 6.2.13 jest spełnione. Wprost z definicji wynika też spełnienie (H2). Jeżeli wziąć $Qu = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} u$, $q \in \mathbb{R}$ to (H1) zachodzi, gdyż QF jest gradientem funkcjonału $q \int_0^v g(\xi) d\xi$. W celu rozwiązania układu (6.49) posłużymy się opisaną uprzednio formalną procedurą faktoryzacyjno-realizacyjną. Z (6.57) i (6.58) otrzymamy łatwo

$$\frac{\mathcal{F}((j\omega I - A)^{-1}Bu, u)}{|u|^2} = \operatorname{Re} G(j\omega) + k_1 |G(j\omega)|^2 - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) ,$$

$$G(s) = L^*(A - sI)^{-1}B = \frac{z(1 + Ke^{-sr})}{zsC_1(1 + Ke^{-sr}) + (1 - Ke^{-sr})} .$$

Stąd i z (6.59), dla $q = 0$, dostajemy

$$\Phi(s) = \frac{z(1 - |K|)|K|}{1 + |K|} \frac{1 - e^{-sr}}{zsC_1(1 + Ke^{-sr}) + (1 - Ke^{-sr})} ,$$

$$G \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{|K|(1 - |K|)}{zC_1(1 + |K|)}} v - (\operatorname{sign}K) \sqrt{\frac{|K|(1 - K^2)}{zC_1}} \psi(-r), \quad V = 0 \in \mathbb{R}$$

przy czym G jest funkcjonałem liniowym A – ograniczonym, ale $G \notin \mathbf{L}(H, U)$.

Metodami opisanymi szczegółowo w [50, Rozdział II.2] znajdujemy

$$H \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5v \\ \frac{|K|}{zC_1}\psi \end{bmatrix}$$

i bezpośrednim sprawdzeniem łatwo ustalić, że trójka (H, G, V) jest istotnie rozwiązaniem systemu Lurie (6.49). Teraz widać, że (6.50) zachodzi z

$$\alpha(r) = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{|K|}{zC_1} \right\} r^2$$

(dla $K = 0$ system (6.63) jest skończenie-wymiarowym układem Lurie, podpadającym pod Twierdzenie 6.1.5 i dlatego, bez straty ogólności rozważań można założyć, że $K \neq 0$).

Półgrupa generowana przez A jest **EXS**, a operator

$$BF(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}g(v) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ewidentnie jest zwarty, zatem założenie **(H8)** Twierdzenia 6.2.13 jest spełnione. Pozostaje wykazać, że **(H9)** zachodzi. Korzystając z (6.41), (6.42) ($z \varepsilon = 0$) ustalamy, że określone i ograniczone dla $t \in \mathbb{R}$ rozwiązania systemu semiliniowego, na których V jest stały pokrywają się z określonymi i ograniczonymi dla $t \in \mathbb{R}$ trajektoriami półgrupy liniowej $\left\{ \begin{bmatrix} v(t) \\ y_t \end{bmatrix} \right\}_{t \geq 0}$, $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, dla ustalonego $\theta \in [-r, 0]$, ge-

nerowanej przez A , dla których $v(t) = G \begin{bmatrix} v(t) \\ y_t \end{bmatrix} = 0$. Jediną taką trajektorią jest jednak trajektoria trywialnego rozwiązania zerowego. W ten sposób także założenie **(H9)** jest spełnione i na mocy tezy Twierdzenie 6.2.13 stwierdzamy, że warunek (6.61) oraz

$$\frac{g(v)}{v} > -\frac{1 - |K|}{z(1 + |K|)} = k_1, \quad g(0) = 0 \quad (6.64)$$

są warunkami **GAS** badanego systemu traktowanego jako układ dynamiczny w przestrzeni stanu \mathbb{M}^2 . Zwróćmy uwagę, że (6.64) jest warunkiem słabszym od (6.62), bowiem dopuszcza on nieliniowości g o wykresach mających asymptotę ukośną – prostą o nachyleniu k_1 .

Grabowski [47, str. 290 - 291] pokazał, że warunki Lopesa (6.61), (6.62) gwarantują globalną eksponencjalną stabilność zerowego punktu równowagi systemu (6.63), także w przestrzeni stanu \mathbb{M}^2 . Dowód opiera się na modyfikacji definicji klasy \mathcal{M} i operatorów M, L, H (operatory Q, K, V, G pozostają niezmienione):

$$\mathcal{M} = \left\{ F \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = g(v) : g \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), g(0) = 0, \right. \\ \left. \frac{g(v)}{v} \geq k_1 \left(1 + \frac{C_1 z r \varepsilon}{1 - K^2} \right)^{-1} \quad (\rightarrow k_1 \text{ gdy } \varepsilon \rightarrow 0+) \quad \forall v \neq 0 \right\},$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$M \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{C_1}v + \varepsilon v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Lu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2C_1} + \frac{\varepsilon zr}{2(1-K^2)} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$H \begin{bmatrix} v \\ \psi(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{2} + \frac{zr\varepsilon v C_1}{2(1-K^2)} \\ \left[\frac{|K|}{zC_1} + \varepsilon \left(\frac{r}{1-K^2} + (\cdot) \right) \right] \psi(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Efektorem tych modyfikacji jest pojawienie się członu $-\varepsilon \langle x, x \rangle_{\mathbb{H}}$ w prawej stronie pierwszego równania (6.49). W dowodzie Twierdzenia 6.2.13 zamiast (6.51) mamy teraz

$$V[x(t, x_0)] - V(x_0) \leq -\varepsilon \int_0^t \|x(\tau, x_0)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau.$$

Stąd, dla dowolnego, ustalonego x_0 funkcja $v(t) = V[x(t, x_0)]$ jest ciągła, malejąca, a zatem prawie wszędzie różniczkowalna i $\dot{v}(t) \leq -\varepsilon \|x(t, x_0)\|_{\mathbb{H}}^2$ dla prawie wszystkich $t \geq 0$. Z drugiej strony jest oczywiste istnienie stałej $\gamma > 0$ takiej, że

$$\gamma \|x\|_{\mathbb{H}}^2 \leq V(x) = \langle x, Hx \rangle_{\mathbb{H}} \leq \|H\|_{\mathbf{L}(\mathbb{H})} \|x\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

Z nierówności tych łatwo otrzymuje się globalną eksponencjalną stabilność zerowego punktu równowagi, a ograniczenie na $\frac{g(v)}{v}$ występujące w definicji zmodyfikowanej klasy \mathcal{M} jest równoważne warunkowi Lopesa (6.62).

Przedstawione wyniki można uogólnić na przypadek linii transmisyjnej RLGC bez zniekształceń ($R/L = G/C = \alpha$). W tym celu rozwiązania d'Alemberta należy zmodyfikować w sposób opisany w pracy [48, wzory (51)].

Stosowanie Twierdzeń 6.2.11 i 6.2.14 prowadzi do zdecydowanie gorszych rezultatów w porównaniu z wyżej otrzymanymi – por. [47].

6.3.2. Przykład 2. System klasy Gromowej–Pelewiny

Są to układy sterowania lub ogólnej systemy ze sprzężeniem zwrotnym opisane równaniem

$$\dot{\xi}(t) = A_0 \xi(t) + B_0 \xi(t-r) + bf[c^T \xi(t)] \quad (6.65)$$

gdzie $A_0, B_0 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest lokalnie lipschitzowską charakterystyką statyczną regulatora, $f(0) = 0$.

Częstotliwościowe warunki wystarczające **GAS** zerowego punktu równowagi w przestrzeni stanu $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ (typu twierdzeń Popova) przedyskutowano w monografii Rašvana [119, Rozdział 2], a pewne uproszczone kryteria, oparte na metodzie funkcyjnałów Lapunowa–Hale'a podano w [42, str. 115 - 118]. Twierdzenia 6.2.11 ÷ 6.2.14 pozwalają natomiast analizować **GAS** zerowego punktu równowagi w przestrzeni stanu $\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^n \oplus L^2(-r, 0; \mathbb{R}^n)$.

Lemat 6.3.1. Jeżeli dla dowolnego $\mu > 0$ system liniowy

$$\dot{\xi}(t) = (A_0 + \mu bc^T)\xi(t) + B_0\xi(t-r) \quad (6.66)$$

ma zerowy punkt równowagi **EXS** oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\operatorname{Re}[j\omega G(j\omega)] \geq \delta \quad (6.67)$$

dla dowolnej $\omega \in \mathbb{R}$, $j\omega$ nie będącej biegunem transmitancji części liniowej systemu (6.65)

$$G(s) = c^T(A_0 + e^{-sr}B_0 - sI)^{-1}b \ ,$$

to punkt równowagi 0 jest **GJAS**, w przestrzeni stanu \mathbb{M}^2 , dla dowolnej lokalnie lipschitzowskiej funkcji f , takiej, że

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma} > 0 \quad \forall \sigma \neq 0, \quad f(0) = 0 \quad (6.68)$$

Dowód. Wyprowadzimy ten rezultat z Twierdzenia 6.2.14. W tym celu w Twierdzeniu 6.2.11 kładziemy $H = \mathbb{M}^2$, $U = \mathbb{R}$,

$$A \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0\xi + B_0\psi(-r) \\ \psi' \end{bmatrix} \ ,$$

$$D(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} \in H : \psi \in W^{1,2}(-r, 0; \mathbb{R}^n), \psi(0) = \xi \right\} \ ,$$

$$\mathcal{M} = \left\{ F \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = f(c^T\xi) : f \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), f(0) = 0, \frac{f(\sigma)}{\sigma} > 0 \quad \forall \sigma \neq 0 \right\} \ ,$$

$$Bu = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad Qu = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad M = 0 \in \mathbf{L}(H), L = 0 \in \mathbf{L}(H, U), K = 0 \in \mathbf{L}(U) \ .$$

$F \in \mathcal{M}$ przeprowadza oczywiście dowolny ciąg słabo zbieżny w H w silnie zbieżny

w U , a operator QF jest gradientem funkcjonału $\begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} \mapsto \int_0^{c^T\xi} f(\sigma)d\sigma$. Założenia: (**i'**) w Twierdzeniu 6.2.14 oraz (**H1**), (**H2**), (**H5**), (**H6**) (otrzymuje się je jak w dowodzie Twierdzenia 6.1.5) w Twierdzeniu 6.2.11 są spełnione i pozostaje wykazać, że także (ε **H3**) zachodzi. W tym celu wprowadźmy do rozważań funkcjonal liniowy C

$$C \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = Q^*A \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = c^T A_0\xi + c^T B_0\psi(-r), \quad D(C) = D(A) \quad (6.69)$$

Chociaż C jest niedomykalny i w konsekwencji forma kwadratowa (6.57) traci sens, to jednak, wobec znikania operatorów M, L można jej nadać uogólniony sens, posługując się *przedstawieniem Diejcha* [32, str. 46, wzór (1.5)]. Zauważmy, że C spełnia warunek

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$\int_0^\infty \|CS(t)u_0\|_Y^2 dt \leq \gamma \|u_0\|_H^2 \quad \forall u_0 \in D(A) ,$$

dla pewnej liczby $\gamma > 0$. Teraz wszystkie założenia uogólnionego twierdzenia częstotliwościowego Lichtarnikova–Jakuboviča – patrz [32, Twierdzenie 1.1, str. 46] są spełnione i warunkiem koniecznym i wystarczającym zachodzenia ($\varepsilon\mathbf{H3}$) w Twierdzeniu 6.2.11 jest istnienie liczby $\delta > 0$ takiej, że

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}((j\omega I - A)^{-1}Bu, u)}{|u|^2} &= -c^T b + \operatorname{Re}[c^T (A_0 + e^{-i\omega r} B_0)(A_0 + e^{-i\omega r} B_0 - i\omega I)^{-1}b] = \\ &= \operatorname{Re}[j\omega G(j\omega)] \geq \delta \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \sigma(A) \end{aligned}$$

(przypomnijmy, że półgrupa generowana na H przez A jest ostatecznie zwarta i dlatego co najwyżej skończenie wiele wartości własnych A może leżeć na osi urojonej). To jednak jest zagwarantowane przez (6.67) i teza lematu wynika z Twierdzenia 6.2.14. \square

6.3.2.1. Zastosowanie. Stabilność reaktora jądrowego. Uproszczonego modelu dynamiki reaktora jądrowego, opisanemu w [43], odpowiada układ (6.65) z $n = 2$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(\sigma) = e^\sigma - 1 ,$$

przy czym $p > |a| > 0$. Nieliniowość spełnia warunek sektorowy (6.68). Ponieważ

$$\det[\lambda I - A_0 - \mu bc^T - e^{j\tau} B_0] = \lambda^2 + (1 + p\mu)\lambda + p\mu + a\mu e^{j\tau}, \quad \tau \in [0, 2\pi]$$

więc z jednej strony, biorąc $\tau = 0$ otrzymujemy $\operatorname{Re} \sigma[A_0 + \mu bc^T + B_0] < 0$ dla $\mu > 0$, a z drugiej strony, posługując się jedyneką trygonometryczną, ustalamy, że $\lambda = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem tego trójmianu, gdy

$$\omega^4 + \omega^2(1 + p^2\mu^2) + (p^2 - a^2)\mu^2 = 0 .$$

Jednak, wobec dodatniości współczynników ostatnie równanie nie posiada rzeczywistych rozwiązań i na mocy kryterium Yoshizawy – patrz [42, Lemat 6.1.3, str. 114] stwierdzamy, że układ (6.66) jest **EXS** niezależnie od $r \geq 0$.

Uwzględniając, że

$$G(s) = c^T (A_0 + e^{-sr} B_0 - sI)^{-1} b = \frac{p(s+1) + ae^{-sr}}{s(s+1)}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[j\omega G(j\omega)] &= \frac{p + a \cos \omega r + p\omega^2 - \omega a \sin \omega r}{1 + \omega^2} = \\ &= \frac{(p\omega - \frac{a}{2} \sin \omega r)^2 + \left[p - a \sin^2\left(\frac{\omega r}{2}\right)\right] \left[p + a \cos^2\left(\frac{\omega r}{2}\right)\right]}{p(1 + \omega^2)} . \end{aligned}$$

6.3. PRZYKŁADY I PROBLEMY OTWARTE

Z nierówności $p > |a| > 0$ wynikają nierówności $p - a \sin^2(\frac{\omega r}{2}) > 0$ oraz $p + a \cos^2(\frac{\omega r}{2}) > 0$ i w konsekwencji $\operatorname{Re}[j\omega G(j\omega)] > 0$ dla wszystkich $\omega \in \mathbb{R}$, niezależnie od $r \geq 0$. Stąd, wobec

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = p$$

dostajemy (6.67) niezależnie od $r \geq 0$. Ostatecznie, z Lematu 6.3.1 wynika, że zerowy punkt równowagi badanego systemu jest **GJAS**, niezależnie od $r \geq 0$.

Dla porównania z pomocą uproszczonych funkcjonałów Lapunowa–Hale’a [42, str. 119 - 123], otrzymano bardziej restryktywne wyniki dotyczące **GAS**, niezależnie od $r \geq 0$, zerowego punktu równowagi w przestrzeni stanu $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Lemat 6.3.1 stanowi uogólnienie, na system (6.65), dotąd nie udowodnionej, zdegenerowanej wersji metody Popova z $q = \infty$ – obj. [119, Twierdzenie 7.4, str. 69 wraz z uwagą na str. 72]. Dla standardowej wersji metody Popova mamy $q < \infty$, a warunki sektorowe nakładane na f definiują operatory M, L, K , przy czym co najmniej jeden z operatorów M, L jest niezerowy. Teraz, dla uporania się z problemem niedomykalności operatora $Q^*A = qC$, C – zdefiniowany wzorem (6.69), przy czym $q \neq 0$, przedstawienie Diejča już nie wystarcza i otwartym pozostaje problem otrzymania częstotliwościowych warunków gwarantujących istnienie rozwiązań systemu (6.36) lub (6.37) lub (6.38) lub (6.49). Sprawę dodatkowo komplikuje fakt, że w pewnych przypadkach optymalne warunki absolutnej stabilności odpowiadają słabym nierównościom częstotliwościowym.

Dla przykładu, system (6.65) z $n = 1$, $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$, $b = -1$, $c = 1$ ma zerowy punkt równowagi **GAS**, niezależnie od $r \geq 0$, w przestrzeni stanu \mathbb{M}^2 , dla dowolnej lokalnie lipschitzowskiej funkcji f , takiej, że

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma} > A_0 + |B_0| \quad \forall \sigma \neq 0, \quad f(0) = 0 \quad (6.70)$$

W [42, str. 118] otrzymano taki sam rezultat dla przestrzeni stanu $C[-r, 0]$, natomiast wynik powyższy otrzymuje się kładąc w Twierdzeniu 6.2.13:

$$\mathcal{M} = \left\{ F \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = f(\xi) : f \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), \frac{f(\sigma)}{\sigma} > A_0 + |B_0| \quad \forall \sigma \neq 0, f(0) = 0 \right\},$$

$$M \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_0 + |B_0|)\xi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Lu = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad K = 0 \in \mathbf{L}(U), \quad Qu = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli $F \in \mathcal{M}$ to QF jest gradientem funkcjonału $\begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} \mapsto q \int_0^\xi f(\sigma) d\sigma$, a (6.35) wynika z (6.70) i założenia (i) oraz (H1), (H2) Twierdzenia 6.2.13 są spełnione. Dla $q = \frac{2}{|B_0|}$ układ równań Lurie (6.49) ma rozwiązanie:

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINEOWYCH

$$H \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2} - \frac{A_0}{|B_0|})\xi \\ \frac{|B_0|}{2}\psi \end{bmatrix}, \quad Vu = -\sqrt{\frac{2}{|B_0|}}$$

$$G \begin{bmatrix} \xi \\ \psi \end{bmatrix} = \frac{2A_0 + |B_0|}{\sqrt{2|B_0|}}\xi + \frac{B_0}{\sqrt{2|B_0|}}\psi(-r),$$

a zatem **(H3)** też zachodzi. Z (6.70) otrzymujemy oszacowanie

$$\int_0^\xi f(\sigma)d\sigma \geq \frac{(A_0 + |B_0|)\xi^2}{2},$$

z którego łatwo wynika (6.50) z $\alpha(s) = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{|B_0|}{2} \right\} s^2$ (bez straty ogólności rozważań można zakładać $B_0 \neq 0$, bo dla $B_0 = 0$ mamy system bez opóźnienia i dowodzony wynik jest wnioskiem z Twierdzenia 6.1.5/przypadek **(II)**). Tak więc **(H7)** też zachodzi. Spełnienie **(H8)** jest konsekwencją ostatecznej zwartości (dla $t \geq r$) półgrupy generowanej przez A . Wreszcie V jest stały na takich ograniczonych i określonych dla $t \in \mathbb{R}$ trajektoriach półgrupy liniowej, generowanej przez A , na których $\xi(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, co jest możliwe oczywiście tylko dla zerowego punktu równowagi. Ostatecznie i założenie **(H9)** w Twierdzeniu 6.2.13 jest spełnione, i nasz rezultat jest konsekwencją tezy tego twierdzenia.

Zauważmy, że w rozpatrywanym przykładzie mamy

$$0 \leq q \leq \frac{2}{|B_0|} \iff \frac{\mathcal{F}((j\omega I - A)^{-1}Bu, u)}{|u|^2} = \operatorname{Re} G(j\omega) + (A_0 + |B_0|)|G(j\omega)|^2 -$$

$$-\omega q \operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{|B_0| - B_0 \cos \omega r + q(\omega^2 + \omega B_0 \sin \omega r)}{|A_0 + e^{-j\omega r} B_0 - j\omega|^2} =$$

$$= \frac{q(\omega + \frac{B_0}{2} \sin \omega r)^2 + [|B_0| - B_0 \cos \omega r] [1 - \frac{q}{4} (|B_0| + B_0 \cos \omega r)]}{|A_0 + e^{-j\omega r} B_0 - j\omega|^2} \geq$$

$$\geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \sigma(A).$$

Jeżeli $q = 0$ to (6.55) jest trywialnie spełnione, ale Lemat 6.2.15 nie rozstrzyga problemu rozwiązalności układu Lurie (6.49), bo dla przeliczalnie wielu ω realizowana jest równość (przypadek taki odpowiada zdegenerowanemu twierdzeniu częstotliwościowemu Lichtarnikova–Jakuboviča). Jednak formalna procedura faktoryzacyjno-realizacyjna oparta na wzorach (6.58), (6.59) pozwala jawnie otrzymać rozwiązanie systemu (6.49).

Jeżeli $q = \frac{2}{|B_0|}$ to (6.55) nie jest spełniony, a dla $B_0 > 0$ równość jest realizowana w punkcie $\omega = 0$. Wzory (6.58), (6.59) dają wypisane uprzednio rozwiązanie (H, G, V) systemu (6.49). Ani Lemat 6.2.15, ani wzmiankowany wynik Diejča nie dają żadnej odpowiedzi na pytanie o rozwiązalność układu Lurie (6.49).

6.3.3. Przykład 3. Jednowymiarowe, semiliniowe równania fizyki matematycznej

6.3.3.1. Równania paraboliczne. Rozważać będziemy układy fizyczne dające się opisać semiliniowym równaniem parabolicznym

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + f[v(x, t)], \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (6.71)$$

warunkami brzegowymi typu Dirichleta:

$$v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.72)$$

okresowymi warunkami brzegowymi:

$$v(0, t) = v(1, t), \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(1, t)}{\partial t}, \quad t \geq 0 \quad (6.73)$$

lub warunkami brzegowymi typu Neumanna:

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v(1, t)}{\partial t} = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.74)$$

Konkretnym przykładem – np. systemu (6.74), może być elektryczny opornik balastowy (opornik drutowy zanurzony w kąpeli gazowej o stałej temperaturze) opisany w [12] i analizowany przez w [27]. W tym przypadku $v(x, t)$ oznacza przestrzenny rozkład, w chwili t , różnicy temperatur opornika i kąpeli, a funkcja f ujmuje zależność rezystancji materiału oporowego od temperatury, przy założeniu stałości prądu przepływającego przez opornik.

Lemat 6.3.2. Jeżeli $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in W_{loc}^{1, \infty}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ oraz

$$\frac{f(z)}{z} \leq \begin{cases} \pi^2 - \varepsilon, & \text{w przypadku układu (6.72)} \\ -\varepsilon, & \text{w przypadkach układów (6.73) i (6.74)} \end{cases}, \quad \forall z \neq 0 \quad (6.75)$$

gdzie ε jest dowolnie małe, dodatnie to zerowy punkt równowagi jest **GAS** w przestrzeni stanu H , przy czym:

- w przypadku (6.72)

$$H = W_0^{1,2}(0, 1) = \{v \in W^{1,2}(0, 1) : v(0) = 0, v(1) = 0\}$$

z iloczynem skalarnym

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{W_0^{1,2}} = \int_0^1 v_1'(x) v_2'(x) dx \quad ,$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

- w przypadku (6.73)

$$\mathbf{H} = \left\{ v \in \mathbf{W}^{1,2}(0,1) : v(0) - v(1) = \langle h, v \rangle_{\mathbf{W}^{1,2}} = 0, \quad h(x) = \frac{e^x - e^{1-x}}{e+1} \right\}$$

ze standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbf{W}^{1,2}(0,1)$,

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbf{W}^{1,2}} = \int_0^1 v_1(x)v_2(x)dx + \int_0^1 v_1'(x)v_2'(x)dx ,$$

ale zacieśnionym do (domkniętej) podprzestrzeni $\ker h^*$,

- w przypadku (6.74) $\mathbf{H} = \mathbf{W}^{1,2}(0,1)$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

Dowód. Przypadek warunków brzegowych (6.72). W przestrzeni stanu \mathbf{H} i przestrzeni sterowań $\mathbf{U} = \mathbf{H}$ daje się zapisać system (6.72) w postaci abstrakcyjnego układu semiliniowego (6.33) z operatorami $Av = v''$, $D(A) = \{v \in \mathbf{H} : v'' \in \mathbf{H}\}$, $B = I$. Operator A jest domknięty, gęsto zdefiniowany, $A = A^* \leq 0$ i ma ograniczony operator odwrotny. Więcej, $A^{-1} = \hat{I}\tilde{A}^{-1}$, gdzie $\tilde{A}^{-1} \in \mathbf{L}(\mathbf{H}, D_A)$, D_A oznacza przestrzeń Hilberta $D(A)$ z topologią wykresu A , a \hat{I} – kanoniczną injekcją z $\mathbf{W}^{3,2}(0,1)$ w $\mathbf{W}^{1,2}(0,1)$. Z twierdzenia Agmona – patrz [108, Twierdzenie 1.1, str. 208] wynika, że \hat{I} jest operatorem zwartym. Tak więc A^{-1} też jest zwarty i A ma zwartą rezolwentę. Zatem operator A ma bazę ortonormalną z wektorów własnych, dzięki czemu można ustalić, że faktycznie $A = A^* \leq \lambda_{\max}(A)I = -\pi^2 I$. A generuje na \mathbf{H} półgrupę analityczną, a więc i jednostajnie ciąglią dla $t > 0$. Z rezultatu [108, Twierdzenie 3.3, str. 48] wynika, że półgrupa ta jest zwarta dla $t > 0$, dzięki czemu założenie **(H8)** w Twierdzeniu 6.2.13 jest spełnione. Podstawiamy teraz w Twierdzeniu 6.2.13:

$$\mathcal{M} = \left\{ F : (F(v))(x) = f[v(x)], \quad f \in C^1(\mathbb{R}), \quad f' \in \mathbf{W}_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0 , \right. \\ \left. \frac{f(z)}{z} \leq \pi^2 - \varepsilon, \quad \varepsilon - \text{dowolnie małe dodatnie} \right\} ,$$

$$Q = A^{-1}, \quad M = L = K = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{H}) .$$

Dla sprawdzenia inkluzji **(i)** w Twierdzeniu 6.2.13 należy wykazać lokalną lipschitzowskość $F \in \mathcal{M}$. Mamy zatem pokazać, że

$$\forall r > 0 \exists q > 0 : \|F(v_1) - F(v_2)\|_{\mathbf{H}} \leq q \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{H}} \quad \forall v_i \in \mathbf{H}, \quad \|v_i\|_{\mathbf{H}} \leq r, \quad i = 1, 2 .$$

Ustalamy zatem dowolnie $r > 0$ i wybieramy dowolnie $v_i \in \mathbf{H}$, $\|v_i\|_{\mathbf{H}} \leq r$, $i = 1, 2$. Zachodzi następująca implikacja:

$$v \in \mathbf{W}_0^{1,2}(0,1) \implies |v(x)| \leq \|v\|_{\mathbf{W}_0^{1,2}} \quad \forall x \in [0,1] \quad (6.76)$$

Istotnie,

$$|v(x)| \leq \left| \int_0^x v'(\xi) d\xi \right| \leq \|v'\|_{L^1(0,1)} \leq \|v'\|_{L^2(0,1)} = \|v\|_{\mathbf{H}} .$$

Teraz mamy

$$\begin{aligned} \|F(v_1) - F(v_2)\|_{\mathbf{H}}^2 &= \int_0^1 \left[\{f'[v_1(x)]v_1'(x) - f'[v_1(x)]v_2'(x)\} + \right. \\ &+ \left. \{f'[v_1(x)]v_2'(x) - f'[v_2(x)]v_2'(x)\} \right]^2 dx \leq 2 \int_0^1 \{f'[v_1(x)]\}^2 [v_1'(x) - \\ &- v_2'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 [v_2'(x)]^2 \{f'[v_1(x)] - f'[v_2(x)]\}^2 dx \end{aligned} \quad (6.77)$$

Ponieważ $f \in C^1(\mathbb{R})$, a na mocy (6.76) $|v_1(x)| \leq r$, więc istnieje $m > 0$ takie, że $\{f'[v_1(x)]\}^2 \leq m^2$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$ i pierwsza całka w prawej stronie (6.77) jest szacowana przez $2m^2 \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{H}}^2$.

Korzystając z lokalnej lipschitzowskości f' stwierdzamy istnienie stałej $n > 0$ takiej, że $|f'(z_1) - f'(z_2)| \leq n|z_1 - z_2|$ dla $z_i \in \mathbb{R}$, $|z_i| \leq r$, $i = 1, 2$. Dzięki temu druga całka w prawej stronie (6.77) jest szacowana przez

$$\begin{aligned} 2n^2 \int_0^1 [v_2'(x)]^2 [v_1(x) - v_2(x)]^2 dx &\leq 2n^2 \|v_2\|_{\mathbf{H}}^2 \|v_1 - v_2\|_{C[0,1]}^2 \leq \\ &\leq 2n^2 \|v_2\|_{\mathbf{H}}^2 \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{H}}^2 . \end{aligned}$$

W ten sposób (6.77) implikuje nierówność Lipschitza za stałą Lipschitza

$$q = \sqrt{2m^2 + 2n^2 r^2} .$$

Jeżeli $F \in \mathcal{M}$ to założenie **(H2)** w Twierdzeniu 6.2.13 jest trywialnie spełnione a weryfikacja **(H1)** polega na wykazaniu, że QF

$$(QF(v))(x) = (A^{-1}F(v))(x) = -x \int_0^1 (1-z)f[v(z)]dz + \int_0^x (x-z)f[v(z)]dz \quad (6.78)$$

jest gradientem pewnego funkcjonału klasy C^1 . Jeżeli taki funkcjonał istnieje to musi być postaci

$$W(v) = \int_0^1 \langle v, QF(sv) \rangle_{\mathbf{H}} ds = \int_0^1 \int_0^1 v'(x) \frac{d}{dx} [(QF(v))'(x)] dx ds .$$

Stąd, po uwzględnieniu (6.78), elementarnych przekształceniach i zastosowaniu twierdzenia Fubinięgo–Tonelliego otrzymamy

$$W(v) = - \int_0^1 \langle v, F(sv) \rangle_{L^2(0,1)} ds = - \int_0^1 \int_0^{v(x)} f(z) dz dx \quad (6.79)$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINEOWYCH

Pozostaje stwierdzić, że istotnie pochodną Frécheta funkcjonału W jest QF . Uwzględniając (6.79) i (6.78) otrzymamy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|h\|_{\mathbb{H}}} |W(v+h) - W(v) - \langle v, QF(v) \rangle_{\mathbb{H}}| = \\ & = \frac{1}{\|h\|_{\mathbb{H}}} \left| \int_0^1 \{h(x)f[v(x)] - \int_{v(x)}^{v(x)+h(x)} f(z)dz\} dx \right| = \\ & = \frac{1}{\|h\|_{\mathbb{H}}} \left| \int_0^1 \int_0^{h(x)} \{f[\xi + v(x)] - f[v(x)]\} d\xi dx \right|. \end{aligned}$$

Stosując (6.76) raz do h a raz do v , otrzymamy $\xi \in [0, h(x)] \subset [-\|h\|_{\mathbb{H}}, \|h\|_{\mathbb{H}}]$, $|v(x)| \leq \|v\|_{\mathbb{H}}$, skąd po uwzględnieniu, że $f \in C^1(\mathbb{R})$ prawa strona jest szacowana od góry przez

$$\frac{1}{\|h\|_{\mathbb{H}}} \int_0^1 \int_{\|h\|_{\mathbb{H}}}^{-\|h\|_{\mathbb{H}}} \max_{|z| \leq \|h\|_{\mathbb{H}} + \|v\|_{\mathbb{H}}} |f'(z)| |\xi| d\xi dx = \|v\|_{\mathbb{H}} \max_{|z| \leq \|h\|_{\mathbb{H}} + \|v\|_{\mathbb{H}}} |f'(z)| \longrightarrow 0 .$$

W analizowanym przykładzie $A = A^* < 0$, $R(Q) = D(A^*)$ a zatem warunek (6.55) jest spełniony. Podstawiając w (6.57) $x = (j\omega I - A)^{-1}u$ i uwzględniając tożsamość

$$\frac{1}{2}(A + j\omega I)^{-1} + \frac{1}{2}(A - j\omega I)^{-1} - A^{-1} = \omega^2(-A)^{-1}(A + j\omega I)^{-1}(A - j\omega I)^{-1}$$

w (6.58), otrzymujemy $\Phi(s) = \pm s(-A)^{-\frac{1}{2}}(A - sI)^{-1}$. Stąd, korzystając z (6.59) określamy część rozwiązania systemu Lurie (6.49): $V = \pm(-A)^{-\frac{1}{2}}$, $G = \mp(-A)^{\frac{1}{2}}$. Podstawiając te operatory do drugiego równania (6.49) dostajemy $H = (1/2)I$ (pierwsze równanie (6.49) jest też spełnione). Zwróćmy uwagę na fakt, że formalna procedura faktoryzacyjno-realizacyjna pozwoliła nam na zweryfikowanie założenia **(H3)** w Twierdzeniu 6.2.13 przez jawne określenie dwu rozwiązań systemu (6.49) podczas, gdy Lemat 6.2.15 nic nie daje, bo dla $\omega = 0$ warunek (6.56) nie jest spełniony.

Do dalszych rozważań potrzebna nam będzie następująca implikacja, której następnik nazywany jest *nierównością Poincaré*

$$v \in W_0^{1,2}(0,1) \implies \frac{1}{\pi^2} \|v\|_{W_0^{1,2}}^2 \geq \|v\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (6.80)$$

(6.80) wynika ze spektralnych własności nieograniczonego w $L^2(0,1)$ operatora

$$Dv = v'', \quad D(D) = \{v \in H^2(0,1) : v(0) = 0, v(1) = 0\} .$$

D jest dyskretny, samosprzężony i $\lambda_{\max}(D) = -\pi^2$, dzięki czemu

$$\|v\|_{\mathbb{H}}^2 = \|(-D)^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2(0,1)}^2 = \langle v, -Dv \rangle_{L^2(0,1)} \geq \pi^2 \|v\|_{L^2(0,1)}^2 \quad \forall v \in D(D)$$

z tym, że po przejściu do skrajnych stron ważność nierówności rozciąga się na H .

6.3. PRZYKŁADY I PROBLEMY OTWARTE

Po uwzględnieniu (6.80) w przecałkowanej, w granicach od 0 do 1, a wynikającej z (6.75) nierówności

$$-\int_0^{v(x)} f(z)dz \geq \frac{-\pi^2 + \varepsilon}{2}v^2(x) \quad \forall x \in [0, 1] ,$$

otrzymuje się łatwo (6.50) z $\alpha(r) = \frac{\varepsilon}{2\pi^2}r^2$ i założenie **(H7)** w Twierdzeniu 6.2.13 jest spełnione. Pozostaje wykazać, że także i założenie **(H9)** jest wypełnione. W tym celu zauważmy, że z nierówności $A \leq -\pi^2 I$ wynika, że

$$\begin{aligned} -\|Gv + VF(v)\|_{\mathbb{H}}^2 &= -\|(-A)^{\frac{1}{2}}[v + A^{-1}F(v)]\|_{\mathbb{H}}^2 = \\ &= \langle v + A^{-1}F(v), A[v + A^{-1}F(v)] \rangle_{\mathbb{H}} \leq -\pi^2 \|v + A^{-1}F(v)\|_{\mathbb{H}}^2 \quad \forall v \in D(A) . \end{aligned}$$

Postępując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.2.11 łatwo dochodzimy do wniosku, że funkcjonal Lapunowa $V(v) = \langle v, Hv \rangle_{\mathbb{H}} + W(v)$ jest stały na tych słabych rozwiązaniach systemu, które leżą w zbiorze $\{v \in \mathbb{H} : v + A^{-1}F(v) = 0\}$. Ponieważ $R(A^{-1}) = D(A)$ więc zbiór ten jest równy zbiorowi $\{v \in D(A) : v + A^{-1}F(v) = 0\}$. Z twierdzenia Sobolewa o włożeniu – patrz [108, Twierdzenie 1.2, str. 208] wynika, że $D(A) \subset W^{3,2}(0, 1) \subset C^2[0, 1]$ i badany zbiór pokrywa się ze zbiorem rozwiązań klasy C^2 problemu brzegowego

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(x) + f[v(x)] = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ v(0) = 0 \\ v(1) = 0 \end{array} \right\} \quad (6.81)$$

Mnożymy pierwsze równanie (6.81) obustronnie przez $v(x)$, całkujemy obustronnie w granicach od 0 do 1 z uwzględnieniem drugiego równania (6.81), a do otrzymanego związku dołączamy nierówność Poincaré (6.80) i wniosek z nierówności (6.75). W efekcie otrzymujemy ciąg nierówności

$$(\pi^2 - \varepsilon) \|v\|_{L^2}^2 \geq \langle v, F(v) \rangle_{L^2} = \|v\|_{\mathbb{H}}^2 \geq \pi^2 \|v\|_{L^2}^2 .$$

Tylko $v = 0$ spełnia ten związek. Tak więc jedynym słabym rozwiązaniem systemu, na którym V jest stały, jest trywialne rozwiązanie zerowe. Założenie **(H9)** w Twierdzeniu 6.2.13 jest zatem także spełnione i teza lematu, w przypadku (6.72) wynika z tezy Twierdzenia 6.2.13.

Przypadki warunków brzegowych (6.73) i (6.74). Dowody przebiegają według tego samego schematu, z tym, że niektóre obiekty, oprócz oczywiście przestrzeni stanu \mathbb{H} , wstawiane do Twierdzenia 6.2.13 trzeba wybrać inaczej – i tak:

- dla systemu (6.73) bierzemy:

$$Av = v'', \quad D(A) = \{v \in \mathbb{H} : v', v'' \in \mathbb{H}\} ,$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$\mathcal{M} = \left\{ F : F(v)(x) = f[v(x)], f \in C^1(\mathbb{R}), f' \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), f(0) = 0, \right. \\ \left. \frac{f(z)}{z} \leq -\varepsilon, \varepsilon - \text{dowolnie małe dodatnie} \right\},$$

$$Q = (A - I)^{-1}, \quad H = \frac{1}{2}(A - I)^{-1}A, \quad V = (I - A)^{-\frac{1}{2}}, \quad G = (I - A)^{-\frac{1}{2}}A$$

(wypisano tylko jedno rozwiązanie), operatory B, M, L, K są takie same jak w przypadku systemu (6.72),

- dla systemu (6.74) bierzemy

$$Av = v'', \quad D(A) = \{v \in H : v', v'' \in H, v'(0) = 0, v'(1) = 0\},$$

a pozostałe obiekty $\mathcal{M}, B, Q, M, L, K, H, V, G$ są brane jak w przypadku systemu (6.73). □

Porównajmy otrzymane wyniki z istniejącymi w literaturze. Dla systemu (6.72) rezultaty są nieznacznie lepsze niż wynik Walkera [141, Ćwiczenia 5.5, 5.7, str. 190 - 192], gdzie założono, że $f \in C^2(\mathbb{R})$ i f'' jest ograniczona na \mathbb{R} . Znane jest też częściowe uogólnienie na przypadek wielowymiarowego obszaru przestrzennego – patrz [25].

Dla systemu (6.73), Pazy [108, Twierdzenie 2.7, str. 237] otrzymał **GAS** w przestrzeni stanu

$$C_P[0, 1] = \{v \in C[0, 1] : v(0) = v(1)\}$$

z normą przestrzeni $C[0, 1]$ zacieśnioną do tej podprzestrzeni i przy założeniu hölderowskiej ciągłości f , $zf(z) < 0$ dla wszystkich $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Warunki nakładane na f są słabsze od naszych, z drugiej jednak strony zmierzanie do 0 w normie H implikuje zmierzanie do 0 w normie $C_P[0, 1]$.

Chafee [26] wykazał, że warunki: $f \in C^2(\mathbb{R})$, $zf(z) < 0$ w otoczeniu $z = 0$, $f(0) = 0$ gwarantują **AS** zerowego punktu równowagi systemu (6.74) w przestrzeni $C^1[0, 1]$.

Podstawą analizy systemu (6.72) było stwierdzenie generowania, przez słabe rozwiązania, lokalnego układu dynamicznego na przestrzeni $W_0^{1,2}(0, 1)$. Wykorzystując fakt, że część liniowa jest generatorem infinitezymalnym liniowej półgrupy analitycznej można, stosując teorię abstrakcyjnego układu semiliniowego typu parabolicznego przedstawioną w monografii Henry'ego [61], otrzymać to samo stwierdzenie przy słabszych założeniach odnośnie regularności funkcji f (tylko lokalna lipschitzowskość f). Przy tym, uogólnioną w tym kierunku wersję Lematu 6.3.2, można wyprowadzić z przedstawionej w tej monografii uogólnienia metody funkcjonałów Lapunowa.

Semiliniowe równanie paraboliczne (6.72) może być też rozpatrywane w przestrzeni $L^2(0, 1)$. W tym przypadku w (6.75) można wziąć nawet $\varepsilon = 0$, jednak z drugiej strony należy przyjąć pewne ograniczenia co do tempa wzrostu funkcji f . Najładniejszą postać warunku wzrostu f uzyskał Nakao [95].

Dla nieliniowości monotonicznych można stosować też „subgradientową” interpretację równań typu (6.71) – patrz [62].

6.3.3.2. Równania hiperboliczne. Rozważać będziemy układy fizyczne dające się opisać semiliniowym równaniem typu hiperbolicznego:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = v(x,t) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -2\alpha v(x,t) + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f[u(x,t)] \end{array} \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

z warunkami brzegowymi typu Dirichleta:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.82)$$

lub typu Neumanna:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.83)$$

Konkretne przykłady systemów fizycznych, których dynamikę można opisać równaniami tego typu podano w książce Scotta [125].

Lemat 6.3.3. Jeżeli $f \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ oraz

$$\frac{f(z)}{z} \leq \left\{ \begin{array}{l} \pi^2 - \varepsilon, \quad \text{w przypadku (6.82)} \\ -\varepsilon, \quad \text{w przypadku (6.83)} \end{array} \right\} \quad \forall z \neq 0, \quad \varepsilon \text{ dowolnie małe, } \varepsilon > 0$$

to zerowy punkt równowagi jest **GAS** w przestrzeni stanu H , gdzie:

- w przypadku (6.82) $H = W_0^{1,2}(0,1) \times L^2(0,1)$ z iloczynem skalarnym

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_H = \int_0^1 u_1'(x)u_2'(x)dx + \int_0^1 v_1(x)v_2(x)dx ;$$

- w przypadku (6.83) $H = W^{1,2}(0,1) \times L^2(0,1)$ z iloczynem skalarnym

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_H = \int_0^1 u_1(x)u_2(x)dx + \int_0^1 u_1'(x)u_2'(x)dx + \int_0^1 v_1(x)v_2(x)dx.$$

Dowód. Ograniczymy się do podania myśli przewodniej dowodu. Rezultat ten wyprowadza się z Twierdzenia 6.2.13 podstawiając w nim

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

- w przypadku (6.82):

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -D & -2\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad D(A) = D(D) \times W_0^{1,2}(0,1),$$

$$D\phi = \phi'', \quad D(D) = \{\phi \in W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1) : \phi(0) = 0, \phi(1) = 0\},$$

$$B\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \xi, \quad \xi \in U = L^2(0,1),$$

$$\mathcal{M} = \left\{ F : F \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (x) = f[u(x)], f \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), \right.$$

$$\left. f(0) = 0, \frac{f(z)}{z} \leq \pi^2 - \varepsilon \quad \forall z \neq 0, \varepsilon - \text{dowolnie małe dodatnie} \right\},$$

$$Q\xi = \begin{bmatrix} D^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \xi, \quad M = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{H}), \quad L = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H}), \quad K = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{U}),$$

$$H = \frac{1}{2}I \in \mathbf{L}(\mathbf{H}), \quad G \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \pm\sqrt{2\alpha}v, \quad V = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{U}),$$

- w przypadku (6.83):

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -N & -2\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad D(A) = D(N) \times W^{1,2}(0,1),$$

$$N\phi = \phi'', \quad D(N) = \{\phi \in W^{2,2}(0,1) : \phi'(0) = 0, \phi'(1) = 0\},$$

$$B\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \xi, \quad \xi \in U = L^2(0,1),$$

$$\mathcal{M} = \left\{ F : F \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (x) = f[u(x)], f \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}), \right.$$

$$\left. f(0) = 0, \frac{f(z)}{z} \leq -\varepsilon \quad \forall z \neq 0, \varepsilon - \text{dowolnie małe dodatnie} \right\},$$

$$Q\xi = \begin{bmatrix} (N - I)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \xi, \quad M = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{H}), \quad L = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{H}), \quad K = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{U}),$$

$$H \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}N(N - I)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbf{L}(\mathbf{H}),$$

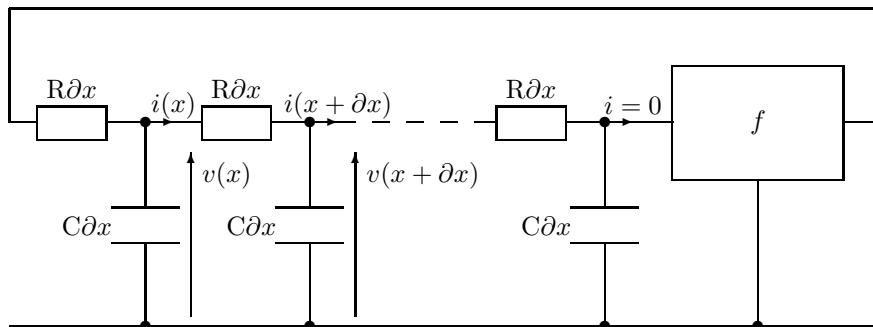
$$G \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \pm\sqrt{2\alpha}v, \quad V = 0 \in \mathbf{L}(\mathbf{U}).$$

□

Dla systemu (6.82) wersję Lematu 6.3.3, ale przy bardziej restryktywnych założeniach nakładanych na f otrzymał Webb [143]. W przypadku systemu (6.83) rezultat zbliżony do Lematu 6.3.3 może być wyprowadzony z wyników Marcatiego [87].

6.3.4. Przykład 4. Generator na linii transmisyjnej RC

Przykład ten ukazuje perspektywy badań tych systemów, do których nie stosują się Twierdzenia 6.2.11 ÷ 6.2.14. Chodzi tu o systemy z nieliniowymi, brzegowymi sprzężeniami zwrotnymi. W ostatnich latach zaznaczył się wzrost liczby publikacji poświęconych zwłaszcza problemowi dobrego postawienia tego typu problemów. Wymieńmy tu prace [6], [100], [124], [78], [75], [76], [77], [157]. Badania te nie obejmują jednak swym zasięgiem modelu matematycznego generatora na linii transmisyjnej RC, przedstawionego na rysunku 6.6.



Rysunek 6.6. Generator z linią drabinkową RC

Napięciowo-napięciowy blok nieliniowy o charakterystyce statycznej f jest realizowany na wzmacniaczu operacyjnym, a zatem w najprostszym przypadku f odpowiada charakterystyce statycznej wzmacniacza z nasyceniem. Będziemy jednak abstrahować od konkretnej postaci f , starając się raczej określić warunki typu sektorowego nakładane na f a gwarantujące **GAS** zerowego punktu równowagi.

System opisuje się następującymi równaniami

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial v(1, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \\ v(0, t) = f[v(1, t)], \quad t \geq 0 \end{array} \right\} \quad (6.84)$$

Inżynierska aproksymacja systemu (6.84) polega na zastąpieniu linii transmisyjnej RC łańcuchem n jednakowych ogniw RC o parametrach skupionych – rezystancji $\frac{R}{n}$ i pojemności $\frac{C}{n}$, co prowadzi do modelu skończenie-wymiarowego, w którym bez straty ogólności rozważań przyjęto $RC = 1$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + bf[c^T y(t)], \quad A = n^2 A_0 \quad (6.85)$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

gdzie:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{R}^n), \quad b = n^2 b_0, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Układ (6.85) jest zatem szczególnym przypadkiem układu Lurie (6.21). Wielomian charakterystyczny trójprzekątniowej macierzy A_0 wyraża się wzorem

$$\det(\lambda I - A_0) = (\lambda + 1)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) \quad (6.86)$$

gdzie P_n jest wielomianem Czebyszewa drugiego rodzaju, stopnia n , określonym przez formuły rekurencyjne:

$$P_0(\lambda) = 1, \quad P_1(\lambda) = \lambda + 2, \quad P_k(\lambda) = (\lambda + 2)P_{k-1}(\lambda) - P_{k-2}(\lambda), \quad k \geq 2 \quad (6.87)$$

W celu otrzymania jawnych wzorów na $\det(\lambda I - A_0)$ przedstawiamy P_k w postaci

$$P_k(\lambda) = a_k(k)\lambda^k + \dots + a_s(k)\lambda^s + \dots + a_0(k) \quad (6.88)$$

Uwzględniając (6.88) w (6.87) otrzymujemy wzory rekurencyjne na nieznanne współczynniki $a_s(k)$, $s = 0, 1, 2, \dots, k$ wielomianu Czebyszewa P_k

$$a_s(k) = 2a_s(k-1) + a_{s-1}(k-1) - a_s(k-2),$$

$$a_s(0) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \geq 1 \end{cases}, \quad a_s(1) = \begin{cases} 2, & s = 0 \\ 1, & s = 1 \\ 0, & s \geq 2 \end{cases}.$$

Stąd

$$a_s(k) = \binom{k+s+1}{2s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, k \quad (6.89)$$

Ze wzorów (6.86) ÷ (6.89) znajdujemy ostateczną postać wielomianu charakterystycznego macierzy A_0

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_0) &= P_n(\lambda) - P_{n-1}(\lambda) = \sum_{s=0}^n \left[\binom{n+s+1}{2s+1} - \binom{n+s}{2s+1} \right] \lambda^s = \\ &= \sum_{s=0}^n \binom{n+2s}{s} \lambda^s \end{aligned}$$

oraz transmitancję liniowej części systemu (6.85)

$$\begin{aligned}
G(\lambda) &= c^T (A - \lambda I)^{-1} b = \frac{c^T \operatorname{adj}(A_0 - \frac{\lambda}{n^2} I) b_0}{\det(A_0 - \frac{\lambda}{n^2} I)} = \\
&= \frac{-1}{\sum_{s=0}^n \binom{n+s}{2s} \left(\frac{\lambda}{n^2}\right)^s} \rightarrow \frac{-1}{\cosh \sqrt{\lambda}} = G_\infty(\lambda) \quad \text{przy } n \rightarrow \infty .
\end{aligned}$$

Przedstawimy teraz trzy etapy badań stabilności systemu (6.85).

- 1°. Obliczenia analityczne dla $n \leq 6$. Na podstawie kryterium Michajłowa–Leonarda ustalamy, że

$$\operatorname{Re} \sigma(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu \in (\alpha(\omega^*), 1) ,$$

gdzie ω^* jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem wielomianu β , a wielomiany α i β pochodzą z rozkładu

$$\det(j\omega I - A) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad (6.90)$$

Dla $k_2 = 1$ warunek częstotliwościowy (6.16) jest równoważny istnieniu $k_1 < 1$ i $q \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega) - (1 + k_1)\alpha(\omega) + k_1 - \omega q \beta(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \geq 0 \quad (6.91)$$

Jeżeli $k_1 = \alpha(\omega^*)$ to warunkiem koniecznym zachodzenia (6.91) w otoczeniu $\omega = \omega^*$ jest, aby

$$q = \frac{\alpha'(\omega^*)(k_1 - 1)}{\omega^* \beta'(\omega^*)} \quad (6.92)$$

Korzystając z przedstawienia (6.91) udaje się dla $n \leq 6$, $k_1 = \alpha(\omega^*)$, $k_2 = 1$ i q określonego wzorem (6.92) uzyskać, przy pomocy obliczeń analitycznych, stwierdzenie faktu zachodzenia warunku częstotliwościowego (6.16).

- 2°. Obliczenia numeryczne dla $n = 20$. Wynik etapu 1° upoważnia nas do sformułowania tezy, że przy $n \geq 7$, $k_1 = \alpha(\omega^*)$, $k_2 = 1$ i q określonego wzorem (6.92), zachodzi warunek częstotliwościowy (6.16). W oparciu o reprezentację (6.91) warunku (6.16) został przeprowadzony test numeryczny dla $n = 20$, który potwierdził sformułowaną tezę, przy czym otrzymano: $\omega^* = 18.933991$, $k_1 = -11.8057507$, $q = -0.6868943$.
- 3°. Obliczenia analityczno-numeryczne dla $n = \infty$. Dalsze, asymptotyczne, potwierdzenie sformułowanej w 2° tezy o spełnieniu nierówności częstotliwościowej (6.16) uzyskamy wykazując jej prawdziwość w granicy. Z (6.9) wynika, że graniczną wersją rozkładu (6.90) jest rozkład

$$\cosh \sqrt{j\omega} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) ,$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

$$\alpha(\omega) = \cosh \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cos \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \quad \beta(\omega) = \sinh \sqrt{\frac{\omega}{2}} \sin \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \quad \omega \geq 0 .$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego, $\cosh \sqrt{\lambda} - \mu = 0$, ma pierwiastki leżące w lewej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \in (\alpha(\omega^*), 1)$, ω^* jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem równania $\beta(\omega) = 0$, a zatem

$$\omega^* = 2\pi^2 \approx 19.739209, \quad \alpha(\omega^*) = -\cosh \pi \approx -11.591953 .$$

Potwierdza to wynik pracy [49]. Formuła (6.92) jest nadal ważna i daje $q = -\frac{1 + \cosh \pi}{2\pi^2} \approx -0.6379158$. Wiemy zatem, że nierówność (6.91) zachodzi w otoczeniu $\omega = \omega^*$. Łatwo też sprawdzić, że jest spełniona także dla małych i dużych ω . Wystarczy zatem numerycznie zweryfikować (6.91) na ograniczonym interwale zmienności $\omega \geq 0$, z którego usunięto otoczenia punktów $\omega = 0$ i $\omega = 2\pi^2$, gdzie błędy numeryczne mogłyby ewentualnie spowodować mylne rozstrzygnięcie. Obliczenia numeryczne potwierdzają fakt zachodzenia (6.91). Tym samym, warunek częstotliwościowy (6.16) jest spełniony także i dla G_∞ wstawionej w miejsce G i to przy optymalnych k_1, k_2 .

Z przedstawionych obliczeń, wynikają następujące konkluzje:

- Wobec sterowalności pary (A, b) i obserwowalności pary (A, c^T) , z Twierdzenia 6.1.5 wynika, że asymptotyczne (i jest prawdopodobne, że nawet wszystkie) aproksymacje (6.85) są układami absolutnie stabilnymi w stożku Hurwitza, z którego usunięto nieliniowości asymptotycznie „podchodzące” do górnego brzegu stożka (przyjęto tu najgorszą możliwość, że poprzednik implikacji (6.30) jest spełniony).
- Przedstawiony sposób aproksymacji polega w swej istocie na przybliżaniu wielomianami funkcji charakterystycznej układu otwartego $\cosh \sqrt{\lambda}$, która jest funkcją całkowitą. W tym, jak się wydaje, należy upatrywać przyczyny wolnej zbieżności: błąd względny wyznaczania wartości ω^*, k_1 dla aproksymacji $n = 20$ -wymiarowej waha się od około 2% w przypadku określania wartości k_1 do około 8% dla wartości q . Przemawia to za poszukiwaniem, z jednej strony, szybciej zbieżnych aproksymacji, a z drugiej strony, bezpośrednich metod analizy stabilności systemów nieskończenie wymiarowych z brzegowym sprzężeniem zwrotnym.

Wadą opisanej aproksymacji inżynierskiej jest brak formalnego, klarownego związku między systemem aproksymowanym (6.84) a jego aproksymatą (6.85). Tej wady nie ma *metoda projekcyjna* aproksymacji, którą tutaj jedynie wstępnie naszkicujemy.

Zauważmy najpierw, że w przestrzeni $H = L^2(0, 1)$ system (6.84) można zapisać w postaci abstrakcyjnego równania różniczkowego

$$\dot{v}(t) = Av(t) ,$$

6.3. PRZYKŁADY I PROBLEMY OTWARTE

gdzie:

$$Av = v'', \quad D(A) = \{v \in H^2(0,1) : v'(1) = 0, v(0) = f[v(1)]\} \quad (6.93)$$

Przez wzięcie $f = 0$ z A powstaje liniowy, dyskretny (o zwartej rezolwencji), samo-sprężony operator A_0 ,

$$A_0v = v'', \quad D(A_0) = \{v \in H^2(0,1) : v'(1) = 0, v(0) = 0\}$$

opisujący system otwarty. Operator A_0 posiada bazę ortonormalną $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wektorów własnych,

$$e_n(x) = \sqrt{2} \sin \left[(-1)^{n-1} \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

odpowiadających wartościom własnym $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\lambda_n = - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Przyporządkowanie $v \mapsto \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n = \langle v, e_n \rangle_{\mathbb{H}}$ określa izomorfizm unitarny \mathbb{H} na ℓ^2 . Jeżeli $w \in D(A)$ to

$$\begin{aligned} \langle Aw, e_n \rangle_{\mathbb{H}} &= \int_0^1 w''(x) e_n(x) dx = w'(1) e_n(1) - w'(0) e_n(0) - \int_0^1 w'(x) e_n'(x) dx = \\ &= -w(1) e_n'(1) + w(0) e_n'(0) + \int_0^1 w(x) e_n''(x) dx = \\ &= e_n'(0) f[w(1)] + \lambda_n \langle w, e_n \rangle_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Więcej, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \langle w, e_n \rangle_{\mathbb{H}} e_n(x)$ jest zbieżny nie tylko średniokwadratowo, ale też jednostajnie, a ponieważ funkcjonal $C[0,1] \ni w \mapsto w(1)$ jest liniowy i ciągły, więc $w(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, e_n \rangle_{\mathbb{H}} e_n(1)$ i ostatecznie otrzymujemy następującą, równoważną reprezentację systemu (6.93):

$$\dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t) + e_n'(0) f \left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n(1) y_n(t) \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.94)$$

Obcięcie systemu (6.94) do n pierwszych równań dostarcza aproksymacji układu (6.84). Transmitancja liniowej części systemu (6.94) wyraża się wzorem

$$G(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n'(0) e_n(1)}{\lambda_n - \lambda} = \frac{-1}{\cosh \sqrt{\lambda}}$$

6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW SEMILINIOWYCH

co wynika z rozwinięcia funkcji meromorficznej $z \mapsto \frac{1}{\cosh z}$ w szereg ułamków prostych – [70, Problem 5.2.5].

W powyższych rozważaniach baza ortonormalna $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ może być zastąpiona przez bazę *Riesza* z wektorów własnych operatora sprzężonego do operatora liniowego systemu zamkniętego powstającego z A przez podstawienie $f(\sigma) = K\sigma$, $|K| \neq 1$. Jawny wzór na wektory tej bazy można znaleźć w [49, Wzór (4.10), str. 326].

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

W niniejszym rozdziale scharakteryzowano pojęcia ograniczoności rozwiązań, stabilności w sensie Lagrange'a, ostatecznej ograniczoności i dyssypatywności nieliniowych układów autonomicznych. Podano warunki wystarczające stabilności w sensie Lagrange'a i dyssypatywności wyrażone w terminach funkcjonalów Lapunowa–Yoshizawy. Szczegółowe wyniki uzyskano dla oscylatorów Liénarda i systemów Lurie sterowania. Rezultaty zilustrowano typowymi przykładami.

7.1. Lg–STABILNOŚĆ I DYSSYPATYWNOŚĆ

Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\dot{x}(t) = f[x(t)], \quad t \geq 0 \quad (7.1)$$

w którym $f : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą i na tyle regularną, że rozwiązania (7.1) generują LCSDS na \mathbb{R}^n .

Definicja 7.1.1. Rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ układu (7.1) nazywamy *ograniczonym* (**O**) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $R = R(x_0) > 0$ takie, że $\|x(t, x_0)\| \leq R$ dla $t \geq 0$. Jeżeli wszystkie rozwiązania układu (7.1) są ograniczone to układ (7.1) nazywamy *stabilnym w sensie Lagrange'a* (*Lg–stabilnym*).

Definicja 7.1.2. Jeżeli dla układu (7.1)

$$\exists R > 0 : \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \exists T = T(x_0) > 0 : \|x(t, x_0)\| \leq R \quad \forall t \geq T$$

to mówimy, że rozwiązania (7.1) są *ostatecznie ograniczone* (**OO**) lub, że układ (7.1) jest *dyssypatywny*.

Podstawowe wyniki dotyczące Lg–stabilności i dyssypatywności układu (7.1) uzyskał Yoshizawa [121, Twierdzenie 2.5.1 (warunek konieczny i wystarczający Lg–stabilności), Twierdzenia 2.5.4 i 2.4.2' (warunek wystarczający dyssypatywności)]. Uproszczone wersje tych rezultatów podali także LaSalle i Lefschetz [74, Twierdzenie 15 (warunek wystarczający Lg–stabilności) i Twierdzenie 17 (warunek wystarczający dyssypatywności)]. Cytowane niżej twierdzenie podaje maksymalnie uproszczone i jednocześnie dostatecznie ogólne, dla zastosowań, warunki wystarczające Lg–stabilności i dyssypatywności układu (7.1).

Twierdzenie 7.1.3. Jeżeli istnieją: zwarty zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz ciągły, lokalnie Lipschitzowski funkcjonal $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że:

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty \quad (7.2)$$

$$D^+V(x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{V[x + hf(x)] - V(x)\} \leq 0 \quad \forall x \in \Omega^c := \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad (7.3)$$

to system (7.1) jest Lg-stabilny. Jeżeli dodatkowo w zbiorze

$$E := \{x \in \Omega^c : D^+V(x) = 0\} \quad (7.4)$$

nie jest zlokalizowane żadne określone i ograniczone dla $t \in \mathbb{R}$ rozwiązanie układu (7.1) to układ (7.1) jest dyssypatywny.

Dowód. Lg-stabilność. Założenie (7.2) gwarantuje zwartość wszystkich domkniętych przekrojów funkcjonału V . Niech l_0 będzie na tyle dużą liczbą, że $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l_0\}$. Z założenia (7.3) wynika teraz, że domknięte przekroje funkcjonału V na poziomach większych od l_0 są zbiorami inwariantnymi względem strumienia **LCSDS** generowanego przez rozwiązania systemu (7.1). W konsekwencji wszystkie rozwiązania układu (7.1) są ograniczone, tzn. (7.1) jest Lg-stabilny, a nasz **LCSDS** jest w istocie **CSDS** na \mathbb{R}^n .

Dyssypatywność. Z Lg-stabilności układu (7.1) i uogólnionej zasady inwariantności 2.1.5 wynika, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zbiór graniczny $\Lambda(x_0)$ trajektorii $\Pi(x_0)$, startującej z punktu x_0 , jest niepusty, zwarty, spójny i mocno-inwariantny. Pokażemy, że

$$\Lambda(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (7.5)$$

Założmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\Lambda(\bar{x}_0) \cap \Omega = \emptyset$. Wtedy $\Lambda(\bar{x}_0) \not\subset \Omega^c$ i z Twierdzenia 2.1.4 oraz pewnych oczywistych własności topologicznych przestrzeni \mathbb{R}^n wynika, że

$$\exists x^* \in \Pi(\bar{x}_0) \cap \Omega^c : \Pi(x^*) \cup \Lambda(\bar{x}_0) = \overline{\Pi(x^*)} \subset \Omega^c .$$

Jeżeli przyjąć $W = \Omega^c$, $\Phi = V$, $x = x^*$ to widać, że są spełnione założenia Twierdzenia 2.1.6, co pozwala ustalić, że $D^+V(x) = 0$ na zbiorze $\Lambda(x^*) = \Lambda(\bar{x}_0)$.

Wobec niepustości zwartości i mocnej-inwariantności zbioru $\Lambda(\bar{x}_0) \subset \Omega^c$ stwierdzamy, że istnieje określone dla $t \in \mathbb{R}$, ograniczone rozwiązanie układu (7.1) zlokalizowane w Ω^c , na którym $D^+V(x) = 0$, co jest sprzeczne z założonymi własnościami zbioru (7.4). Stąd zachodzi (7.5). Wobec, zwartości i spójności $\Lambda(x_0)$ dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$, zwartości zbioru Ω i (7.5) mamy

$$\exists R > 0 : \Omega \cup \left[\bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \Lambda(x_0) \right] \subset K(0, R) .$$

Z ciągłości strumienia **CSDS** generowanego rozwiązaniem (7.1) i przyciągania trajektorii przez ich zbiory graniczne wynika, że sfera $S(0, R)$ może być osiągnięta z dowolnego warunku początkowego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ w skończonym czasie $T = T(x_0) > 0$, a zatem wszystkie rozwiązania (7.1) są **OO**. \square

7.2. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU E.N. LORENZA

Układem Lorenza [84] nazywać będziemy układ równań różniczkowych

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = -bz + xy \end{array} \right\}, \quad \sigma, r, b > 0 \quad (7.6)$$

Dla funkcjonału V

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} [x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2]$$

mamy:

$$V(x, y, z) \rightarrow \infty \quad \text{przy} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty,$$

$$\dot{V}(x, y, z) = - \left[\sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 \right] + \frac{(r + \sigma)^2 b}{4} < 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega^c,$$

gdzie

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 \leq \frac{(r + \sigma)^2 b}{4} \right\}.$$

Na podstawie Twierdzenia 7.1.3 możemy stwierdzić, że (7.6) jest układem dyssypatywnym.

Dla dowolnego $l \geq \max_{(x, y, z) \in \partial \Omega} V(x, y, z)$ zbiór poziomicowy $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : V(x, y, z) \leq l\}$ jest dodatnio-inwariantny. Wszystkie rozwiązania układu (7.6) leżą ostatecznie w dodatnio-inwariantnym zbiorze

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2 + (z - 2D)^2}{2} \leq \max_{(x, y, z) \in \partial \Omega} V(x, y, z) = \max_{i=1,2,3} V_i \right\},$$

gdzie:

$$V_1 = V(0, 0, 0) = 2D^2, \quad D = \frac{\sigma + r}{2},$$

$$V_2 = V \left(\mp \frac{bD}{\sqrt{\sigma(b - \sigma)}}, 0, \frac{D(2\sigma - b)}{\sigma - b} \right) = \frac{D^2 b^2}{2\sigma(b - \sigma)},$$

(wartość tę bierze się pod uwagę tylko, gdy $b \geq 2\sigma$),

$$V_3 = V \left(0, \mp \frac{bD\sqrt{b - 2}}{b - 1}, \frac{D(2 - b)}{1 - b} \right) = \frac{D^2 b^2}{2(b - 1)}$$

(wartość tę bierze się pod uwagę tylko, gdy $b \geq 2$).

W przypadku rozważanych w [84] danych liczbowych $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ zbiór S jest kulą

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 38)^2 \leq \left[\frac{152}{\sqrt{15}} \right]^2 \approx 1540.2667 \right\}.$$

7.3. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LIÉNARDA

Układem Liénarda będziemy nazywać układ postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -yf(x) - g(x) \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

$f, g \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$, gdzie $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji lokalnie lipschitzowskich z \mathbb{R} w \mathbb{R} . Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s)ds .$$

Układ (7.7) jest postacią normalną równania różniczkowego

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 .$$

Bywa on także analizowany w postaci $\dot{X} = Y - F(X)$, $\dot{Y} = -g(X)$, do której dochodzi się dzięki diffeomorficznej transformacji $X = x$, $Y = y + F(x)$.

Do otrzymania warunków dostatecznych dyssypatywności systemu (7.7) zastosujemy zaproponowany w pracy [51] funkcjonal

$$\begin{aligned} V(x, y) = & G(x) + \frac{F^2(x)}{2} + \int_0^x B(s)ds + \frac{y^2}{2} + \int_0^s f(s) \left[\int_0^s A(\tau)d\tau \right] ds + \\ & + yF(x) + y \int_0^x A(s)ds \end{aligned} \quad (7.8)$$

Jeżeli $A, B \in C(\mathbb{R})$, gdzie $C(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} , to V jest klasy C^1 i mamy

$$\dot{V}(x, y) = y^2 A(x) + yB(x) - g(x)F(x) - g(x) \int_0^x A(s)ds \quad (7.9)$$

Weźmy teraz

$$A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{jeśli } |x| \geq a \\ -\frac{\varepsilon}{a}, & \text{jeśli } |x| < a \end{array} \right\}, \quad a > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad B(x) \equiv 0 \quad (7.10)$$

Wtedy

$$\int_0^x A(s)ds = \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon, & \text{jeśli } x \leq -a \\ -\frac{\varepsilon}{a}x, & \text{jeśli } |x| \leq a \\ -\varepsilon, & \text{jeśli } x \geq a \end{array} \right\} \quad (7.11)$$

Dla nieciągłej funkcji A , w szczególności dla (7.10), wzór (7.9) traci sens. Ważność formuły (7.9) można utrzymać w mocy, zastępując $\dot{V}(x, y)$ przez $D^+V(x, y)$. Istotnie,

7.3. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LIÉNARDA

$$D^+V(x, y) = g(x)y + F(x)f(x)y + y[-yf - g(x)] + F(x)A(x)y + \\ + [-yf(x) - g(x)]F(x) + y^2f(x) + D^+ \left[y \int_0^x A(s)ds \right] ,$$

gdyż wszystkie składniki V w (7.8) są klasy C^1 oprócz ostatniego, który jest lokalnie lipschitzowski. Ponieważ

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left\{ \left[y + h(-yf(x) - g(x)) \right] \int_0^{x+hy} A(s)ds - y \int_0^x A(s)ds \right\} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ [-yf(x) - g(x)] \int_0^{x+hy} A(s)ds + \frac{y}{h} \left[\int_0^{x+hy} A(s)ds - \int_0^x A(s)ds \right] \right\} = \\ & = [-yf(x) - g(x)] \int_0^x A(s)ds + \\ & + \left\{ \begin{array}{ll} yA(x), & \text{jeśli } |x| \neq a \\ 0, & \text{jeśli } \left\{ \begin{array}{ll} x = a, & y \geq 0 \\ x = -a, & y \leq 0 \end{array} \right\} \\ -\frac{\varepsilon}{a}y^2 \leq 0, & \text{jeśli } \left\{ \begin{array}{ll} x = -a, & y \geq 0 \\ x = a, & y \leq 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} , \end{aligned}$$

więc

$$D^+ \left[y \int_0^x A(s)ds \right] = [-yf(x) - g(x)] \int_0^x A(s)ds + \left\{ \begin{array}{ll} yA(x), & \text{jeśli } |x| \neq a \\ 0, & \text{jeśli } |x| = a \end{array} \right\} .$$

Ostatecznie

$$D^+V(x, y) = -g(x)F(x) + y^2A(x) - g(x) \int_0^x A(s)ds .$$

Weźmy teraz

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sqrt{\frac{Ma}{\varepsilon}}, |x| \leq a \right\} ,$$

gdzie

$$M = \max_{|x| \leq a} \left[-g(x)F(x) - g(x) \int_0^x A(s)ds \right]$$

(funkcja w nawiasach $[]$ jest ciągła i maksimum istnieje na mocy twierdzenia Weierstrassa). Zachodzą następujące implikacje:

$$\begin{aligned} |x| < a, \quad |y| > \sqrt{\frac{Ma}{\varepsilon}} &\implies D^+V(x, y) \leq -\frac{\varepsilon}{a}y^2 + M < 0 , \\ |x| \geq a &\implies D^+V(x, y) = g(x) \operatorname{sign}x [F(x) \operatorname{sign}x - \varepsilon] . \end{aligned}$$

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Zatem dla zapewnienia $D^+V < 0$ na Ω^c wystarczy założyć, że

$$xg(x) > 0, \quad \text{gdy } |x| \geq a \quad (7.12)$$

$$F(x) \operatorname{sign} x > \varepsilon, \quad \text{gdy } |x| \geq a \quad (7.13)$$

Jest oczywiste, że w pewnych przypadkach w (7.12) i (7.13) można przyjąć słabe nierówności, a założenia Twierdzenia 7.1.3 będą spełnione.

Zapisujemy teraz V w postaci ($|x| \geq a$)

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{1}{2} \left[y + F(x) + \int_0^x A(s) ds \right]^2 + G(x) - \frac{1}{2} \left[\int_0^x A(s) ds \right]^2 - \\ &- F(x) \int_0^x A(s) ds + \int_0^x f(s) \int_0^s A(\tau) d\tau ds = \frac{1}{2} \left[y + F(x) + \int_0^x A(s) ds \right]^2 + \\ &+ G(x) - \frac{1}{2} \left[\int_0^x A(s) ds \right]^2 - \int_0^x F(s) A(s) ds \geq G(x) - \frac{1}{2} \left[\int_0^x A(s) ds \right]^2 - \\ &- \int_0^x F(s) A(s) ds = G(x) - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon}{a} \int_0^a F(s) ds . \end{aligned}$$

Jeżeli $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ to także $|x| \rightarrow \infty$ i wobec tego $V(x, y) \rightarrow \infty$ przy założeniu, że

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x) = \infty \quad (7.14)$$

Ostatecznie, jeżeli spełnione są założenia (7.12), (7.13), (7.14) to prostokąt Ω i funkcjonal V z podstawieniem (7.10) i (7.11) w (7.8), spełniają założenia Twierdzenia 7.1.3 i system Liénarda (7.7) jest dyssypatywny.

Warunki (7.12) i (7.14) oznaczają, że dla dostatecznie dużych $|x|$ nieliniowość g spełnia uogólniony warunek Hurwitza, natomiast (7.13) oznacza, że dla dostatecznie dużych $|x|$, F spełnia wzmocniony, uogólniony warunek Hurwitza. Fizycznie (7.13) oznacza, że średnie tłumienie w układzie (7.7) nie jest zbyt małe dla dostatecznie dużych $|x|$.

Wyprowadzone wyżej warunki wystarczające dyssypatywności (7.7) są nieznacznym uogólnieniem rezultatów LaSalle'a [74, str. 106]. Podobne wyniki podane są także w pracach Bhatii [121, str. 201 - 202] i Plissa [111, Twierdzenie 4.1, str. 61]. Pliss podaje jeszcze ogólniejszy warunek wystarczający dyssypatywności układu (7.7) [111, Twierdzenie 4.2, str. 68 - 69], ale dowód tego twierdzenia zawiera błąd – używa się tam funkcjonału (7.8) z $A(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ i $B(x) \equiv 0$. Przyjęte przez Plissa założenia nie gwarantują, nawet w przypadku $R(x, y, t) \equiv 0$, nierówności $\dot{V}(x, y) \leq 0$ na zbiorze $|x| \leq h_1, |y| \geq h_2$ – dla kontrprzykładu wystarczy rozpatrzeć funkcje $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, $g(x) = x$ i wtedy $\dot{V}(x, y) \geq 0$ na osi $0y$.

Uwaga 7.3.1. Jeżeli układ (7.7) ma tylko jeden punkt równowagi (równoważnie g ma jedno zero) to uzupełniając warunki (7.12), (7.13) i (7.14) warunkiem gwarantującym niestabilność początku układu i zapewniającym lokalne odpychanie rozwiązań od punktu równowagi, otrzymamy na mocy twierdzenia Poincaré–Bendixsona [121, Twierdzenie 2.7.6] warunek wystarczający istnienia nietrywialnego rozwiązania okresowego układu (7.7). Przykładowo – warunki

$$\left\{ \begin{array}{lll} xg(x) > 0 & \forall x \neq 0, \quad g(0) = 0 \\ xF(x) < 0 & \text{dla małych } |x| \neq 0 \\ G(x) \rightarrow \infty & \text{przy } |x| \rightarrow \infty \\ F(x) \operatorname{sign} x > \varepsilon > 0 & \text{dla dużych } |x| \end{array} \right\} \quad (7.15)$$

gwarantują istnienie co najmniej jednego cyklu granicznego w układzie (7.7). Wynik ten, znany jako *twierdzenie Dragilewa* [121, Twierdzenie 4.2.4], jest jednym z najsłabszych znanych warunków wystarczających istnienia co najmniej jednego cyklu granicznego w układzie (7.7).

7.3.1. Przykład 1. Generator z mostkiem Wiena

Układ równań różniczkowych

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha \varphi(x_2) \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 - 2\beta x_2 + \beta \varphi(x_2) \end{array} \right\}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (7.16)$$

gdzie

$$\varphi(\sigma) = \left\{ \begin{array}{ll} K\sigma, & |\sigma| \leq \frac{M}{K} \\ M, & \sigma > \frac{M}{K} \\ -M, & \sigma < -\frac{M}{K} \end{array} \right\},$$

jest modelem matematycznym dynamiki układu *generatora z mostkiem Wiena*. Transformacja liniowa $x = x_2$, $y = \alpha x_2 - \beta x_1$ przeprowadza (7.16) w układ

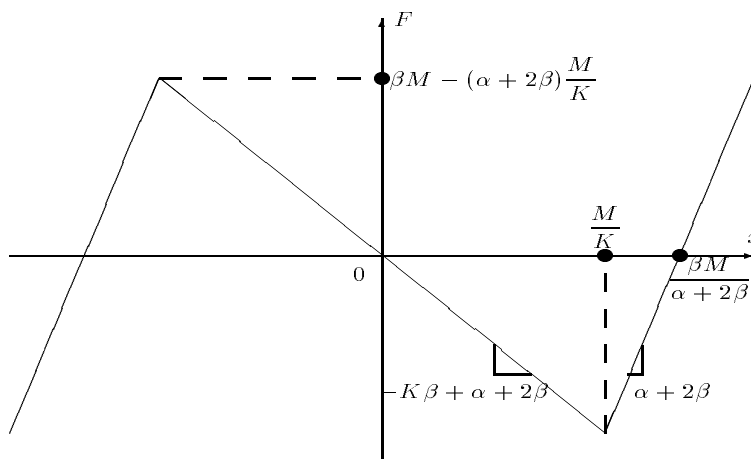
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y - [(\alpha + 2\beta)x - \beta \varphi(x)] \\ \dot{y} = -\alpha \beta x \end{array} \right\},$$

równoważny systemowi Liénarda (7.7) z

$$F(x) = (\alpha + 2\beta)x - \beta \varphi(x), \quad g(x) = \alpha \beta x, \quad G(x) = \frac{\alpha \beta x^2}{2}.$$

Nieliniowość F przedstawiona została na rysunku 7.1.

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH



Rysunek 7.1. Wykres funkcji φ

Niezależnie od wartości $\alpha, \beta > 0$ są spełnione warunki (7.12), (7.13), (7.14) i układ (7.16) ma wszystkie rozwiązania **OO**. Jeśli $K > \frac{\alpha + 2\beta}{\beta}$ (przedział $(-\infty, \frac{2\beta + \alpha}{\beta})$ jest jednocześnie sektorem Hurwitza i sektorem **ABSS** w klasie $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$) to spełnione są warunki (7.15) i układ posiada co najmniej jeden cykl graniczny. W charakterze zewnętrznego brzegu *obszaru pierścieniowego Bendixsona*, w którym jest zlokalizowany cykl graniczny można wziąć ∂P , gdzie

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 3M, |x_2| \leq 2M\} .$$

Istotnie, wzdłuż górnego boku prostokąta P mamy

$$\dot{x}_2 = -\beta x_1 - 4\beta M + \beta M = -\beta(x_1 + 3M) \leq 0 ,$$

a wzdłuż brzegu dolnego,

$$\dot{x}_2 = -\beta x_1 + 4\beta M - \beta M = -\beta(x_1 - 3M) \geq 0 .$$

Wzdłuż lewego boku P mamy

$$\dot{x}_1 = 3\alpha M - \alpha x_2 + \alpha\varphi(x_2) \geq \alpha[M + \varphi(x_2)] \geq 0 ,$$

a wzdłuż boku prawego,

$$\dot{x}_1 = -3\alpha M - \alpha x_2 + \alpha\varphi(x_2) \leq -\alpha[M - \varphi(x_2)] \leq 0 .$$

Zatem na ∂P trajektorie skierowane są do wnętrza P . Precyzyjne uzasadnienie wynika z Lematu 2.2.1. W charakterze wewnętrznego brzegu obszaru lokalizującego cykl

7.3. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LIÉNARDA

graniczny można wziąć brzeg estymaty obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi układu powstającego z (7.16) przez rewersję czasu. Ponieważ układ po rewersji czasu jest układem Lurie (6.21) z:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & 2\beta \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(y) = \varphi(y),$$

więc estymatę obszaru atrakcji można wyznaczyć z pomocą Twierdzenia 6.1.5/przypadek (II). Dla $k_1 = \frac{\alpha + 2\beta}{\beta}$, $q = 0$ spełnione są warunki (6.18), (6.19), przy czym lewa strona nierówności częstotliwościowej (6.18) jest zerowa. Zgodnie z (6.29) $g = 0 \in \mathbb{R}^2$. Dla określenia H należy rozwiązać układ równań Lurie (6.25). Rozwiązaniem jest

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{2\beta} \\ -\frac{1}{2\beta} & \frac{\alpha + \beta}{2\beta^2} \end{bmatrix} = H^T > 0$$

i z (6.23) wyliczamy estymatę obszaru atrakcji

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2\alpha}x_1^2 - \frac{1}{\beta}x_1x_2 + \left(\frac{\alpha + \beta}{2\beta^2}\right)x_2^2 < \frac{\beta M^2}{2(\alpha + 2\beta)^2} \right\}.$$

Ostatecznie obszar pierścieniowy Bendixsona jest ograniczony od zewnątrz przez ∂P , a od wewnątrz przez $\partial \Omega$.

Z rezultatów [121, Twierdzenia 4.2.1, str. 130] wynika, że istnieje dokładnie jeden asymptotycznie stabilny cykl graniczny.

7.3.2. Przykład 2. Uproszczony model błony komórkowej

Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{u} = I + w - \frac{u^3}{3} + u \\ \dot{w} = \rho[a - u - bw] \end{cases} \quad (7.17)$$

gdzie $I \in \mathbb{R}$ oznacza stały prąd aplikowany przez błonę komórkową (stymulus), w jest wielkością charakteryzującą przepływ jonów Na^+ , K^+ przez błonę, u oznacza różnicę potencjałów pomiędzy wnętrzem komórki a otoczeniem (potencjał błony). Ponadto $b, \rho \in (0, 1)$, $1 - \frac{2}{3}b < a < 1$. FitzHugh zaproponował (7.17) jako uproszczenie modelu Hodgkina–Huxleya błony komórkowej [39], [135].

Diffeomorficzna transformacja $x = u$, $y = I + w - \frac{u^3}{3} + u$ przeprowadza (7.17) w układ Liénarda (7.7) z:

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + x^2 + \rho b, & F(x) &= (-1 + \rho b)x + \frac{x^3}{3}, \\ g(x) &= -\rho bI - \rho a + x(\rho - \rho b) + \rho b \frac{x^3}{3}, \\ G(x) &= (-\rho bI - \rho a)x + (\rho - \rho b) \frac{x^2}{2} + \rho b \frac{x^4}{12}. \end{aligned}$$

Spełnione są założenia (7.12), (7.13), (7.14) i układ (7.17) jest dyssypatywny. Ponieważ dla każdego $I \in \mathbb{R}$ układ (7.17) posiada dokładnie jeden punkt równowagi (u_0, w_0) , stanowiący rozwiązanie układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} bI + a - u = b\left(\frac{u^3}{3} - u\right) \\ \frac{a - u}{b} = w \end{array} \right\},$$

więc na mocy Uwagi 7.3.1, warunek lokalnej niestabilności punktu (u_0, w_0) , tzn. nierówność $u_0^2 - 1 + \rho b < 0$ jest warunkiem wystarczającym istnienia cyklu granicznego.

7.3.3. Przykład 3. Dynamika reakcji biochemicznej

Układ równań różniczkowych

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = A - (B + 1)X + X^2Y \\ \dot{Y} = BX - X^2Y, \quad B > 1 \end{array} \right\} \quad (7.18)$$

jest modelem dynamiki pewnej reakcji biochemicznej [79], [136]. Różniczkując pierwsze równanie względem czasu, a następnie rugując z tak otrzymanego równania drugiego rzędu, wielkości Y, \dot{Y} , przy pomocy równań (7.18), otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu względem X . Ponzo i Wax [112] stwierdzili, że podstawienie

$$X = \frac{A}{1 + (B - 1)x}, \quad t = \frac{\sqrt{B - 1}}{A} \tau$$

sprowadza to równanie do układu Liénarda (7.7) z:

$$\begin{aligned} x &> -\lambda = (1 - B)^{-1}, & \mu &= A^{-1}(B - 1)^{3/2}, \\ f(x) &= \mu \left[2x - 1 + \frac{1}{\mu^2(x + \lambda)^2} \right], & F(x) &= \mu x^2 - \mu x + \frac{x}{\mu \lambda (x + \lambda)}, \\ g(x) &= \frac{x}{x + \lambda}, & G(x) &= x - \lambda \ln(x + \lambda). \end{aligned}$$

Warunki (7.12), (7.13), (7.14) są spełnione i układ (7.18) jest dyssypatywny. Jeżeli $B - 1 > A^2$ (warunek wystarczający lokalnej niestabilności punktu równowagi $(A, \frac{A}{B})$ układu (7.18)), to są spełnione warunki (7.15) i układ posiada cykl graniczny. Dla typowego zestawu parametrów $A = 8.2$, $B = 77$ występuje taka właśnie sytuacja [112].

7.4. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LURIE STEROWANIA

W niniejszym rozdziale będziemy analizowali dyssypatywność układu Lurie (2.39). W szczególności udowodnimy twierdzenie podane w pracy [65] bez dowodu. Dowód przypadku szczególnego można znaleźć w [63].

Twierdzenie 7.4.1. Niech będzie spełniony jest jeden z trzech podanych niżej zestawów warunków.

(I)

Istnieją liczby $k_1, k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takie, że

(i) układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA - k_1 k_2 c c^T + \varepsilon I = -gg^T \\ Hb + \frac{q}{2} A^T c + \frac{k_1 + k_2}{2} c = -\gamma g \\ 1 - qc^T b = \gamma^2 \end{array} \right\} \quad (7.19)$$

posiada rozwiązanie (H, g, γ) , $H = H^T \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$,

(ii) $\liminf_{|\sigma| \rightarrow \infty} \left[k_2 - \frac{F(\sigma)}{\sigma} \right] \left[\frac{F(\sigma)}{\sigma} - k_1 \right] \geq 0$,

(iii) $\operatorname{Re} \lambda(A + k_i b c^T) < 0$ dla $i = 1, 2$.

(II)

Istnieją liczby $k_1, q, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takie, że

(i) układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA - k_1 c c^T + \varepsilon I = -gg^T \\ Hb + \frac{q}{2} A^T c + \frac{1}{2} c = -\gamma g \\ -qc^T b = \gamma^2 \end{array} \right\} \quad (7.20)$$

posiada rozwiązanie (H, g, γ) , $H = H^T \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$,

(ii) $\liminf_{|\sigma| \rightarrow \infty} \left[k_1 - \frac{F(\sigma)}{\sigma} \right] \geq 0$,

(iii) $\operatorname{Re} \lambda(A + k_1 b c^T) < 0$ oraz $\operatorname{Re} \lambda(A + \mu b c^T) < 0$ gdy $\mu \rightarrow \infty$.

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

(III)

Istnieją liczby $k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takie, że

(i) układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA + k_2 c c^T + \varepsilon I = -g g^T \\ Hb + \frac{q}{2} A^T c - \frac{1}{2} c = -\gamma g \\ -q c^T b = \gamma^2 \end{array} \right\} \quad (7.21)$$

posiada rozwiązanie $(H, g, \gamma), H = H^T \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n), g \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$,

(ii) $\liminf_{|\sigma| \rightarrow \infty} \left[k_2 - \frac{F(\sigma)}{\sigma} \right] \geq 0$,

(iii) $\operatorname{Re} \lambda(A + k_2 b c^T) < 0$ oraz $\operatorname{Re} \lambda(A + \mu b c^T) < 0$ gdy $\mu \rightarrow -\infty$.

Wtedy system (2.39) jest dyssypatywny.

Dowód. Dowód podzielimy na części odpowiadające trzem zestawom założeń twierdzenia.

(I)

Funkcjonał

$$V(x) = x^T H x + q \int_0^{c^T x} F(\xi) d\xi \quad (7.22)$$

jest klasy C^1 , a jego pochodną wzdłuż rozwiązań systemu (2.39) można przedstawić w postaci

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T H + HA & Hb + \frac{q}{2} A^T c \\ b^T H + \frac{q}{2} c^T A & q c^T b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Dodając i odejmując w prawej stronie (7.23) wyrażenie

$$\varepsilon x^T x + [k_2 c^T x - F(c^T x)] [F(c^T x) - k_1 c^T x]$$

i uwzględniając (7.19) otrzymujemy

$$\dot{V}(x) = - [g^T x + \gamma F(c^T x)]^2 - \varepsilon \|x\|^2 - [k_2 c^T x - F(c^T x)] [F(c^T x) - k_1 c^T x] \quad (7.24)$$

Korzystając z zależności podanych w [86, Wzór (2.5), str. 13] ustalamy, że (ii) jest równoważny warunkowi

7.4. DYSSYPATYWNÓŚĆ UKŁADU LURIE STEROWANIA

$$\forall \bar{\varepsilon} < 0 \exists \bar{\delta} = \bar{\delta}(\varepsilon) > 0 : \left[k_2 - \frac{F(c^T x)}{c^T x} \right] \left[\frac{F(c^T x)}{c^T x} - k_1 \right] \geq \bar{\varepsilon} \quad \text{gdy } |c^T x| > \bar{\delta} \quad (7.25)$$

W szczególności dla $\bar{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{2\|c\|^2}$ z (7.25) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \exists \bar{\delta} > 0 : [k_2 c^T x - F(c^T x)] [F(c^T x) - k_1 c^T x] &\leq \frac{\varepsilon}{2\|c\|^2} x^T c c^T x \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\|c\|^2} \lambda_{\max}(c c^T) x^T x = \frac{\varepsilon}{2} \|c\|^2 \quad \text{gdy } |c^T x| > \bar{\delta} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} M := -\min_{|\sigma| \leq \bar{\delta}} [k_2 \sigma - F(\sigma)] [F(\sigma) - k_1 \sigma] &\geq \\ &\geq -[k_2 \sigma - F(\sigma)] [F(\sigma) - k_1 \sigma]_{\sigma=0} = F^2(0) \geq 0 \end{aligned} \quad (7.27)$$

Uwzględniając (7.26) i (7.27) w (7.24) dostajemy

$$\dot{V}(x) \leq \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2, & \text{jeśli } |c^T x| > \bar{\delta} \\ -\varepsilon \|x\|^2 + M, & \text{jeśli } |c^T x| \leq \bar{\delta} \end{array} \right\},$$

a zatem

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad (7.28)$$

gdzie

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x| \leq \bar{\delta}\} \cap \overline{K(0, \sqrt{M/\varepsilon})} \quad (7.29)$$

Bezpośrednio z (7.29) wynika, że Ω jest zwartym podzbiorem \mathbb{R}^n .

Z (iii) i z faktu, że zbiór tych liczb $\mu \in \mathbb{R}$, dla których $\text{Re } \lambda(A + \mu b c^T) < 0$ jest otwartym zbiorem w \mathbb{R} , wynika, że:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \text{Re } \lambda[A + (k_1 - \varepsilon_0) b c^T] < 0, \quad \text{Re } \lambda[A + (k_2 + \varepsilon_0) b c^T] < 0 \quad (7.30)$$

Warunek (7.25) można zapisać równoważnie jako

$$\begin{aligned} \forall \bar{\varepsilon} < 0 \exists \bar{\delta} = \bar{\delta}(\varepsilon) > 0 : \frac{k_1 + k_2 - \sqrt{(k_2 - k_1)^2 - 4\bar{\varepsilon}}}{2} &\leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq \\ &\leq \frac{k_1 + k_2 + \sqrt{(k_2 - k_1)^2 - 4\bar{\varepsilon}}}{2}, \quad \text{gdy } |\sigma| > \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\forall \bar{\varepsilon} < 0 \exists \bar{\delta} = \bar{\delta}(\varepsilon) > 0 : k_1 - \sqrt{-\bar{\varepsilon}} \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq k_2 + \sqrt{-\bar{\varepsilon}}, \quad \text{gdy } |\sigma| > \bar{\delta} \quad (7.31)$$

W szczególności, podstawiając w (7.31) $\bar{\varepsilon} = -\varepsilon_0^2 < 0$, dostajemy

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$\exists \delta_0 > 0 : k_1 - \varepsilon \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq k_2 + \varepsilon, \quad \text{gdy } |\sigma| > \delta_0 \quad (7.32)$$

Jeżeli σ^* jest globalnym minimum funkcji

$$\Phi(\delta) := \int_0^\sigma [F(\xi) - (k_1 - \varepsilon)\xi] d\xi$$

to $|\sigma^*| \leq \delta_0$, $\Phi(\sigma^*) \leq 0$. Istotnie, Φ jest klasy C^1 oraz $\Phi'(\sigma) = F(\sigma) - (k_1 - \varepsilon)\sigma$, a zatem $\Phi'(\sigma) \geq 0$ gdy $\sigma > \delta_0$ i $\Phi'(\sigma) \leq 0$ gdy $\sigma < -\delta_0$, na mocy (7.32). Tak więc Φ jest słabo malejąca w przedziale $(-\infty, -\delta_0)$ i słabo rosnąca w przedziale (δ_0, ∞) . Wobec tego Φ posiada globalne minimum i to w przedziale $[-\delta_0, \delta_0]$. Oczywiście $\Phi(\sigma^*) = \min_{|\sigma| \leq \delta_0} \Phi(\sigma) \leq \Phi(0) = 0$.

Analogicznie dowiedzimy, że jeśli $\bar{\sigma}$ jest globalnym minimum funkcji

$$\Psi(\sigma) := \int_0^\sigma [(k_2 + \varepsilon)\xi - F(\xi)] d\xi$$

to $|\bar{\sigma}| \leq \delta_0$, $\Psi(\bar{\sigma}) \leq 0$.

Dla $F(\sigma) = (k_1 - \varepsilon)\sigma$ system (2.39) przechodzi w system liniowy

$$\dot{x} = [A + (k_1 - \varepsilon)bc^T] x ,$$

który na mocy (7.30) jest asymptotycznie stabilny. Wtedy także

$$V(x) = x^T \left[H + \frac{q(k_1 - \varepsilon)}{2} cc^T \right] x ,$$

$$\dot{V}(x) = -\varepsilon x^T x - [g^T x + \gamma(k_1 - \varepsilon)c^T x]^2 - \varepsilon_0(k_2 - k_1 + \varepsilon_0)x^T cc^T x .$$

Oznacza to, że macierz $H + \frac{q(k_1 - \varepsilon)}{2} cc^T$ jest symetrycznym rozwiązaniem macierzonego równania Lapunowa

$$\begin{aligned} & [A + (k_1 - \varepsilon)bc^T]^T X + X [A + (k_1 - \varepsilon)bc^T] = \\ & = -\varepsilon I - [g + \gamma(k_1 - \varepsilon)c] [g + \gamma(k_1 - \varepsilon)c]^T - \varepsilon_0(k_2 - k_1 + \varepsilon_0)cc^T . \end{aligned}$$

Wobec (7.30), z Twierdzenia 2.4.2 wynika, że jest to jedyne i dodatnio-określone rozwiązanie tego równania, tzn. $H + \frac{q(k_1 - \varepsilon)}{2} cc^T > 0$. W konsekwencji

$$\lambda_{\min} \left(H + \frac{q(k_1 - \varepsilon)}{2} cc^T \right) > 0 \quad (7.33)$$

Z kolei, jeśli $F(\sigma) = (k_2 + \varepsilon_0)\sigma$ to, powtarzając powyższe rozumowanie z wykorzystaniem drugiego ze związków (7.30), dostajemy

$$\lambda_{\min} \left(H + \frac{q(k_2 + \varepsilon_0)}{2} cc^T \right) > 0 \quad (7.34)$$

7.4. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LURIE STEROWANIA

1°. $q \geq 0$. Wtedy na mocy twierdzenia Rayleigha, własności funkcji Φ i (7.33)

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T \left[H + \frac{q(k_1 - \varepsilon_0)}{2} cc^T \right] x + q \int_0^{c^T x} [F(\sigma) - (k_1 - \varepsilon_0)\sigma] d\sigma = \\ &= x^T \left[H + \frac{q(k_1 - \varepsilon_0)}{2} cc^T \right] x + q\Phi(c^T x) \geq \\ &\geq \lambda_{\min} \left(H + \frac{q(k_1 - \varepsilon_0)}{2} cc^T \right) \|x\|^2 + q\Phi(\sigma^*) \rightarrow \infty \quad \text{przy} \quad \|x\| \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

2°. $q \leq 0$. Wtedy postępując analogicznie, ale z wykorzystaniem (7.34) zamiast (7.33), dostaniemy

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T \left[H + \frac{q(k_2 + \varepsilon_0)}{2} cc^T \right] x - q \int_0^{c^T x} [(k_2 + \varepsilon_0)\sigma - F(\sigma)] d\sigma = \\ &= x^T \left[H + \frac{q(k_2 + \varepsilon_0)}{2} cc^T \right] x - q\Psi(c^T x) \geq \\ &\geq \lambda_{\min} \left(H + \frac{q(k_2 + \varepsilon_0)}{2} cc^T \right) \|x\|^2 - q\Psi(\bar{\sigma}) \rightarrow \infty \quad \text{przy} \quad \|x\| \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Reasumując oba powyższe przypadki, pokazaliśmy, że

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty \quad (7.35)$$

Wobec (7.28) i (7.35) teza wynika z Twierdzenia 7.4.1.

(II)

W tym przypadku pochodną funkcjonału (7.22) przedstawiamy w postaci

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \\ &= \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T H + HA - k_1 cc^T + \varepsilon I & Hb + \frac{q}{2} A^T c + \frac{1}{2} c \\ b^T H + \frac{q}{2} c^T A + \frac{1}{2} c^T & qc^T b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix} - \\ &- \varepsilon \|x\|^2 - [F(c^T x)c^T x - k_1(c^T x)^2] = \\ &= - [g^T x + \gamma F(c^T x)]^2 - \varepsilon \|x\|^2 - [F(c^T x)c^T x - k_1(c^T x)^2] . \end{aligned}$$

Dla otrzymania dowodu nierówności (7.28) należy w (7.25) zastąpić wyrażenie

$$\begin{bmatrix} k_2 - \frac{F(\sigma)}{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{F(\sigma)}{\sigma} - k_1 \end{bmatrix}$$

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

przez $\left[\frac{F(\sigma)}{\sigma} - k_1\right]$, a w (7.26) i (7.27) $[k_2 - F(\sigma)] [F(\sigma) - k_1]$ przez $\sigma F(\sigma) - k_1 \sigma^2$.

Dla $F(\sigma) = \mu \sigma$ system (2.39) przechodzi w system liniowy $\dot{x} = [A + \mu bc^T]x$, asymptotycznie stabilny przy $\mu \rightarrow \infty$, na mocy (iii). Wtedy także

$$V(x) = x^T [H + \frac{q\mu}{2} cc^T] x, \quad \dot{V}(x) = -\varepsilon x^T x - [g^T x + \gamma \mu c^T x]^2 - [\mu - k_1] x^T cc^T x .$$

Oznacza to, że macierz $H + \frac{q\mu}{2} cc^T$ jest symetrycznym rozwiązaniem równania Lapunowa

$$[A + \mu bc^T]^T X + X [A + \mu bc^T] = -\varepsilon I - [g + \mu \gamma c][g + \mu \gamma c]^T - (\mu - k_1) cc^T .$$

Używając (iii) i korzystając jeszcze raz z Twierdzenia 2.4.2 ustalamy, że $H + \frac{\mu q}{2} cc^T > 0$ przy $\mu \rightarrow \infty$, skąd $0 < c^T H c + \frac{\mu q}{2} \|c\|^4$ przy $\mu \rightarrow \infty$. Wyklucza to nierówność $q < 0$, a zatem $q \geq 0$. Teraz dowód związku (7.35) redukuje się do udowodnionej w części (I) implikacji $q \geq 0 \implies V(x) \rightarrow \infty$ przy $\|x\| \rightarrow \infty$. W dowodzie tej implikacji używa się tylko dolnych oszacowań na $\frac{F(\sigma)}{\sigma}$, a zatem jest on aktualny w rozważanym przypadku.

(III)

Tym razem przedstawiamy $\dot{V}(x)$ w postaci

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \\ &= \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T H + H A + k_2 cc^T + \varepsilon I & H b + \frac{q}{2} A^T c - \frac{1}{2} c \\ b^T H + \frac{q}{2} c^T A - \frac{1}{2} c^T & q c^T b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F(c^T x) \end{bmatrix} - \\ &= -\varepsilon \|x\|^2 - [k_2 (c^T x)^2 - F(c^T x) c^T x] = \\ &= -[g^T x + \gamma F(c^T x)]^2 - \varepsilon \|x\|^2 - [k_2 (c^T x)^2 - F(c^T x) c^T x] . \end{aligned}$$

W (7.25) kładziemy $\left[k_2 - \frac{F(\sigma)}{\sigma}\right]$ w miejsce $\left[k_2 - \frac{F(\sigma)}{\sigma}\right] \left[\frac{F(\sigma)}{\sigma} - k_1\right]$, w (7.26) i (7.27) $[k_2 \sigma^2 - \sigma F(\sigma)]$ zamiast $[k_2 \sigma - F(\sigma)] [F(\sigma) - k_1 \sigma]$. W rezultacie otrzymujemy znów (7.28). Dalej dowód przebiega jak w dowodzie części (II). Używając (iii) i rozumowania analogicznego do przytoczonego w części (II) ustalamy, że $0 < c^T H c + \frac{q\mu}{2} \|c\|^4$ przy $\mu \rightarrow -\infty$, co eliminuje tym razem nierówność $q > 0$. Tak więc $q \leq 0$ i dowód (7.35) redukuje się do dowodu implikacji $q \leq 0 \implies V(x) \rightarrow \infty$ przy $\|x\| \rightarrow \infty$ przedstawionego w części (I). Jest on aktualny, bo używa górnych oszacowań dla $\frac{F(\sigma)}{\sigma}$, dostępnych w tym przypadku. \square

Lemat 7.4.2. Załóżmy, że para (A, b) jest sterowalna. Wówczas:

7.4. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LURIE STEROWANIA

(I)

Istnienie liczb $k_1, k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takich, że (7.19) posiada rozwiązanie jest równoważne istnieniu liczb $k_1, k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takich, że

$$\begin{aligned} & 1 + (k_1 + k_2) \operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) + k_1 k_2 |G(j\omega)|^2 \geq \\ & \geq \varepsilon b^T (A^T + j\omega I)^{-1} (A - j\omega I)^{-1} b \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (7.36)$$

(II)

Istnienie liczb $k_1, q, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takich, że (7.20) ma rozwiązanie jest równoważne istnieniu liczb $k_1, q, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takich, że

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) + k_1 |G(j\omega)|^2 \geq \\ & \geq \varepsilon b^T (A^T + j\omega I)^{-1} (A - j\omega I)^{-1} b \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (7.37)$$

(III)

Istnienie liczb $k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takich, że (7.21) ma rozwiązanie jest równoważne istnieniu liczb $k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ takich, że

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) - k_2 |G(j\omega)|^2 \geq \\ & \geq \varepsilon b^T (A^T + j\omega I)^{-1} (A - j\omega I)^{-1} b \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (7.38)$$

Dowód. Teza lematu wynika bezpośrednio z Lematu 6.1.4 po podstawieniu: $m = 1$, $B = b$, $Q = qc$ oraz

$$\left\{ \begin{array}{l} M = k_1 k_2 c c^T - \varepsilon I, \quad L = \frac{k_1 + k_2}{2} c, \quad K = 1 \quad \text{w przypadku (I)} \\ M = k_1 c c^T - \varepsilon I, \quad L = \frac{1}{2} c, \quad K = 0 \quad \text{w przypadku (II)} \\ M = -k_2 c c^T - \varepsilon I, \quad L = -\frac{1}{2} c, \quad K = 0 \quad \text{w przypadku (III)} \end{array} \right\} .$$

□

Sprawdzenie nierówności częstotliwościowych (7.36), (7.37), (7.38) upraszcza się istotnie, gdy A nie posiada wartości własnych na osi urojonej.

Lemat 7.4.3. Jeżeli para (A, b) jest sterowalna oraz $\lambda(A) \cap \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = 0\} = \emptyset$ to:

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

(I)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniały liczby $k_1, k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takie, że zachodzi (7.36) jest istnienie liczb $k_1, k_2, q \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, & \text{gdy} \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) > 0 \\ \Pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) > 0, & \text{gdy} \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) = 0 \end{array} \right\},$$

gdzie $\Pi(\omega)$ oznacza lewą stronę nierówności (7.36).

(II)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniały liczby $k_1, q, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takie, że zachodzi (7.37) jest istnienie liczb $k_1, q \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, & \text{gdy} \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) > 0 \\ \Pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) > 0, & \text{gdy} \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) = 0 \end{array} \right\},$$

gdzie teraz $\Pi(\omega)$ oznacza lewą stronę nierówności (7.37).

(III)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniały liczby $k_2, q, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takie, że zachodzi (7.38) jest istnienie liczb $k_2, q \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, & \text{gdy} \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) > 0 \\ \Pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) > 0, & \text{gdy} \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) = 0 \end{array} \right\},$$

gdzie tym razem $\Pi(\omega)$ oznacza lewą stronę nierówności (7.38).

Dowód. Ustalmy najpierw pewne ogólne fakty. Zauważmy, że prawdziwe jest następujące rozwinięcie

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^{k+1}} A^k, \quad |s| > \|A\| \quad (7.39)$$

Stąd

$$G(j\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{c^T A^{2k-1} b}{\omega^{2k}} - j \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^T A^{2k} b}{\omega^{2k+1}}, \quad |\omega| > \|A\| \quad (7.40)$$

Rozważmy funkcję $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto n(\omega)$ zdefiniowaną wzorem

$$n(\omega) := b^T (A^T + j\omega I)^{-1} (A - j\omega I)^{-1} b \quad (7.41)$$

7.4. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADU LURIE STEROWANIA

Bezpośrednio z założeń wynika, że

$$\exists m > 0 : \quad 0 < n(\omega) < m \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (7.42)$$

Z (7.39) i (7.41) wynika, że

$$\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 n(\omega) = \|b\|^2 > 0 \quad (7.43)$$

Ponadto, niezależnie od konkretnej postaci $\Pi(\omega)$ można ustalić, używając (7.40), że

$$\exists \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega), \quad \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) = 0 \implies \exists \lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) \quad (7.44)$$

Możemy teraz przystąpić do zasadniczego dowodu.

Założmy, że $\Pi(\omega) \geq \varepsilon n(\omega) > 0$ dla wszystkich $\omega \in \mathbb{R}$. Stąd na mocy (7.44) istnieje $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) \geq 0$. W ten sposób, jeśli $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) > 0$ to $\Pi(\omega) > 0$ dla wszystkich $\omega \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) = 0$ to z założenia wynika także, że $\omega^2 \Pi(\omega) \geq \varepsilon \omega^2 n(\omega)$ dla wszystkich $\omega \in \mathbb{R}$. Przechodząc obustronnie do granic, co wolno zrobić na mocy (7.44) i (7.43), dostajemy $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) > 0$. Tak więc, jeśli $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) = 0$ to $\Pi(\omega) > 0$ dla wszystkich $\omega \in \mathbb{R}$ oraz $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) > 0$.

Wykażemy teraz wynikanie odwrotne.

- 1°. $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) > 0$ i $\Pi(\omega) > 0$. Wtedy $\inf \Pi(\omega) > 0$ i wobec (7.42) istnieje na tyle małe $\varepsilon > 0$, aby

$$\Pi(\omega) \geq \inf_{\omega^2} \Pi(\omega) \geq \varepsilon m \geq \varepsilon \sup_{\omega^2} n(\omega) \geq \varepsilon n(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

- 2°. $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \Pi(\omega) = 0$, $\Pi(\omega) > 0$ oraz $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(\omega) > 0$. Wtedy istnieje granica $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} (1 + \omega^2) \Pi(\omega)$ i jest dodatnia. Stąd $\inf_{\omega^2} (1 + \omega^2) \Pi(\omega) > 0$. Z drugiej strony na mocy (7.42) i (7.43) $\sup_{\omega^2} (1 + \omega^2) n(\omega) < \infty$.

Dzięki tym faktom istnieje na tyle mała $\varepsilon > 0$, że

$$(1 + \omega^2) \Pi(\omega) \geq \inf_{\omega^2} (1 + \omega^2) \Pi(\omega) \geq \varepsilon \sup_{\omega^2} (1 + \omega^2) n(\omega) \geq \varepsilon (1 + \omega^2) n(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} ,$$

a stąd $\Pi(\omega) \geq \varepsilon n(\omega)$ dla wszystkich $\omega \in \mathbb{R}$. □

Porównując otrzymane rezultaty z twierdzeniami dotyczącymi globalnej asymptotycznej stabilności punktu równowagi 0 w układzie (2.39), przedyskutowanymi w rozdziale 2.5, można zauważyć, że nieliniowość F jest „asymptotyczna” do sektora Popova absolutnej stabilności. Przy tym sposób dochodzenia F do sektora

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

wynikającego z warunków (ii) w Twierdzeniu 7.4.1 jest mniej ograniczający niż w pracach [137], [98], [99], [156].

Okazuje się, że jeśli F spełnia mocniejsze żądania asymptotyczne to sektor Popova może być zastąpiony nawet przez sektor Hurwitza. W ten sposób dla układów, dla których sektory te się nie pokrywają, twierdzenie Popova nie daje warunku koniecznego ograniczoności wszystkich rozwiązań.

Twierdzenie 7.4.4. Załóżmy, że istnieje $k \in \mathbb{R}$ takie, że:

$$\operatorname{Re} \lambda(A + kbc^T) < 0 \quad (7.45)$$

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{F(\sigma)}{\sigma} = k \quad (7.46)$$

Wtedy system (2.39) jest dyssypatywny.

Dowód. Rozważmy formę kwadratową $V(x) = x^T Hx$, gdzie $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$ jest jedynym, na mocy (7.45) i Twierdzenia 2.4.2, rozwiązaniem macierzowego równania Lapunowa

$$(A + kbc^T)^T H + H(A + kbc^T) = -I .$$

Stąd wobec twierdzenia Rayleigha: $V(x) \rightarrow \infty$ przy $\|x\| \rightarrow \infty$. Ponadto

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Hx + x^T H\dot{x} = [x^T A^T + Fb^T] Hx + x^T H [Ax + Fb] = \\ &= x^T [(A^T + kcb^T)H + H(A + kbc^T)] x + 2 [F(c^T x) - kc^T x] b^T Hx = \\ &= -\|x\|^2 + 2 [F(c^T x) - kc^T x] b^T Hx . \end{aligned}$$

Warunek (7.46) można równoważnie zapisać jako

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left| \frac{F(\sigma) - k\sigma}{\sigma} \right| \leq \varepsilon, \quad \text{gdy } |\sigma| > \delta \quad (7.47)$$

W szczególności dla $\varepsilon = \frac{1 - \kappa}{2 \|c\| \|Hb\|} > 0$, gdzie $0 < \kappa < 1$ na mocy (7.47)

$$\exists \bar{\delta} > 0 : \left| \frac{F(c^T x) - kc^T x}{c^T x} \right| \leq \frac{1 - \kappa}{2 \|c\| \|Hb\|}, \quad \text{gdy } |c^T x| > \bar{\delta} \quad (7.48)$$

Wprowadźmy do rozważań zbiór

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x| \leq \bar{\delta}\} \cap \overline{K(0, 2 \|Hb\| \max_{|\sigma| \leq \bar{\delta}} |F(\sigma) - k\sigma|)} .$$

Ewidentnie jest to zwarty podzbiór \mathbb{R}^n . Pokażemy, że

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega .$$

1°. $|c^T x| > \bar{\delta}$. Wtedy, dzięki (7.48),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\|x\|^2 + 2 \left[\frac{F(c^T x) - kc^T x}{c^T x} \right] x^T cb^T Hx \leq \\ &\leq -\|x\|^2 + 2 \frac{1 - \kappa}{2 \|c\| \|Hb\|} \|x\|^2 \|c\| \|Hb\| = -\kappa \|x\|^2 < 0 . \end{aligned}$$

2°. $|c^T x| \leq \bar{\delta}$ i $\|x\| > 2 \|Hb\| \max_{|\sigma| \leq \bar{\delta}} |F(\sigma) - k\sigma|$. Wtedy

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|^2 + 2 \|x\| \|Hb\| \max_{|\sigma| \leq \bar{\delta}} |F(\sigma) - k\sigma| < 0 .$$

Teraz założenia Twierdzenia 7.4.1 są spełnione i z jego tezy wynika teza Twierdzenia 7.4.4. \square

7.5. PRZYKŁAD

Zastosujemy Twierdzenie 7.4.1 do uzyskania warunku wystarczającego dyssypatywności systemu

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - F(x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + \frac{1}{2}F(x_1) \end{array} \right\}, \quad F \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}) \quad (7.49)$$

System (7.49) może być interpretowany jako układ Lurie (2.39) z:

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ponieważ $\operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0$ dla $\mu \in (0, 2)$ więc mamy do czynienia z przypadkiem (I) Twierdzenia 7.4.1, a ponadto $k_1 > 0$, $k_2 < 2$.

Para (A, b) jest sterowalna i do weryfikacji założenia (I)/(i) w Twierdzeniu 7.4.1 może być zastosowany Lemat 7.4.2/(I). Zauważmy, że prostszy do weryfikacji Lemat 7.4.3 jest tu nieużyteczny, bo A ma wartości własne na osi urojonej, dokładniej $\lambda(A) = \{-j, j, -1\}$.

7. DYSSYPATYWNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Ponieważ

$$(A - sI)^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{s^2 - \frac{1}{2}}{(s+1)(s^2+1)} \\ -\frac{3}{2} \frac{(s+1)}{(s+1)(s^2+1)} \\ -\frac{1}{2} \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s^2+1)} \end{bmatrix}$$

więc zgodnie z (2.40) i (7.41):

$$G(s) = \frac{s^2 - \frac{1}{2}}{(s+1)(s^2+1)}, \quad n(\omega) = \frac{5}{4}\omega^4 + 5\omega^2 + \frac{11}{4}.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) &:= 1 + (k_1 + k_2) \operatorname{Re} G(j\omega) + k_1 k_2 |G(j\omega)|^2 - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) = \\ &= \frac{1}{(1 - \omega^2)^2 (1 + \omega^2)} \left[(1 + q)\omega^6 + \left(k_1 + k_2 + k_1 k_2 - \frac{q}{2} - 1 \right) \omega^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(k_1 k_2 - \frac{k_1 + k_2}{2} - \frac{q}{2} - 1 \right) \omega^2 + \left(1 - \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

Jeżeli $q = -1$ to warunkiem koniecznym i dostatecznym spełnienia nierówności (7.36) jest istnienie liczby $\varepsilon > 0$ takiej, że

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{2} + k_1 + k_2 + k_1 k_2 \right) \omega^4 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{k_1 + k_2}{2} + k_1 k_2 \right) \omega^2 + \\ &+ \left(1 - \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} \right) \geq \varepsilon \left(\frac{5}{4}\omega^4 + 5\omega^2 + \frac{11}{4} \right) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (7.50)$$

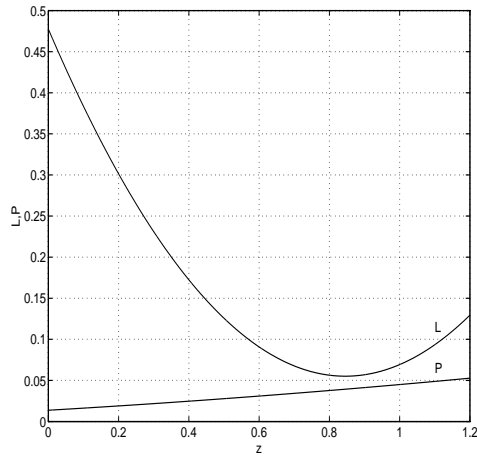
W szczególności dla $k_1 = \alpha$, $k_2 = 1 + \alpha$, gdzie α jest małą liczbą dodatnią lewa strona (7.50) przyjmuje postać trójmianu kwadratowego względem ω^2

$$\left(\alpha^2 + 3\alpha + \frac{1}{2} \right) \omega^4 + (\alpha^2 - 1) \omega^2 + \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{2} \right).$$

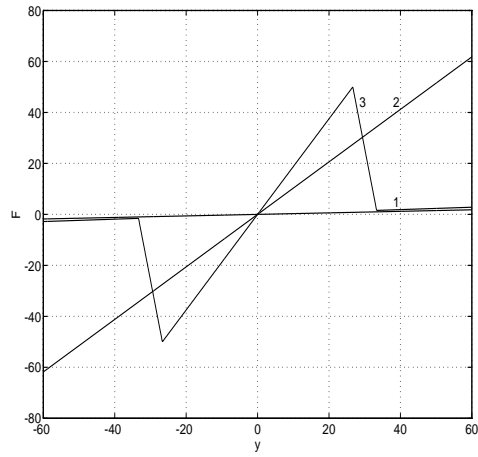
Prawą stronę (7.50) można również zinterpretować jako trójmian kwadratowy względem ω^2 . Z dokonanej na rysunku 7.2 porównania tych trójmianów dla $\alpha = 0.03$ i $\varepsilon = 0.005$ wynika, że nierówność (7.50) może być spełniona przy dostatecznie małej liczbie ε .

Z Twierdzenia 7.4.1/(I) wynika teraz, że system (7.49) jest dyssypatywny w klasie lokalnie lipschitzowskich funkcji F spełniających warunek sektorowy

$$\liminf_{|\sigma| \rightarrow \infty} \left[1 + \alpha - \frac{F(y)}{y} \right] \left[\frac{F(y)}{y} - \alpha \right] \geq 0, \quad \alpha = 0.03 \quad (7.51)$$



Rysunek 7.2. Graficzna weryfikacja nierówności (7.50). L – wykres lewej strony dla $\alpha = 0.03$, P – wykres prawej strony dla $\varepsilon = 0.005$



Rysunek 7.3. Graficzna weryfikacja warunku sektorowego. 1 – półprosta o nachyleniu $\alpha = 0.03$, 2 – prosta o nachyleniu $1 + \alpha$

W przypadku omówionego w rozdziale 4.4 kontrprzykładu Deweya i Jury'ego na hipotezę Ajzermana nieliniowość F ma postać przedstawioną na rysunku 7.3 i warunek (7.51) jest spełniony, co dowodzi dyssypatywności systemu Deweya–Jury'ego.

Dyssypatywności systemu (7.49) z nieliniowością ϕ przedstawioną na rysunku 7.3 można dowieść znacznie prościej. Nachylenie wykresu ϕ dla dostatecznie dużych $|\sigma|$ jest liczbą z przedziału $(0, 2)$, a zatem są spełnione warunki (7.45) i (7.46). Na mocy Twierdzenia 7.4.4, system Deweya–Jury'ego jest dyssypatywny.

8. STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

8.1. WSTĘP

W tym rozdziale podamy podstawowe pojęcia i wyniki teorii dyskretnych układów dynamicznych w przestrzeniach metrycznych. Dla takich układów zmienna czasowa przyjmuje wartości ze zbioru $\mathbb{Z}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Szczegółowo będzie przedyskutowana metoda funkcjonalów Lapunowa dla dyskretnych systemów dynamicznych w przestrzeni \mathbb{R}^n . Wyniki stosuje się do analizy stabilności dyskretnych układów Lurie sterowania. Dokonamy uogólnienia wielowymiarowego kryterium koła.

8.2. DYSKRETNE UKŁADY DYNAMICZNE

W całym niniejszym rozdziale X oznacza przestrzeń metryczną z metryką ρ .

Definicja 8.2.1. Jeśli $S : X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym to rodzinę $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ iterat S nazywamy *dyskretnym systemem dynamicznym (DSD)* na X . Przestrzeń X nazywamy *przestrzenią stanu DSD*, $S^k x$ – *stanem* w chwili $k \in \mathbb{Z}^*$ ewoluującym ze stanu początkowego x . Odwzorowanie $S^{(\cdot)} x : \mathbb{Z}^* \ni k \mapsto S^k x \in X$ nazywamy *ruchem* przez punkt $x \in X$.

Definicja 8.2.2. Niech $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ będzie DSD na X , $x \in X$, $A \subset X$. Zbiór

$$\Pi(x) = \{S^k x : k \in \mathbb{Z}^*\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^*} S^k x$$

nazywamy *trajektorią punktu x* (dokładniej, trajektorią ruchu przez punkt x). Zbiór $\Pi(A) = \bigcup_{y \in A} \Pi(y)$ będziemy nazywać *trajektorią zbioru A* , a zbiór

$$\Lambda(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}^*} \overline{\Pi(S^k x)}$$

– *zbiorem granicznym* trajektorii punktu x .

Definicja 8.2.3. Niech $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ będzie DSD na X . Ruch przez punkt x nazywamy *stacjonarnym* jeśli $\Pi(x) = \{x\}$. W tym przypadku punkt x nazywamy *punktem równowagi*. Ruch przez punkt x nazywamy *okresowym*, gdy

$$\exists K \in \mathbb{N} : S^k x = S^{k+K} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* .$$

Ruch przez punkt x nazywamy *stabilnym w sensie Lagrange'a* (Lg-stabilnym), gdy $\overline{\Pi(x)}$ jest zbiorem zwartym w X .

Definicja 8.2.4. $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ – **DSD** na X . Zbiór $\emptyset \neq W \subset X$ nazywamy *inwariantnym* jeśli $S(W) \subset W$ oraz *mocno-inwariantnym*, gdy $S(W) = W$.

Lemat 8.2.5. W jest zbiorem mocno-inwariantnym wtedy i tylko wtedy, gdy W jest zbiorem inwariantnym oraz dla każdego $x \in W$ istnieje $y \in W$ takie, że $Sy = x$.

Definicja 8.2.6. $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ – **DSD** na X . Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem startowym*, gdy równanie $Sy = x$ nie posiada rozwiązań w X .

Jest oczywiste, że zbiór mocno-inwariantny nie zawiera punktów startowych.

Twierdzenie 8.2.7. $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ – **DSD** na X . Zachodzą następujące fakty:

- (i) $\Pi(x)$ – zbiór inwariantny,
- (ii) $\Pi(x)$ – trajektoria ruchu stacjonarnego (punkt równowagi) lub trajektoria ruchu okresowego $\implies \Pi(x)$ – zwarty zbiór mocno-inwariantny,
- (iii) W – zbiór inwariantny $\implies \overline{W}$ – zbiór inwariantny,
- (iv) $\Lambda(x) = \overline{\Lambda(x)}$,
- (v) $\overline{\Pi(x)} = \Pi(x) \cup \Lambda(x)$,
- (vi) $\Lambda(x) = \Lambda(S^k x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$,
- (vii) $\Lambda(x)$ – zbiór inwariantny.

Twierdzenie 8.2.8 (Zasada inwariantności LaSalle’a). Niech $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ będzie **DSD** na X . Jeżeli $\Pi(x)$ jest zbiorem zwartym w X to $\Lambda(x) \neq \emptyset$, zbiór $\Lambda(x)$ jest zwarty w X , $\rho(S^k x, \Lambda(x)) \rightarrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$, a jeśli dodatkowo X jest przestrzenią metryczną zupełną to $\Lambda(x)$ jest zbiorem mocno-inwariantnym.

Definicja 8.2.9. $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ jest **DSD** na X . $\emptyset \neq M \subset X$. Zbiór

$$A(M) := \{y \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(S^k y, M) = 0\}$$

nazywamy *obszarem atrakcji zbioru M* .

Definicja 8.2.10. $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ oznaczają **DSD** na X . Zbiór $X \supset M \neq \emptyset$ nazywamy *atraktorem* jeśli istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że $K(M, \varepsilon_0) \subset A(M)$ oraz *jednostajnym atraktorem*, gdy M jest atraktorem oraz

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \bar{k}(\eta, \varepsilon_0) \in \mathbb{N} : S^k x \in K(M, \eta) \quad \text{dla} \quad k \geq \bar{k}, x \in K(M, \varepsilon_0)$$

przy czym ε_0 jest liczbą występującą w definicji atraktora.

8. STABILNOŚĆ DYSKRETYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Lemat 8.2.11. Obszar atrakcji $A(M)$ atraktora M jest zbiorem otwartym i inwariantnym.

Definicja 8.2.12. Niech $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ będzie **DSD** na X . Zbiór $X \supset M \neq \emptyset$ nazywamy *stabilnym (S)*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : H(K(M, \delta)) \subset K(m, \varepsilon)$$

i *niestabilnym (NS)*, gdy M nie jest stabilny. Zbiór $X \supset M \neq \emptyset$ nazywamy *asymptotycznie stabilnym (AS)*, jeśli M jest stabilny oraz M jest atraktorem. Zbiór M nazywamy *jednostajnie asymptotycznie stabilnym (JAS)*, gdy M jest stabilny oraz M jest jednostajnym atraktorem.

8.2.1. Przykład dyskretnego systemu dynamicznego

Niech $\varepsilon > 0$, a $f : \mathbb{R}^2 \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą. Rozważmy zbiór

$$X_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \varepsilon k, x_2 = \varepsilon l, k, l \in \mathbb{Z}\} .$$

Zacieśniając metrykę z \mathbb{R}^2 do zbioru X_ε nadajemy mu strukturę przestrzeni metrycznej. Wprowadzamy wektory

$$r_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} = -r_5, \quad r_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = -r_6, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = -r_7, \quad r_4 = \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{bmatrix} = -r_8 ,$$

i z ich pomocą definiujemy odwzorowanie $S : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$,

$$S(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & \text{gdy } f(x) = 0 \\ x + \bar{r}(x), & \text{gdy } f(x) \neq 0 \end{array} \right\} ,$$

gdzie $\bar{r}(x)$ jest dowolnym z tych wektorów $r_i, i = 1, 2, \dots, 8$, które realizują maksimum

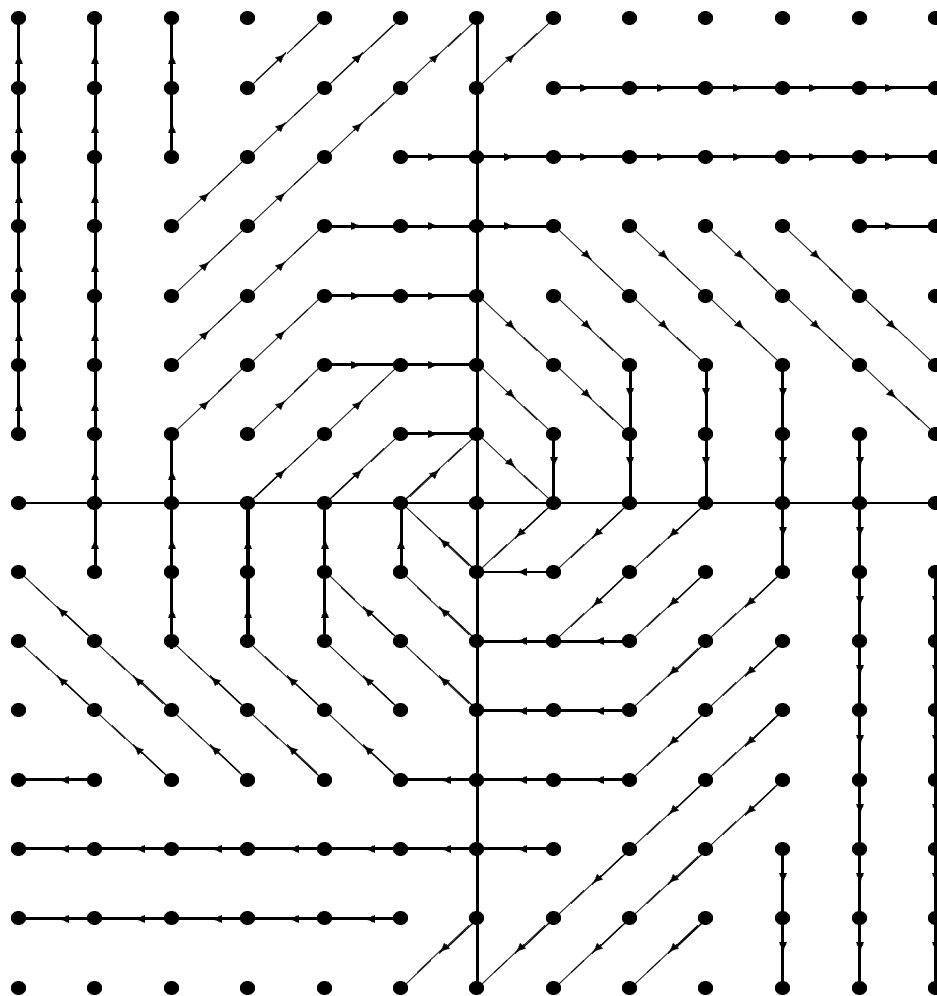
$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, 8\}} \left\langle \frac{r_i}{\|r_i\|}, f(x) \right\rangle .$$

Odwzorowanie S spełnia globalny warunek Lipschitza ze stałą $L = 2\sqrt{2} + 1$. Istotnie,

$$\begin{aligned} \rho(S(x_1), S(x_2)) &= \rho(x_1 + \bar{r}(x_1), x_2 + \bar{r}(x_2)) = \|x_1 + \bar{r}(x_1) - x_2 - \bar{r}(x_2)\| \leq \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \|\bar{r}(x_1) - \bar{r}(x_2)\| \leq \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x_1 = x_2 \\ \rho(x_1, x_2) + 2\sqrt{2}\varepsilon, & x_1 \neq x_2 \end{array} \right\} \leq \\ &\leq \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x_1 = x_2 \\ \rho(x_1, x_2) + 2\sqrt{2}\rho(x_1, x_2), & x_1 \neq x_2 \end{array} \right\} = (2\sqrt{2} + 1)\rho(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X_\varepsilon . \end{aligned}$$

Stąd, zgodnie z definicją 8.2.1, $\{S^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ określa **DSD** na X_ε . Na rysunku 8.1 zobrazowano trajektorie zdefiniowanego wyżej dyskretnego systemu dynamicznego, w fragmencie przestrzeni X_ε , $\varepsilon = 0.2$ i dla funkcji

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ -x_1 - x_2 + x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 8.1. Trajektorie przykładowego dyskretnego systemu dynamicznego

Równoważnie można też definiować $\bar{r}(x)$ w oparciu o tabelę 8.1.

8. STABILNOŚĆ DYSKRETYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Tabela 8.1. Tabela definiująca wartości funkcji \bar{r}

Warunki dla $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$	$\bar{r}(x)$
$(f_2/f_1) \in (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1), \quad f_1 > 0$	r_1
$(f_2/f_1) \in (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1), \quad f_1 > 0, \quad f_2 > 0$	r_2
$(f_2/f_1) \in (\sqrt{2} + 1, \infty] \cup [-\infty, -\sqrt{2} - 1), \quad f_2 > 0$	r_3
$(f_2/f_1) \in (-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1), \quad f_1 < 0, \quad f_2 > 0$	r_4
$(f_2/f_1) \in (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1), \quad f_1 < 0$	r_5
$(f_2/f_1) \in (-1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1), \quad f_1 < 0, \quad f_2 < 0$	r_6
$(f_2/f_1) \in (\sqrt{2} + 1, \infty] \cup [-\infty, -\sqrt{2} - 1), \quad f_2 < 0$	r_7
$(f_2/f_1) \in (-\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2}), \quad f_1 > 0, \quad f_2 < 0$	r_8

8.3. STABILNOŚĆ PUNKTÓW RÓWNOWAGI W PRZESTRZENI \mathbb{R}^n

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a funkcja $f : \Omega \ni x \mapsto f(x) \in \Omega$ będzie funkcją ciągłą. Z definicji 8.2.1 wynika, że $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ jest **DSD** na Ω ($f^0 = id_\Omega$). Zauważmy, że ten **DSD** być równoważnie zadany układem równań różnicowych

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = f[x(k)] \\ x(0) = x_0, \quad x_0 \in \Omega \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

Punktami równowagi w takim **DSD** są punkty stałe f . Niech \bar{x} – punkt stały f . Translacja $z = x - \bar{x}$ umożliwia zastąpienia **DSD** $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ na Ω równoważnym mu **DSD** $\{[f(\cdot + \bar{x}) - \bar{x}]^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ na zbiorze $\{z = x - \bar{x} : x \in \Omega\}$, w którym 0 jest punktem równowagi. W związku z tym bez straty ogólności rozważań przyjmuje się w dalszym ciągu, że 0 jest punktem równowagi w **DSD** $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ na Ω . Sformułowane tylko dla zbioru $\{0\}$ warunki wystarczające stabilności i asymptotycznej stabilności z jednoczesnym oszacowaniem $A(\{0\})$ dają się natychmiast przerobić na analogiczne warunki dla dowolnego punktu równowagi.

Twierdzenie 8.3.1. Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz istnieje $r > 0$ takie, że $K(0, r) \subset \Omega$. Niech $f : \Omega \rightarrow \Omega$ będzie funkcją ciągłą, $f(0) = 0$. Przyjmijmy, że funkcjonal $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągły i ma następujące własności:

$$\begin{aligned} V(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad V(0) = 0 \\ \Delta V(x) := V[f(x)] - V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (8.2)$$

Wtedy w **DSD** $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$, określonym na Ω , zbiór $\{0\}$ jest **S**.

8.3. STABILNOŚĆ PUNKTÓW RÓWNOWAGI W PRZESTRZENI \mathbb{R}^n

Dowód. Część wstępna. Niech $l > 0$. Przez Ω_l^* oznaczmy zbiór poziomicowy $\{x \in \Omega : V(x) \leq l\}$. Dzielimy przestrzeń topologiczną Ω_l^* na składowe [35, str. 430]. Wśród tych składowych wyróżniamy zbiór Ω_l , składową punktu 0 [35, str. 430]. Wykażemy teraz, że Ω_l jest zbiorem inwariantnym w **DSD** $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$, tzn. $f(\Omega_l) \subset \Omega_l$. Zauważmy najpierw, że z (8.2) wynika inkluzja $f(\Omega_l) \subset \Omega_l^*$. Ponieważ Ω_l jest zbiorem spójnym, a f jest ciągła więc $f(\Omega_l)$ jest zbiorem spójnym [35, str. 425, Wniosek 3], co oznacza, że $f(\Omega_l)$ jest w całości zlokalizowany w jednej tylko składowej zbioru Ω_l^* . Ponieważ $0 \in \Omega_l$, więc $f(\Omega_l)$ leży w całości w tej składowej zbioru Ω_l^* , w której leży punkt $f(0)$. Ponieważ jednak 0 jest punktem stałym f więc $f(\Omega_l) \subset \Omega_l$. Z Lematu 2.3.1 wynika, że dla dostatecznie małych $l > 0$ zbiór Ω_l jest zwarty.

Część zasadnicza. Mamy pokazać, że $\{0\}$ jest zbiorem stabilnym, tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \Pi(K(0, \delta)) \subset K(0, \varepsilon) .$$

Wybieramy dowolnie $\varepsilon > 0$. Na mocy zwartości Ω_l dla dostatecznie małych $l > 0$ istnieje takie $l > 0$, że $\Omega_l \subset K(0, \varepsilon)$. Z definicji Ω_l , ciągłości V i założeń o Ω wynika, że $\{x \in \Omega_l : V(x) < l\}$ jest zbiorem otwartym zawierającym pewną kulę o środku w 0. Tak więc istnieje $\delta(\varepsilon) > 0$ (zależność od ε wynika z faktu, że $K(0, \varepsilon)$ ogranicza Ω_l) taka, że $K(0, \delta) \subset \Omega_l$. Teraz mamy $\Pi(K(0, \delta)) \subset \Pi(\Omega_l) \subset \Omega_l \subset K(0, \varepsilon)$, a zatem $\{0\}$ jest zbiorem stabilnym. \square

Definicja 8.3.2. Niech $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ będzie **DSD** na Ω , zdefiniowanym przez rozwiązanie systemu (8.1). Funkcjonał $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *ciągłym funkcjonalem Lapunowa na zbiorze $\Gamma \subset \Omega$* jeśli

$$\begin{aligned} & V \text{ jest ciągły na } \overline{\Gamma} \\ & \Delta V(x) = V[f(x)] - V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma . \end{aligned}$$

Uwaga 8.3.3. Z definicji 8.3.2 wynika, że funkcjonal V opisany w Twierdzeniu 8.3.1 jest funkcjonalem Lapunowa na zbiorze Ω_l , a nawet na Ω_l^* – patrz dowód Twierdzenia 8.3.1.

Twierdzenie 8.3.4. Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \Omega$ jest funkcją ciągłą oraz istnieje V – funkcjonal Lapunowa na niepustym, zwartym, inwariantnym zbiorze $\Gamma \subset \Omega$. Wtedy $\Gamma \subset A(M)$, gdzie M jest największym, w sensie relacji inkluzji zbiorów, zbiorem mocno-inwariantnym zawartym w zbiorze

$$E := \{x \in \Gamma : \Delta V(x) = 0\} .$$

Dowód. Wybieramy dowolny $x_0 \in \Gamma$. Funkcja $\mathbb{Z}^* \ni k \mapsto V[f^k(x_0)] \in \mathbb{R}$ jest, wobec $\Delta V(x) \leq 0$, nierosnąca. Ponieważ V jest ciągła na zwartym zbiorze Γ więc V jest, na mocy twierdzenia Weierstrassa, ograniczona od dołu. Tak więc istnieje granica

8. STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V[f^k(x_0)] = c \quad (8.3)$$

Rozważmy $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ jako **DSD** na Γ , co jest możliwe dzięki inwariantności zbioru Γ . Ponieważ $\overline{\Pi(x_0)}$ jest zbiorem zwartym więc, na mocy Twierdzenia 8.2.8, $A(x_0) \neq \emptyset$, $A(x_0)$ jest zwarty i mocno-inwariantny oraz $\rho(f^k(x_0), A(x_0)) \rightarrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$. Z definicji 8.2.2 wynika, że jeżeli $y \in A(x_0) \neq \emptyset$ to $y \in \overline{\Pi(f^k(x_0))}$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}^*$. Zatem $y \in \overline{\Pi(x_0)} = \{f^k(x_0)\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$. Wobec zwartości $\overline{\Pi(x_0)}$ z ciągu $\{f^k(x_0)\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ można wybrać podciąg $\{f^{k_m}(x_0)\}_{k_m \in \mathbb{Z}^*}$ zbieżny do punktu y . Teraz dzięki ciągłości V , z (8.3) wynika, że $V(y) = c$. Ponieważ y był dowolnym punktem zbioru $A(x_0)$, więc V jest stały na całym zbiorze $A(x_0)$, a zatem $\Delta V(x) = 0$ na $A(x_0)$. W konsekwencji $A(x_0) \subset E$. $A(x_0)$ jest więc zbiorem mocno-inwariantnym zawartym w E , a zatem $A(x_0) \subset M$. Ponieważ $x_0 \in A(A(x_0))$, więc $x_0 \in A(M)$. W ten sposób dowiedliśmy implikacji $x_0 \in \Gamma \implies x_0 \in A(M)$, z której wynika inkluzja $\Gamma \subset A(M)$. \square

Twierdzenie 8.3.5. Niech będą spełnione wszystkie założenia Twierdzenia 8.3.1 oraz dodatkowo funkcjonal V spełnia jeszcze warunek

$\{0\}$ jest największym zbiorem mocno-inwariantnym zlokalizowanym w E .

Wtedy $\{0\}$ jest zbiorem **AS** oraz

$$A(\{0\}) \supset \bigcup_{l \in (0, L)} \Omega_l,$$

gdzie Ω_l jest składową punktu 0 zbioru $\Omega_l^* = \{x \in \Omega : V(x) \leq l\}$ traktowanego jako przestrzeń topologiczna,

$$L = \sup_{0 \leq l \leq l_0, \Omega_l \subset \Omega} l,$$

l_0 jest taką liczbą dodatnią, że dla każdego $l \in (0, l_0)$ zbiór Ω_l jest zwarty. Więcej, jeżeli $\Omega = \mathbb{R}^n$ oraz V jest *promieniowo-nieograniczony*, tzn.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty \quad (8.4)$$

to $A(\{0\}) = \mathbb{R}^n$.

Dowód. Z Twierdzenia 8.3.1 wynika, że $\{0\}$ jest zbiorem stabilnym. W dowodzie Twierdzenia 8.3.1 wykazaliśmy, że każdego $l \in (0, L)$ zbiór Ω_l jest zwarty, niepusty, inwariantny. V jest funkcjonalem Lapunowa na Ω_l (por. Uwaga 8.3.3). Kładąc w Twierdzeniu 8.3.4 $\Gamma = \Omega_l$ ustalamy, że $\Omega_l \subset A(M)$, gdzie M – największy, w sensie relacji inkluzji zbiorów, zbiór mocno-inwariantny zawarty w $\{x \in \Omega_l : \Delta V(x) = 0\}$. Ponieważ dla $l \in (0, L)$ $\Omega_l \subset \Omega$, więc z warunku (8.4) wynika, że $M = \{0\}$, a zatem dla wszystkich $l \in (0, L)$ mamy $A(\{0\}) \supset \Omega_l$. Inkluzja implikuje stwierdzenie, że $\{0\}$ jest atraktorem, a ponieważ wiemy, że jest zbiorem stabilnym więc $\{0\}$ jest asymptotycznie stabilny. Ponadto, $A(\{0\}) \supset \bigcup_{l \in (0, L)} \Omega_l$.

8.3. STABILNOŚĆ PUNKTÓW RÓWNOWAGI W PRZESTRZENI \mathbb{R}^n

Jeżeli $\Omega = \mathbb{R}^n$ to $\{f^k\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$ jest **DSD** na \mathbb{R}^n , a V jest funkcjonałem Lapunowa na \mathbb{R}^n . Z promieniowej – nieograniczonej V wynika, że dla dowolnego $l > 0$ zbiór Ω_l jest zwarty oraz $\bigcup_{l>0} \Omega_l = \mathbb{R}^n$. \square

Jako przykład wykorzystania też Twierdzenia 8.3.5 zostanie podane twierdzenie dotyczące określenia podzbioru obszaru atrakcji zbioru $\{0\}$ w układzie Lurie sterowania z pewnym typem nieliniowości analitycznej. Twierdzenie to uogólnia Twierdzenie 5.1.1 na przypadek dyskretny.

Twierdzenie 8.3.6. Niech A będzie macierzą rzeczywistą $n \times n$ -wymiarową o widmie w otwartym kole jednostkowym, tzn. $|\lambda(A)| < 1$. Przyjmijmy, że $b, c \in \mathbb{R}^n$, przy czym para (A, c^T) jest obserwowalna. Niech ponadto $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją analityczną, $F(0) = F'(0) = 0$. Wtedy w **DSD** dyktowanym przez układ równań różnicowych (dyskretny układ Lurie)

$$x(k+1) = Ax(k) + bF[c^T x(k)] \quad (8.5)$$

zbiór $\{0\}$ jest **AS** oraz

$$\Omega_a := \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < l\} \subset A(\{0\}) ,$$

gdzie $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$ jest jedynym rozwiązaniem równania Lapunowa

$$A^T H A - H = -c c^T ,$$

$$l = \min_{\left\{ x \in \mathbb{R}^n : 1 - 2 \left[\frac{F(c^T x)}{x^T c c^T x} \right] b^T H A x - b^T H b \left[\frac{F(c^T x)}{c^T x} \right]^2 = 0 \right\}} x^T H x .$$

Dowód. Na mocy założeń o A i c istnieje dokładnie jedna macierz $H = H^T > 0$, rozwiązaniem równania Lapunowa. Teraz dla $V(x) = x^T H x$ mamy

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= [x^T A^T + F b^T] H [A x + b F] - x^T H x = \\ &= x^T [A^T H A - H] x + F^2 b^T H b + 2 b^T H A x F = \\ &= -x^T c c^T x \left\{ 1 - \left[\frac{F(c^T x)}{c^T x} \right]^2 b^T H b - 2 b^T H A x \left[\frac{F(c^T x)}{x^T c c^T x} \right] \right\} . \end{aligned}$$

Na mocy założeń o F , wyrażenie w $\{ \}$ jest ciągle na \mathbb{R}^n oraz dodatnie w pewnym otoczeniu $\{0\}$. Otoczenie to oznaczmy przez Ω . Korzystając z obserwowalności pary (A, c^T) można pokazać, że w zbiorze $E = \{x \in \Omega : \Delta V(x) = 0\} = \{x \in \Omega : c^T x = 0\}$ nie może zawierać się żaden zbiór mocno-inwariantny będący istotnym nadzbiorem $\{0\}$. Z Twierdzenia 8.3.5 wynika teraz teza Twierdzenia 8.3.6. \square

8.4. FORMY KWADRATOWE JAKO FUNKCJONAŁY LAPUNOWA

Rozważać będziemy najpierw nieliniowy, dyskretny układ sterowania

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu[x(k)] \quad (8.6)$$

$A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u[x(k)] \in \mathbb{R}^m$ dla każdego ustalonego $k \in \mathbb{Z}^*$. Poniżej sformułowane twierdzenie podaje warunek wystarczający na to, aby układ (8.6) dopuszczał formę kwadratową w charakterze funkcjonału Lapunowa V , który spełnia założenia Twierdzenia 8.3.5.

Twierdzenie 8.4.1. Niech sterowanie $u(\cdot)$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że istnieją macierze $K \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, $K = K^T \geq 0$, $M \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $M = M^T$, $L \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, takie, że:

(i)

$$\begin{bmatrix} x \\ u(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u(x) \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

Ω – otwarte otoczenie 0,

(ii) układ równań Lurie

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H A - H - M = -G G^T \\ A^T H B + L = -G V \\ K - B^T H B = V^T V \end{array} \right\} \quad (8.7)$$

posiada rozwiązanie względem trójki (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $V \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$,

(iii) $\{0\}$ jest największym w sensie relacji inkluzji zbiorów, zbiorem mocno-inwariantnym zawartym w zbiorze

$$E = \left\{ x \in \Omega : \|G^T x + V u(x)\|^2 + \begin{bmatrix} x \\ u(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u(x) \end{bmatrix} = 0 \right\},$$

(iv) $|\lambda(A + B\mu^T)| < 1$ dla dowolnej macierzy $\mu \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ takiej, że

$$-M + L\mu^T + \mu L - \mu K \mu^T \geq 0,$$

$x \equiv 0$ jest jedynym rozwiązaniem układu liniowego $x(k+1) = (A + B\mu^T)x(k)$ całkownie zlokalizowanym w zbiorze

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|G^T x + V\mu^T x\|^2 + x^T [-M + \mu L^T + L\mu^T - \mu K \mu^T] x = 0 \right\}.$$

8.5. UKŁAD RÓWNAŃ LURIE ZE STEROWALNĄ PARĄ (A, B)

Wtedy $\{0\}$ jest zbiorem **AS**, a zbiór $\Omega_A = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < l\}$, gdzie $l > 0$ jest takie, że $\Omega_A \subset \Omega$, jest podzbiorem obszaru atrakcji $A(\{0\})$.

Uwaga 8.4.2. Założenie (iv) może być odrzucone, jeżeli (ii) zastąpimy mocniejszym warunkiem

(ii') układ równań (8.7) posiada rozwiązanie względem trójki (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T > 0$, $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $V \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$.

Dowód Twierdzenia 8.4.1 przebiega według schematu dowodu Twierdzenia 6.1.2 i dlatego nie będzie tu przytaczany.

Uwaga 8.4.3. Jeżeli założenia Twierdzenia 8.4.1 są spełnione w przypadku $\Omega = \mathbb{R}^n$ to $A(\{0\}) = \mathbb{R}^n$, tzn. $\{0\}$ jest zbiorem *globalnie asymptotycznie stabilnym* (**GAS**) w **DSD** (8.6). Przypadek ten jest uogólnieniem *kwadratowego kryterium Jakuboviča* [138] na układy dyskretnie.

8.5. UKŁAD RÓWNAŃ LURIE ZE STEROWALNĄ PARĄ (A, B)

Lemat 8.5.1 (Popov). Przy założeniu sterowalności pary (A, B) , następujące warunki są równoważne:

(i) spełniona jest nierówność częstotliwościowa

$$\begin{aligned} \Pi(e^{j\omega}) := & K + L^T(A - e^{j\omega}I)^{-1}B + B^T(A^T - e^{-j\omega}I)^{-1}L + \\ & + B^T(A^T - e^{-j\omega}I)^{-1}M(A - e^{j\omega}I)^{-1}B \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad e^{j\omega} \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (8.8)$$

(ii) układ (8.7) posiada rozwiązanie względem trójki (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $V \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$,

(iii) dla wielomianu $\pi(e^{j\omega})$ i macierzy $\Pi(e^{j\omega})$ istnieją faktoryzacje:

$$\pi(e^{j\omega}) := \det(A^T - e^{-j\omega}I) \det(A - e^{j\omega}I) \det \Pi(e^{j\omega}) = \psi(e^{-j\omega})\psi(e^{j\omega}) \quad (8.9)$$

$$\Pi(e^{j\omega}) = \Phi^T(e^{-j\omega})\Phi(e^{j\omega}) \quad (8.10)$$

$$\Phi(z) = V - G^T(A - zI)^{-1}B \quad (8.11)$$

$$\det \Phi(z) = (-1)^n \frac{\psi(z)}{\det(A - zI)} \quad (8.12)$$

8. STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Dowód Lematu 8.5.1 można znaleźć w [113, Lemat 1, str. 687] lub [114]. W przypadku sterowalnej pary (A, B) , Lemat 8.5.1 wyraża warunek konieczny i wystarczający do spełnienia założenia (ii) Twierdzenia 8.4.1. W tym przypadku faktoryzacje (8.9), (8.10), (8.11) i (8.12) mogą być używane do rozwiązywania układu (8.7).

Jeśli (A, B) nie jest sterowalna to (8.8) jest tylko warunkiem koniecznym do spełnienia założenia (ii) w Twierdzeniu 8.4.1.

8.6. WIELOWYMIAROWE KRYTERIUM KOŁA

W rozdziale tym zostanie zanalizowany dyskretny układ sterowania, stanowiący szczególny przypadek systemu (8.6),

$$x(k+1) = \{A + BK[x(k)]C^T\}x(k) \quad (8.13)$$

gdzie $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $C \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $K(x)$ jest macierzą diagonalną, $K(x) \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ dla ustalonego $k \in \mathbb{Z}^*$. Zakładamy ponadto, że sterowanie $u(x) = K(x)C^T x$ jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 8.6.1. Rozpatrzmy układ (8.13), z macierzami $A, B, C, K(\cdot)$ określonymi powyżej. Załóżmy, że (A, B) jest sterowalna, (A, C^T) obserwowalna oraz istnieją diagonalne macierze $K_1, K_2 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$ takie, że:

$$K_1 < K(x) < K_2 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (8.14)$$

gdzie Ω jest pewnym otwartym otoczeniem 0,

$$\begin{aligned} 2I + B^T(A^T - e^{-j\omega}I)^{-1}C(K_1 + K_2) + (K_1 + K_2)C^T(A - e^{j\omega}I)^{-1}B + \\ 2B^T(A^T - e^{-j\omega}I)^{-1}CK_1K_2C^T(A - e^{j\omega}I)^{-1}B \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], e^{j\omega} \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$|\lambda(A + B\mu C^T)| < 1 \quad (8.16)$$

dla dowolnej macierzy diagonalnej $\mu \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$ takiej, że $K_1 < \mu < K_2$. Wtedy $\{0\}$ jest zbiorem **AS**. Ponadto, zbiór $\Omega_A = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < l\}$ jest podzbiorem obszaru atrakcji $A(\{0\})$, gdzie l jest taką liczbą dodatnią, że $\Omega_A \subset \Omega$, a macierz H jest pierwszym elementem trójki (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $V \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, stanowiącej rozwiązanie układu

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H A - H - CK_1 K_2 C^T = -GG^T \\ A^T H B + \frac{1}{2}C(K_1 + K_2) = -GV \\ I - B^T H B = V^T V \end{array} \right\}.$$

Jeżeli $\Omega = \mathbb{R}^n$ to $\{0\}$ zbiór jest **GAS**.

Dowód. Teza wynika z zastosowania Twierdzenia 8.4.1 i Lematu 8.5.1. \square

8.7. PRZYKŁADY

8.7.1. Przykład 1

Układ równań różnicowych

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(i+1) = x_1(i) - x_2(i) + 2F(x_2) \\ x_2(i+1) = x_1(i) - x_2(i) + F(x_2) \end{array} \right\} \quad (8.17)$$

gdzie

$$F(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{y+4} - 2, & \text{gdy } y \geq -4 \\ -2, & \text{gdy } y < -4 \end{array} \right\}$$

ma postać układu (8.13), w którym $n = 2$, $m = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K(x) = \begin{bmatrix} F(x_2) \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Zastosujemy Twierdzenie 8.6.1 do analizy stabilności systemu (8.17). Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) – obserwowalna.

Spełnienie warunku (8.14) będzie miało miejsce, gdy będą istniały liczby $y_1 < 0$, $y_2 > 0$ takie, że na przedziale (y_1, y_2) , nieliniowość F mieści się będzie w stożku pomiędzy prostymi $k_1\sigma$ i k_2y . Wtedy także $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : y_1 < x_2 < y_2\}$. Liczby k_1, k_2 należy określić z warunków (8.15), (8.16). Dla prostoty rachunków można dalej przyjąć $k_1 = 0$, $k_2 = k > 0$, co jak się dalej przekonamy w niczym nie zawęża rozważań. Dążyć będziemy do uzyskania możliwie największej wartości k . Ponieważ

$$G(z) = c^T(A - zI)^{-1}b = -z^{-2} - z^{-1}$$

więc

$$1 + k \operatorname{Re} G(e^{j\omega}) = -2k \cos^2 \omega - k \cos \omega + 1 + k = \varphi(\cos \omega),$$

i po podstawieniu $p = \cos \omega$ stwierdzamy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym zachodzenia nierówności (8.15) jest, aby $[-1, 1] \subseteq [p_1, p_2]$, gdzie p_1, p_2 , $p_1 < p_2$ – zera wielomianu $\varphi(p)$. Ponieważ $p_{1,2} = \frac{1}{4} \left[-1 \mp \sqrt{9 + \frac{8}{k}} \right]$ więc największym możliwym $k > 0$, przy którym ma to miejsce, jest $k = \frac{1}{2}$ i wówczas

$$\varphi(\cos \omega) = \left(\frac{3}{2} + \cos \omega \right) (1 - \cos \omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi] \quad (8.18)$$

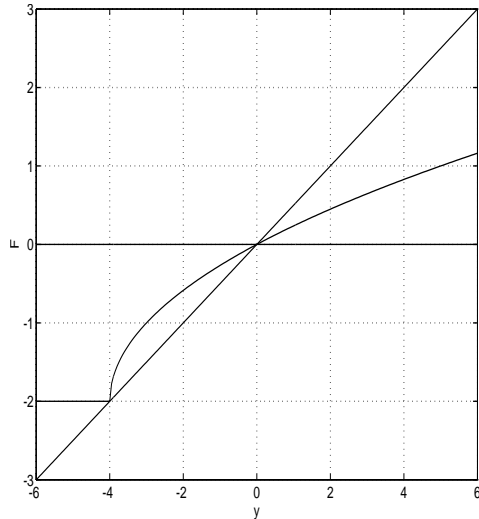
Wielomian charakterystyczny macierzy

$$A + \mu bc^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 + 2\mu \\ 1 & -1 + \mu \end{bmatrix}$$

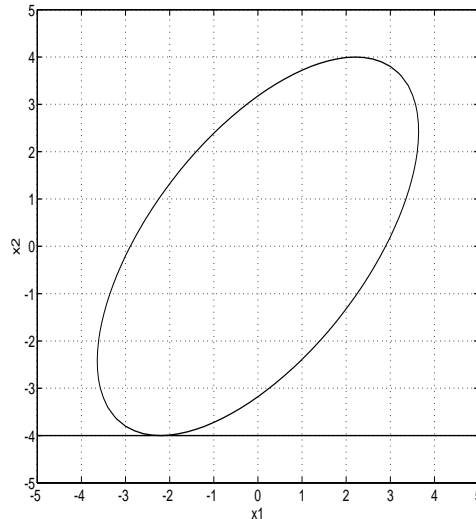
8. STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

jest postaci $\lambda^2 - \mu\lambda - \mu$ i ma zera w otwartym kole jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, a zatem $|\lambda(A + \mu bc^T)| < 1$ dla $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ i warunek (8.16) jest spełniony.

Na rysunku 8.2 dokonano graficznej weryfikacji warunku (8.14).



Rysunek 8.2. Graficzna weryfikacja warunku (8.14): wykres funkcji F leży w stożku ograniczonym prostymi o nachyleniach 0 i 1/2



Rysunek 8.3. Otrzymany podzbiór obszaru atrakcji: 1 – estymata obszaru atrakcji, 2 – prosta $c^T x = x_2 = y_1$

Widzimy, że można przyjąć $y_1 = -4$, $y_2 = \infty$. Ostatecznie zbiór Ω ma postać półpłaszczyzny $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > -4\}$. Należy teraz wyznaczyć rozwiązanie układu równań Lurie

$$\begin{cases} A^T H A - H &= -g g^T \\ A^T H b + \frac{k}{2} c &= -g v \\ 1 - b^T H b &= v^2 \end{cases} \quad (8.19)$$

Użyjemy w tym celu wzorów faktoryzacyjnych (8.9), (8.10), (8.11), (8.12). Zgodnie z (8.11) ($g^T = [g_1 \ g_2]$)

$$\Phi(z) = \frac{v \det(A - zI) - g^T \operatorname{adj}(A - zI)b}{\det(A - zI)} = v + (2g_1 + g_2)z^{-1} + (g_1 + g_2)z^{-2} \quad (8.20)$$

a stąd

$$\Phi^T(z^{-1}) = \Phi(z^{-1}) = v + z(2g_1 + g_2) + (g_1 + g_2)z^2 \quad (8.21)$$

Z drugiej strony (8.18) można zapisać następująco:

$$\Pi(e^{j\omega}) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} \right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j\omega} \right),$$

a zatem po podstawieniu $z = e^{j\omega}$

$$\Pi(z) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left(1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \quad (8.22)$$

Uwzględniając wzory (8.20), (8.21), (8.22) w równaniu (8.10) dostajemy tożsamość

$$\begin{aligned} [vz^2 + z(2g_1 + g_2) + (g_1 + g_2)] [v + z(2g_1 + g_2) + (g_1 + g_2)z^2] &\equiv \\ &\equiv \left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2}z^2 + z - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Z rozkładów:

$$\begin{aligned} z^2 + 3z + 1 &= 2(az + b)(a + bz) = 2abz^2 + 2(a^2 + b^2)z + 2ab, \\ -z^2 + 2z - 1 &= 2(Az + B)(A + Bz) = 2ABz^2 + 2(A^2 + B^2)z + 2AB. \end{aligned}$$

otrzymuje się dwa układy równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ab = 1 \\ 2(a^2 + b^2) = 3 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2AB = -1 \\ A^2 + B^2 = 1 \end{array} \right\}.$$

Pierwszy z nich ma cztery rozwiązania:

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right],$$

a drugi – dwa rozwiązania:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right].$$

Przyjmując do dalszych rachunków ostatnie pary rozwiązań otrzymujemy na podstawie (8.23)

$$\begin{aligned} vz^2 + z(2g_1 + g_2) + (g_1 + g_2) &\equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}z + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} \right) = \\ &= -\frac{1+\sqrt{5}}{4}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \end{aligned}$$

8. STABILNOŚĆ DYSKRETYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

skąd dostajemy

$$v = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad g^T = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{4} \quad \frac{\sqrt{5}-2}{2} \right].$$

Teraz drogą rozwiązania macierzowego równania Lapunowa stanowiącego pierwsze równanie układu (8.19) znajdujemy

$$H = \begin{bmatrix} \frac{5-2\sqrt{5}}{4} & \frac{3\sqrt{5}-7}{4} \\ \frac{3\sqrt{5}-7}{4} & \frac{21-9\sqrt{5}}{8} \end{bmatrix} = H^T > 0.$$

Łatwo sprawdzić, że pozostałe równania systemu (8.19) są także spełnione.

Z Twierdzenia 8.6.1 wynika, że zbiór $\{(0,0)\}$ jest **AS**, przy czym

$$\Omega_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x^T H x < \min_{c^T x = y_1} x^T H x = \frac{y_1^2}{c^T H^{-1} c} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

jest podzbiorem obszaru atrakcji tego zbioru. Na rysunku 8.3, str. 204, przedstawiono zbiór Ω_A . Zauważmy, że ponieważ $(-6, -4)$ jest punktem równowagi systemu (8.17), początek układu nie może być **GAS**.

8.7.2. Przykład 2

Układ równań różnicowych

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(i+1) = x_2(i) \\ x_2(i+1) = -0.1x_1(i) + x_2(i) + 0.1x_1^2(i) \end{array} \right\} \quad (8.24)$$

może być interpretowany jako system (8.13), w którym $n = 2$, $m = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K(x) = [x_1].$$

Zastosujemy Twierdzenie 8.6.1 do analizy tak interpretowanego układu (8.24). Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) obserwowalna.

Warunek (8.14) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : k_1 < x_1 < k_2\}$$

i wobec tego, aby zbiór ten był otwartym otoczeniem $0 \in \mathbb{R}^2$ musi być $k_1 < 0$, $k_2 > 0$. Ułatwienie weryfikacji warunków (8.15) i (8.16) osiągniemy przyjmując $k_1 = -k$, $k_2 = k > 0$. Nierówność częstotliwościowa (8.15) przyjmie teraz postać

$$1 - k^2 |G(e^{j\omega})|^2 \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad G(z) = c^T (A - zI)^{-1} b = \frac{-0.1}{z^2 - z + 0.1} .$$

Dążyć będziemy do uzyskania możliwie największego $k > 0$, przy którym nierówność ta będzie spełniona, gdyż wówczas zbiór $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < k\}$ będzie maksymalnie obszerny.

$$\begin{aligned} 1 - k^2 |G(e^{j\omega})|^2 &= 1 - \frac{0.01k^2}{0.4 \cos^2 \omega - 2.2 \cos \omega + 1.81} = \\ &= \frac{0.4 \cos^2 \omega - 2.2 \cos \omega + 1.81 - 0.01k^2}{0.4 \cos^2 \omega - 2.2 \cos \omega + 1.81} = \varphi(\cos \omega) . \end{aligned}$$

Po podstawieniu $p = \cos \omega$ stwierdzamy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym zachodzenia nierówności (8.15) jest, aby przedział $[-1, 1]$ zawierał się w obszarze, w którym trójmian kwadratowy $0.4p^2 - 2.2p + 1.81 - 0.01k^2$ przyjmuje nieujemne wartości. Stąd największym możliwym $k > 0$, przy którym ma to miejsce, jest $k = 1$ i wówczas

$$\varphi(\cos \omega) = \frac{0.4 \cos^2 \omega - 2.2 \cos \omega + 1.80}{0.4 \cos^2 \omega - 2.2 \cos \omega + 1.81} \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi] \quad (8.25)$$

Wielomian charakterystyczny macierzy $A + \mu bc^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 + 0.1\mu & 1 \end{bmatrix}$ jest postaci $\lambda^2 - \lambda + 0.1 - 0.1\mu$. Ma on zera w otwartym kole jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \in (-9, 1)$, a zatem

$$|\lambda(A + \mu bc^T)| < 1 \quad \forall \mu \in (-1, 1) ,$$

i warunek (8.16) jest spełniony. Ostatecznie zbiór Ω jest pasem $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1\}$.

Należy teraz wyznaczyć rozwiązanie układu równań Lurie

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H A - H + k^2 c c^T = -g g^T \\ A^T H b = -g v \\ 1 - b^T H b = v^2 \end{array} \right\} \quad (8.26)$$

Użyjemy w tym celu wzorów faktoryzacyjnych (8.9), (8.10), (8.11) i (8.12). Równanie (8.11) przyjmie postać

$$\Phi(z) = \frac{v \det(A - zI) - g^T \text{adj}(A - zI)b}{\det(A - zI)} = \frac{v z^2 + z(0.1g_2 - v) + 0.1(g_1 + v)}{z^2 - z + 0.1} \quad (8.27)$$

a stąd

$$\Phi^T(z^{-1}) = \Phi(z^{-1}) = \frac{z^2(0.1v + 0.1g_1) + z(0.1g_2 - v) + v}{1 - z + 0.1z^2} \quad (8.28)$$

Z drugiej strony (8.25) można zapisać następująco:

8. STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

$$\Pi(e^{j\omega}) = \frac{(e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 2)(e^{j\omega} + e^{-j\omega} - 9)}{10(e^{2j\omega} - e^{-j\omega} + 0.1)(e^{-2j\omega} - e^{-j\omega} + 0.1)} ,$$

a zatem

$$\Pi(z) = \frac{(z + z^{-1} - 2)(z + z^{-1} - 9)}{10(z^2 - z + 0.1)(z^{-2} - z^{-1} + 0.1)} = \frac{(-z^2 + 2z - 1)(-z^2 + 9z - 1)}{10(z^2 - z + 0.1)(0.1z^2 - z + 1)} \quad (8.29)$$

Uwzględniając wzory (8.27), (8.28), (8.29) w (8.10) otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned} & [vz^2 + z(0.1g_2 - v) + 0.1(g_1 + v)] [0.1z^2(v + g_1) + z(0.1g_2 - v) + v] \equiv \\ & \equiv \frac{1}{10} (-z^2 + 2z - 1) (-z^2 + 9z - 1) \end{aligned} \quad (8.30)$$

Dokonując rozkładów:

$$\begin{aligned} -z^2 + 9z - 1 &= 2(Az + B)(A + Bz) = 2ABz^2 + 2(A^2 + B^2)z + 2AB , \\ -z^2 + 2z - 1 &= 5(az + b)(a + bz) = 5abz^2 + 5(a^2 + b^2)z + 5ab \end{aligned}$$

otrzymujemy dwa układy równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2AB = -1 \\ 2(A^2 + B^2) = 9 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 5ab = -1 \\ 5(a^2 + b^2) = 2 \end{array} \right\} .$$

Pierwszy ma rozwiązania:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{11} + \sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{7} - \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{7} - \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{7} + \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} -\frac{\sqrt{11} + \sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right],$$

a drugi – ma dwa rozwiązania:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right] .$$

Przyjmując do dalszych rachunków pierwsze pary rozwiązań otrzymujemy na podstawie (8.30)

$$\begin{aligned} vz^2 + z(0.1g_2 - v) + 0.1(g_1 + v) &\equiv \frac{1}{2\sqrt{10}}(z - 1) \left[(\sqrt{11} + \sqrt{7})z + \sqrt{11} - \sqrt{7} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{11} + \sqrt{7}}{2\sqrt{10}}z^2 - \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{10}}z + \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{2\sqrt{10}} , \end{aligned}$$

skąd

$$v = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{7}}{2\sqrt{10}}, \quad g^T = \left[\frac{9\sqrt{11} - 11\sqrt{7}}{2\sqrt{10}} \quad \frac{\sqrt{70} - \sqrt{110}}{2} \right] \quad (8.31)$$

Podstawiając (8.31) i $k = 1$ w (8.26) znajdujemy

$$H = \begin{bmatrix} 45 - 5\sqrt{77} & 5\sqrt{77} - 45 \\ 5\sqrt{77} - 45 & 55 - 5\sqrt{77} \end{bmatrix} = H^T > 0 .$$

Z Twierdzenia 8.6.1 wynika, że zbiór $\{(0, 0)\}$ jest **AS**, a ponadto

$$\begin{aligned} \Omega_A &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x^T H x < \min_{c^T x = k} x^T H x = \frac{k^2 \operatorname{adj} H}{c^T \operatorname{adj} H c} = 5 - 5\sqrt{\frac{7}{11}} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : (45 - 5\sqrt{77})x_1^2 + (10\sqrt{77} - 90)x_1 x_2 + (55 - 5\sqrt{77})x_2^2 < 5 - 5\sqrt{\frac{7}{11}} \right\} \end{aligned}$$

jest podzbiorem obszaru atrakcji tego zbioru.

Przedstawiony wyżej sposób interpretacji układu (8.24), jako systemu postaci (8.13), nie jest jedynym możliwym. Rozpatrzmy inny „skrajny” sposób interpretacji (8.24) jako systemu (8.13):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K(x) = [0.1 - 0.1x_1] .$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) jest obserwowalna.

Warunek (8.14) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : k_1 < 0.1 - 0.1x_1 < k_2\}$$

i wobec tego musi być $k_1 < 0.1$, $k_2 > 0.1$, aby zbiór ten był otwartym otoczeniem $0 \in \mathbb{R}^2$. Ułatwienie weryfikacji warunków (8.15), (8.16) osiągniemy przyjmując a priori $k_1 = 0$, $k_2 = k$, przy czym powinno być $k > 0.1$. Nierówność częstotliwościowa (8.15) przyjmuje teraz postać

$$1 + k \operatorname{Re} G(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad e^{j\omega} \notin \lambda(A) ,$$

gdzie

$$G(z) = c^T (A - zI)^{-1} b = \frac{1}{z(z-1)} .$$

Dążyć będziemy do uzyskania możliwie największego $k > 0.1$, przy którym nierówność ta będzie spełniona, gdyż wówczas zbiór $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < 0.1 - 0.1x_1 < k\}$ będzie maksymalnie obszerny. Dla $\omega \neq 0, 2\pi$ mamy

$$1 + k \operatorname{Re} G(e^{j\omega}) = \frac{2k \cos^2 \omega - (k+2) \cos \omega + (2-k)}{2(1 - \cos \omega)} = -k \cos \omega - \frac{k}{2} + 1 = \varphi(\cos \omega) .$$

8. STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Po podstawieniu $p = \cos \omega$ stwierdzamy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym zachodzenia nierówności (8.15) jest, aby przedział $[-1, 1]$ zawierał się w obszarze, w którym funkcja afiniczna $-kp - \frac{k}{2} + 1$ przyjmuje nieujemne wartości. Największym możliwym $k > 0.1$, przy którym ma to miejsce, jest $k = \frac{2}{3}$. Wtedy

$$\varphi(\cos \omega) = \frac{2}{3}(1 - \cos \omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in (0, 2\pi) \quad (8.32)$$

Wielomian charakterystyczny macierzy $A + \mu bc^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}$ jest postaci $\lambda^2 - \lambda + \mu$. Ma on zera w otwartym kole jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \in (0, 1)$, a zatem

$$|\lambda(A + \mu bc^T)| < 1 \quad \forall \mu \in \left(0, \frac{2}{3}\right),$$

i warunek (8.16) jest spełniony. Przy okazji okazało się, że wybór $k_1 = 0$ był optymalny w tym sensie, że nie można zmniejszyć k_1 bez naruszenia warunku (8.16). Ostatecznie zbiór Ω jest pasem $\{x \in \mathbb{R}^2 : -\frac{17}{3} < x_1 < 1\}$.

Należy teraz wyznaczyć rozwiązanie układu równań Lurie

$$\begin{cases} A^T H A - A &= -g g^T \\ A^T H b + \frac{k}{2} c &= -g v \\ 1 - b^T H b &= v^2 \end{cases} \quad (8.33)$$

Użyjemy w tym celu wzorów faktoryzacyjnych (8.9), (8.10), (8.11) i (8.12). Wzór (8.11) przyjmie postać

$$\Phi(z) = \frac{v \det(A - zI) - g^T \text{adj}(A - zI)b}{\det(A - zI)} = \frac{v z^2 + (-g_2 - v)z - g_1}{z^2 - z} \quad (8.34)$$

a stąd

$$\Phi^T(z^{-1}) = \Phi(z) = \frac{-g_1 z^2 - z(v + g_2) + v}{1 - z} \quad (8.35)$$

Z drugiej strony (8.32) można zapisać następująco:

$$\Pi(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} \frac{(e^{2j\omega} - e^{j\omega})^2 (e^{-2j\omega} - e^{-j\omega})^2}{(e^{2j\omega} - e^{j\omega})(e^{-2j\omega} - e^{-j\omega})},$$

a zatem

$$\Pi(z) = \frac{1}{3} \frac{(z^2 - z)^2 (z^{-2} - z^{-1})^2}{(z^2 - z)(z^{-2} - z^{-1})} = \frac{1}{3} \frac{(z - 1)^2 (1 - z)^2}{(z^2 - z)(1 - z)} \quad (8.36)$$

Uwzględniając wzory (8.34), (8.35), (8.36) w (8.10) otrzymujemy tożsamość

$$[vz^2 - z(g_2 + v) - g_1] [-g_1z^2 - z(v + g_2) + v] \equiv \frac{1}{3}(z-1)^2(1-z)^2 .$$

Otrzymujemy stąd natychmiastowo tożsamość

$$vz^2 - z(g_2 + v) - g_1 = \frac{z^2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}z + \frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

z której wynika, że:

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad g^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} .$$

Po podstawieniu tych danych i $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$ do (8.33) z łatwością znajdujemy

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = H^T > 0 .$$

Z Twierdzenia 8.6.1 wynika, że zbiór $\{(0, 0)\}$ jest **AS** stabilny, a ponadto

$$\begin{aligned} \Omega_{A_1} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x^T H x < \min_{c^T x = x_1 = -\frac{17}{3}, c^T x = 1} x^T H x = \frac{\det H}{c^T \text{adj} H c} = \frac{1}{6} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 < 1 \right\} \end{aligned}$$

jest podzbiorem obszaru atrakcji tego zbioru.

Twierdzenie 8.3.6 może być także użyte do oszacowania zbioru $A(\{0\})$. W tym celu należy system (8.24) zinterpretować jako układ dyskretny układ Lurie (8.5) z:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F(y) = 0.1y^2 .$$

Mamy teraz: $|\lambda(A)| < 1$, (A, c^T) – para obserwowalna, $F(0) = F'(0) = 0$, a zatem są spełnione założenia Twierdzenia 8.3.6. Rozwiązanie macierzowego równania Lapunowa $A^T H A - H = -cc^T$ ma postać

$$H = \frac{100}{189} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} = H^T > 0 .$$

Łatwo stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} &\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2 \left[\frac{F(c^T x)}{x^T c c^T x} \right] b^T H A x - b^T H b \left[\frac{F(c^T x)}{c^T x} \right]^2 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 189 + 22x_1 - 200x_2 - 11x_1^2 = 0 \right\} . \end{aligned}$$

8. STABILNOŚĆ DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Celem wyznaczenia obszaru atrakcji asymptotycznie stabilnego zbioru $\{(0, 0)\}$, należy wyliczyć

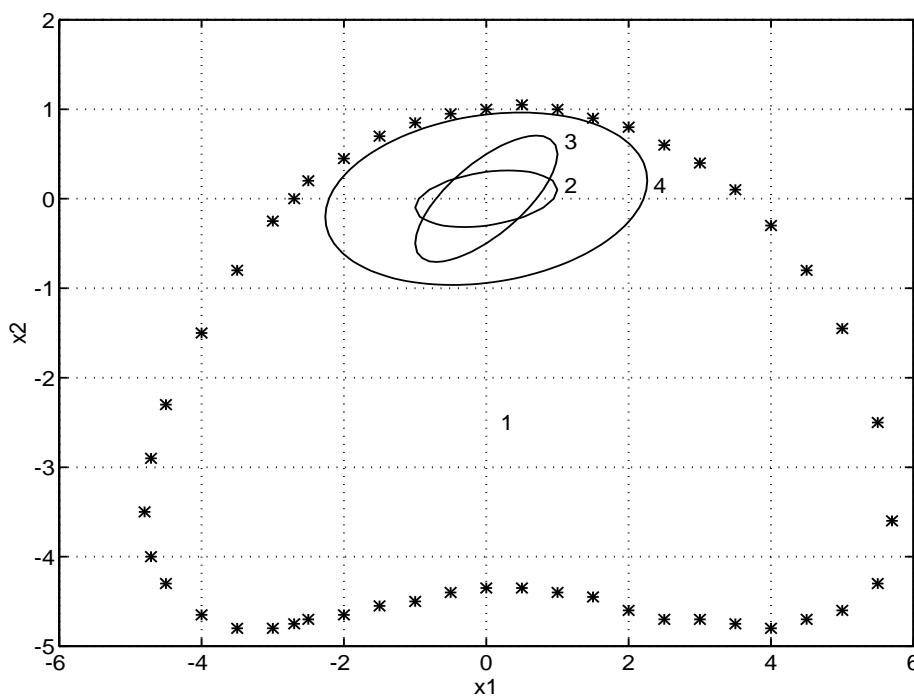
$$l = \min_{\{x \in \mathbb{R}^2: 189+22x_1-200x_2-11x_1^2=0\}} (2x_1^2 - 2x_1x_2 + 11x_2^2) = 9.7726339 .$$

Optimum jest osiągane w punkcie $(-0.25354113, 0.9135749)$. Ostatecznie

$$\Omega_{A_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 11x_2^2 < 9.7726339\}$$

jest podzbiorem obszaru atrakcji zbioru $\{(0, 0)\}$. Zauważmy, że punkt $(1, 1)$ jest punktem równowagi i dlatego początek układu nie może być **GAS**.

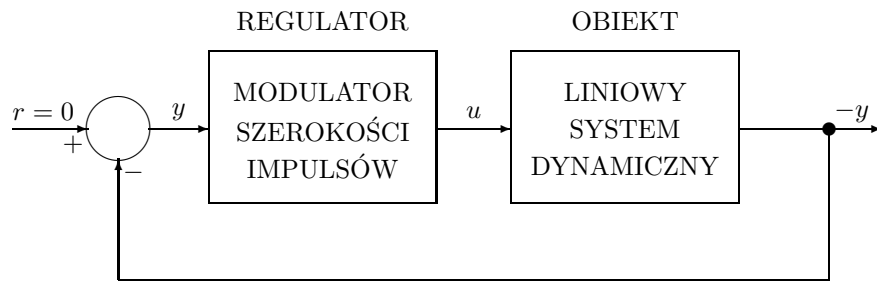
Na rysunku 8.4 dokonano porównania estymat obszaru atrakcji w postaci zbiorów Ω_A , Ω_{A_1} , Ω_{A_2} – wyznaczonych wyżej z pełnym zbiorem $A(\{(0, 0)\})$ przytaczanym za pracą [92].



Rysunek 8.4. Porównanie estymat obszaru atrakcji dla systemu (8.24): 1 – dokładny obszar atrakcji $A(\{0\})$, 2 – estymata Ω_A , 3 – estymata Ω_{A_1} , 4 – estymata Ω_{A_2}

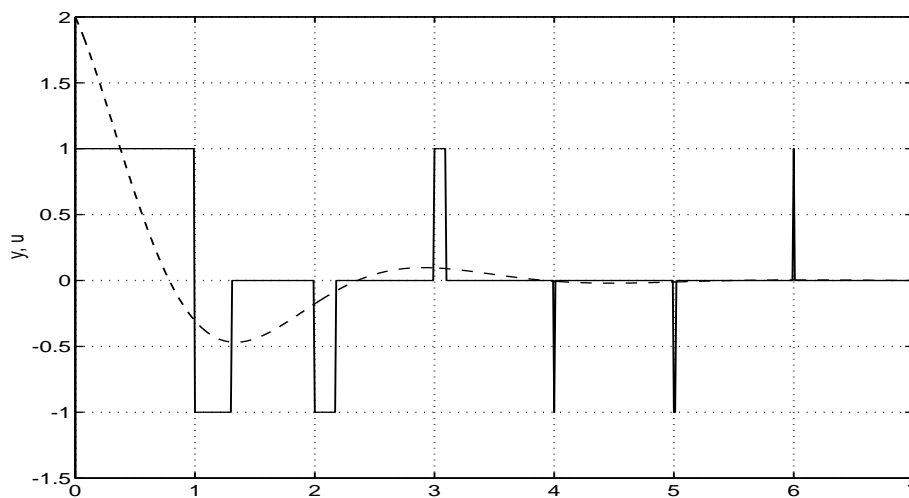
8.7.3. Przykład 3

Rozważmy impulsowy układ regulacji automatycznej przedstawiony na rysunku 8.5.



Rysunek 8.5. Schemat blokowy impulsowego układu regulacji automatycznej

Rysunek 8.6 objaśnia logikę działania tego typu regulatora.



Rysunek 8.6. Działanie regulatora: linia ciągła – sterowanie u , linia przerywana – uchyb y

Niech $k \in \mathbb{Z}^*$ będzie zmienną indeksującą kolejne impulsy. Wtedy regulator opisany jest równaniem

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} M \operatorname{sign} [y(kT)], & \text{gdy } kT \leq t \leq kT + \tau[y(kT)] \\ 0, & \text{gdy } kT + \tau[y(kT)] < t < kT + T \end{array} \right\} \quad (8.37)$$

z funkcją τ zdefiniowaną następująco:

$$\tau(y) = \left\{ \begin{array}{ll} T, & \text{gdy } |y| \geq T/\beta \\ \beta |y|, & \text{gdy } |y| \leq T/\beta \end{array} \right\}, \quad T, \beta > 0 .$$

8. STABILNOŚĆ DYSKRETYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Obiekt opisany jest układem równań stanu

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A_1 \hat{x} + b_1 u \\ y &= c_1^T \hat{x} \end{cases} \quad (8.38)$$

Podstawiając $t_0 = kT$, $t = kT + \tau[y(kT)]$ w formule wariacji stałych dla (8.38),

$$\hat{x}(t; t_0, \hat{x}(t_0), u) = e^{(t-t_0)A_1} \hat{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A_1} b_1 u(s) ds \quad (8.39)$$

dostajemy

$$\hat{x}(kT + \tau) = e^{\tau A_1} \left\{ \hat{x}(kT) + \left[\int_0^\tau e^{-pA_1} dp \right] b_1 M \text{sign } y(kT) \right\} \quad (8.40)$$

Teraz podstawiając $t_0 = kT + \tau[y(kT)]$, $t = kT + T$ w (8.39) i uwzględniając (8.40) otrzymujemy

$$\hat{x}(kT + T) = e^{TA_1} \hat{x}(kT) + e^{TA_1} \left[\int_0^\tau e^{-pA_1} dp \right] b_1 M \text{sign } [c_1^T \hat{x}(kT)] \quad (8.41)$$

Układ (8.41) może być interpretowany jako system (8.13), w którym:

$$x(k) = \hat{x}(kT), \quad A = e^{TA_1}, \quad B = I, \quad C = \underbrace{\begin{bmatrix} c & c & \dots & c \end{bmatrix}}_{n \text{ kolumn}} \quad (8.42)$$

a $K(x)$ jest macierzą diagonalną utworzoną ze składowych wektora

$$\frac{M}{|c_1^T x|} e^{TA_1} \left[\int_0^{\tau(c_1^T x)} e^{-pA_1} dp \right] b_1 .$$

W dalszym ciągu rozważony zostanie przypadek jednowymiarowego systemu (8.38) z $A_1 = -a$, $b_1 = -1$, $c_1 = b$, $a, b > 0$. Mamy wtedy:

$$A = e^{-aT}, \quad B = 1, \quad C = b, \quad K(\hat{x}) = \frac{M}{b|\hat{x}|a} e^{-aT} \left[e^{a\tau(b\hat{x})} - 1 \right] \quad (8.43)$$

a system (8.41) przyjmie postać

$$\hat{x}(kT + T) = e^{-aT} \hat{x}(kT) - \frac{M e^{-aT}}{a} \left\{ e^{a\tau[b\hat{x}(kT)]} - 1 \right\} \text{sign } \hat{x}(kT) \quad (8.44)$$

Nietrudno zauważyć, że 0 jest jedynym punktem równowagi systemu (8.44). Wobec (8.42), nierówność częstotliwościowa (8.15) przyjmuje postać

$$1 + \frac{K_1 + K_2}{2} \frac{b}{e^{-aT} - e^{j\omega T}} + \frac{K_1 + K_2}{2} \frac{b}{e^{-aT} - e^{-j\omega T}} + \frac{b}{e^{-aT} - e^{-j\omega T}} K_1 K_2 \frac{b}{e^{-aT} - e^{j\omega T}} \geq 0 \quad \forall \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{T} \right] .$$

Jeżeli w nierówności częstotliwościowej przyjąć $K_1 = \frac{-1 - e^{-aT}}{b}$, $K_2 = \frac{1 - e^{-aT}}{b}$, to jej lewa strona jest tożsamościowo równa zero, a więc zachodzi (8.15). Założenie (8.14) będzie teraz spełnione, gdy w pewnym otwartym otoczeniu 0 będą zachodziły nierówności

$$K_1 = \frac{-1 - e^{-aT}}{b} < K(\hat{x}) = -\frac{Me^{-aT}}{ab|\hat{x}|} [e^{a\tau(b\hat{x})} - 1] < \frac{1 - e^{-aT}}{b} = K_2 .$$

Jest to równoważne żądaniu, aby na pewnym otwartym otoczeniu zera zachodziła nierówność

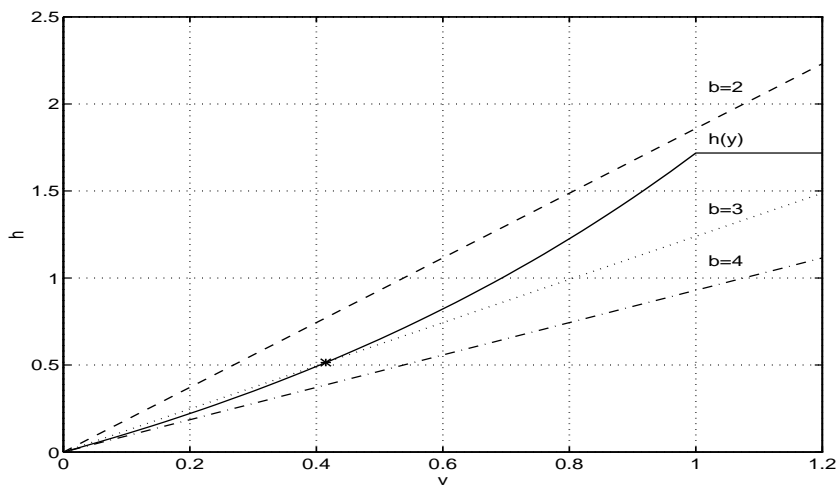
$$h(y) := e^{a\tau(y)} - 1 < \frac{a}{Mb} (e^{aT} + 1) |y|, \quad y \neq 0 \quad (8.45)$$

Dyskusja nierówności (8.45) prowadzi do poniższych konkluzji.

- 1°. Jeżeli $Mb\beta < \frac{\delta(e^\delta + 1)}{e^\delta - 1}$, $\delta = aT$ to zbiór $\{0\}$ w systemie (8.44) jest **GAS**.
- 2°. Jeżeli $Mb\beta \in \left[\frac{\delta(e^\delta + 1)}{e^\delta - 1}, e^\delta + 1 \right)$, $\delta = aT$ (zauważmy, że $\frac{\delta(e^\delta + 1)}{e^\delta - 1} < e^\delta + 1$ dla dowolnej dodatniej liczby δ co wynika z elementarnej nierówności $1 + \delta < e^\delta$ zachodzącej również dla dowolnej dodatniej liczby δ) to zbiór $\{0\}$ w systemie (8.44) jest **AS**, a jego obszar atrakcji jest przedziałem $A(\{0\}) = (-y^*/b, y^*/b)$, gdzie y^* jest najmniejszym, dodatnim rozwiązaniem równania

$$e^{a\tau(y)} - 1 = \frac{a}{Mb} (e^{aT} + 1) y .$$

- 3°. Jeżeli $Mb\beta \geq e^\delta + 1$, $\delta = aT$ to założenie (8.14) nie jest spełnione.



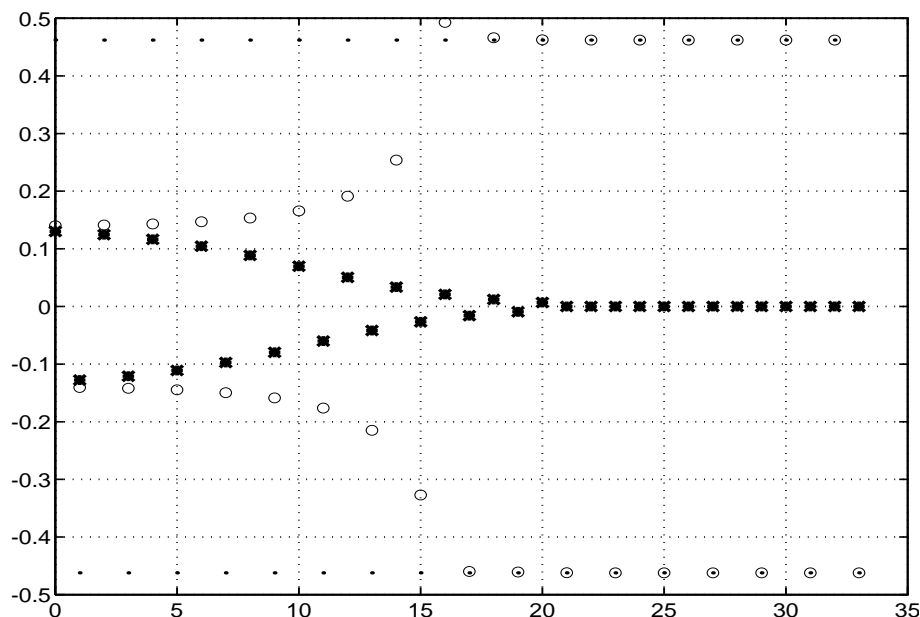
Rysunek 8.7. Dyskusja graficzna warunków stabilności

8. STABILNOŚĆ DYSKRETYNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Rysunek 8.7 ilustruje powyższą dyskusję dla $M = T = a = \beta = \delta = 1$ oraz $b = 2$ (przypadek **1°**), $b = 3$ (przypadek **2°**) i $b = 4$ (przypadek **3°**). Dla $b = 3$ obszarem atrakcji zerowego punktu równowagi jest przedział $A(\{0\}) = (-0.13832297, 0.13832297)$. Rozwiązania startujące spoza zbioru $A(\{0\})$ zbiegają do trajektorii rozwiązania okresowego

$$\hat{x}(k) = (-1)^k \frac{e-1}{e+1} \quad (8.46)$$

Na rysunku 8.8 przedstawiono trajektorie układu (8.43) dla $M = T = a = \beta = \delta = 1$ i $b = 3$.



Rysunek 8.8. Rozwiązania układu (8.43) dla różnych warunków początkowych

Rozwiązanie startujące z warunku początkowego $x(0) = 0.13 \in A(\{0\})$ jest oznaczone „*”, a rozwiązanie startujące z $x(0) = 0.14 \in \mathbb{R} \setminus A(\{0\})$ jest oznaczone „o”. Dąży ono do trajektorii rozwiązania okresowego (8.46), zobrazowanego ciągiem punktów.

Przykłady wielowymiarowe wymagają pomocy komputera. Zostały one nieco inaczej omówione w pracy [91]. Twierdzenie 8.6.1 jest ogólniejsze od używanego tamże twierdzenia dotyczącego globalnej asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej, co umożliwia uogólnienie rezultatów pracy [91]. Nie trzeba też przeprowadzać procedury przesuwania biegunów systemu, koniecznej w przypadku stosowania wyników pracy [91].

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

9.1. TEORIA CRANDALLA–LIGGETTA–MIYADERY

Niech H będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definicja 9.1.1. Zbiór (relację) $A \subset H \times H$ nazywamy *operatorem wielowartościowym*. Zbiory:

$$\begin{aligned} Ax &= \{y \in H : (x, y) \in A\} , \\ D(A) &= \{x \in H : Ax \neq \emptyset\} = \{x \in H : \exists y \in H : (x, y) \in A\} , \\ R(A) &= \bigcup_{x \in D(A)} Ax = \{y \in H : \exists x \in H : (x, y) \in A\} \end{aligned}$$

nazywamy odpowiednio: *wartością* A w punkcie x , *dziedzina* operatora A , *zbiorem wartości* A .

Definicja 9.1.2 (Działania na operatorach wielowartościowych). Niech A, B będą operatorami wielowartościowymi, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sumą $A + B$ operatorów A, B nazywamy operator wielowartościowy:

$$A + B = \{(x, y + z) : y \in Ax, z \in Bx\}, \quad D(A + B) = D(A) \cap D(B) .$$

Iloczynem A przez liczbę λ nazywamy operator wielowartościowy

$$\lambda A = \{(x, \lambda y) : y \in Ax\} .$$

Operator wielowartościowy

$$A^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in A\}, \quad D(A^{-1}) = R(A)$$

nazywamy *odwrotnością* operatora A .

Kluczowym, pojęciem teorii Crandalla–Liggetta–Miyadery jest pojęcie operatora dyssypatywnego.

Definicja 9.1.3. Operator wielowartościowy A nazywamy *dyssypatywnym* jeśli:

$$\forall x_i \in D(A), \quad \forall y_i \in Ax_i, \quad i = 1, 2 \quad \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \leq 0 .$$

Dyssypatywność operatora A nie jest pojęciem topologicznym i zależy od wyboru iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$ w H .

Definicja 9.1.4. Niech $C \subset H$. Jednoparametrową rodzinę $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ odwzorowań $S(t) : C \ni x \mapsto S(t)x \in C$, spełniającą warunki:

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

(i) $S(t + \tau) = S(t)S(\tau)$ dla wszystkich $\tau, t \geq 0$,

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = S(0)x = x$ dla każdego $x \in C$

nazywamy *semigrupą (półgrupą)* na C .

Jeżeli dodatkowo $S(t)(\cdot)$ spełnia warunek

(iii) istnieje $\omega \in \mathbb{R}$ taka, że $\|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{\omega t} \|x - y\|$ dla wszystkich $x, y \in C$ i każdego $t \geq 0$

to semigrupę $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ nazywamy *semigrupą ω -quasikontrakcji* na C .

Głównym wynikiem teorii jest następujący rezultat [29], [31].

Twierdzenie 9.1.5 (Crandall–Liggett). Niech A będzie operatorem wielowartościowym w przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Przypuśćmy, że:

(i) istnieje $\omega \in \mathbb{R}$, dla której $-(A + \omega I)$ jest operatorem dyssypatywnym,

(ii) istnieje $\lambda_0 > 0$ taka, że $\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$ dla dowolnej $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Wtedy eksponencjalna formuła Hille'a

$$S(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x, \quad x \in \overline{D(A)}, \quad t \geq 0$$

poprawnie definiuje semigrupę ω -quasikontrakcji na $\overline{D(A)}$. Istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ i dowolnego $x \in D(A)$ problem początkowy

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\varepsilon} [x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t - \varepsilon)] + Ax_\varepsilon(t) \ni 0, & t \geq \varepsilon \\ x_\varepsilon(t) = x, & \varepsilon > t \geq 0 \end{array} \right\}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x_\varepsilon(\cdot)$ określone na $[0, \infty)$ i $x_\varepsilon(t) \in D(A)$ dla dowolnego $t \geq 0$. Więcej, dla każdego ustalonego $x \in D(A)$ mamy

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} x_\varepsilon(t) = S(t)x$$

niemal jednostajnie względem $t \geq 0$.

Propozycja 9.1.6. Przy założeniach i oznaczeniach jak w Twierdzeniu 9.1.5 trójka $(\overline{D(A)}, \mathbb{R}^*, \Pi)$, gdzie:

$$\Pi(t, x) := S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x, \quad x \in \overline{D(A)}, \quad t \in \mathbb{R}^*$$

definiuje **CSDS** na przestrzeni $\overline{D(A)}$ z metryką ρ , indukowaną iloczynem skalarnym w H , zacieśnioną do $\overline{D(A)}$.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 9.1.5 odwzorowanie Π jest poprawnie określone. Dla dowodu ciągłości Π w punkcie (t, x) wybieramy ciąg $\{(t_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $(t_n, x_n) \rightarrow (t, x)$. Wtedy oczywiście $t_n \rightarrow t$, $x_n \rightarrow x$. Dzięki aksjomatowi (iii) w Definicji 9.1.4 mamy

$$\begin{aligned} \|\Pi(t_n, x_n) - \Pi(t, x)\| &= \|[S(t_n)x_n - S(t_n)x] + [S(t_n)x - S(t)x]\| \leq \\ &\leq e^{\omega t_n} \|x_n - x\| + \|S(t_n)x - S(t)x\| \end{aligned} \quad (9.1)$$

Ciąg $\{e^{\omega t_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, jako ciąg zbieżny (dzięki ciągłości funkcji $u \mapsto e^{\omega u}$). Pierwszy człon w prawej stronie nierówności (9.1) zmierza do zera, a wobec wynikającej z definicji 9.1.4, ciągłości funkcji $t \mapsto S(t)x$ także i drugi człon w prawej stronie nierówności (9.1) zmierza do zera. W ten sposób pokazaliśmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Pi(t_n, x_n) - \Pi(t, x)\| = 0 \text{ ,}$$

a zatem odwzorowanie Π jest ciągle w punkcie (t, x) .

Ponieważ

$$\Pi(0, x) = S(0)x = x \quad \forall x \in \overline{D(A)}$$

więc odwzorowanie Π spełnia aksjomat identyczności.

Aksjomat półgrupy zachodzi także, gdyż

$$\Pi(t, \Pi(s, x)) = S(t)S(s)x = S(t+s)x = \Pi(t+s, x) \quad \forall x \in \overline{D(A)}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^* \text{ .}$$

□

Definicja 9.1.7. Niech H będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a $A \subset H \times H$ operatorem wielowartościowym. Rozważmy *abstrakcyjny problem początkowy (AVIP)* dla równania różniczkowego z operatorem A ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + Ax \ni 0, \quad t > 0 \\ x(0) = x_0 \in D(A) \end{array} \right\} \quad (9.2)$$

Funkcję $x : [0, T] \ni t \mapsto x(t) \in H$ nazywamy *mocnym rozwiązaniem AVIP* (9.2) na $[0, T]$, $T \in (0, \infty]$ jeśli:

- (i) x jest lipschitzowsko ciągła na $[0, T]$, przy czym warunek Lipschitza dla x jest spełniony na dowolnym zwartym podzbiórze przedziału $[0, T]$,
- (ii) x jest mocno-różniczkowalna prawie wszędzie na $(0, T)$,
- (iii) $x(t) \in D(A)$ dla prawie wszystkich $t \in (0, T)$,
- (iv) $x(0) = x_0$ i x spełnia pierwsze równanie układu (9.2) prawie wszędzie na $(0, T)$.

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

Definicja 9.1.8. Operator wielowartościowy A nazywamy domkniętym jeśli zachodzi następująca implikacja:

$$[x_n \in D(A), y_n \in Ax_n : x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y] \implies (x, y) \in A .$$

Kolejne twierdzenie charakteryzuje związek półgrup ω -quasikontrakcji z **AIVP** (9.2). Dowody można znaleźć w [29], [93].

Twierdzenie 9.1.9 (Crandalla–Miyadery). Niech będą spełnione wszystkie założenia Twierdzenia 9.1.5. Załóżmy dodatkowo, że A jest domknięty. Wtedy:

$$x : [0, \infty) \ni t \mapsto x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x_0, \quad x_0 \in D(A)$$

jest mocnym rozwiązaniem **AIVP** na $[0, \infty)$.

Znaczenie teorii Crandalla–Liggetta–Miyadery polega na tym, że z jednej strony jest ona uogólnieniem teorii liniowych C_0 -półgrup, a z drugiej strony pokazuje, że do analizy rozwiązań abstrakcyjnego problemu początkowego (9.2) przydatne są metody teorii ciągłych układów semidynamicznych.

9.2. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

W zagadnieniach sterowania czasowo-suboptymalnego spotyka się układy Lurie

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + ub \\ y = d^T x \\ u = \text{sign } y \end{array} \right\} \quad (9.3)$$

$A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $b, d \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ z nieliniowością typu przekaźnikowego

$$\text{sign } y := \left\{ \begin{array}{ll} -1, & \text{gdy } y < 0 \\ \sigma \in [-1, 1], & \text{gdy } y = 0 \\ 1, & \text{gdy } y > 0 \end{array} \right\} \quad (9.4)$$

Analiza dynamiczna tej klasy nieliniowych wymaga rozważenia problemu początkowego

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + b \text{sign}[d^T x(t)], \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \quad (9.5)$$

W miejsce funkcji $\text{sign}(\cdot)$ definiowanej formułą (9.4) wprowadzamy operator wielowartościowy $\text{sign}(\cdot)$ w \mathbb{R}^2 ,

$$\text{sign } y := \begin{cases} -1, & \text{gdy } y < 0 \\ [-1, 1], & \text{gdy } y = 0 \\ 1, & \text{gdy } y > 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

Odwzorowanie $\mathbb{R} \ni y \mapsto \text{sign } y \in \mathcal{T}$, gdzie

$$\mathcal{T} = \{Z \subset \mathbb{R} : Z \neq \emptyset, Z \text{ jest zbiorem zwartym i wypukłym}\} .$$

Odwzorowanie to jest ciągłe, jeżeli w \mathcal{T} wprowadzić topologię indukowaną przez metrykę Hausdorffa [35, str. 363].

Każde mocne rozwiązanie problemu początkowego

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Bx(t) \ni 0, & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (9.7)$$

gdzie B jest operatorem wielowartościowym,

$$B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad Bx = -Ax - b \text{ sign}(d^T x), \quad D(B) = \mathbb{R}^n \quad (9.8)$$

jest rozwiązaniem w sensie Filippowa [128] problemu początkowego (9.5) i na odwrót.

Z pomocą teorii Crandalla–Liggetta–Miyadery ustalimy fakt generacji **CSDS** przez rozwiązania układu (9.7), (9.8). Następnie zastosujemy teorię **CSDS** dla zbadania stabilności tego układu.

9.3. WŁASNOŚCI OPERATORA B

9.3.1. Dyssypatywność operatora $-(B + \omega I)$

Określmy warunki dyssypatywności operatora $-(B + \omega I)$. Niech $x_i \in D(B) = \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, $y_i \in -Bx_i$, $i = 1, 2$. Ponieważ

$$y_i \in -Bx_i \iff y_i = Ax_i + \varepsilon_i b, \quad \varepsilon_i \in \text{sign}(d^T x_i), \quad i = 1, 2 ,$$

a dowolny iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n jest postaci

$$\langle x, y \rangle = x^T H y, \quad H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n), \quad H = H^T > 0 \quad (9.9)$$

więc

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2)^T H_0 (x_1 - x_2) &= (Ax_1 + \varepsilon_1 b - Ax_2 - \varepsilon_2 b)^T H_0 (x_1 - x_2) = \\ &= \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^T (A^T H_0 + H_0 A) (x_1 - x_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) b^T H_0 (x_1 - x_2) . \end{aligned}$$

Jeżeli równanie

$$H_0 b + d = 0 \quad (9.10)$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

posiada rozwiązanie $H_0 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = H_0^T > 0$ to wobec tego, że operator wielowartościowy $-\text{sign}(\cdot)$ jest dyssypatywny względem standardowego iloczynu skalarnego w \mathbb{R} , mamy

$$(y_1 - y_2)^T H_0 (x_1 - x_2) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A^T H_0 + H_0 A) (x_1 - x_2)^T (x_1 - x_2) ,$$

gdzie $\lambda_{\max}(A^T H_0 + H_0 A)$ oznacza największą wartość własną macierzy $A^T H_0 + H_0 A$. Korzystając z nierówności Rayleigha

$$\lambda_{\min}(H_0) u^T u \leq u^T H_0 u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n ,$$

przy czym $\lambda_{\min}(H_0)$ oznacza najmniejszą wartość własną macierzy H_0 , otrzymujemy

$$(y_1 - y_2)^T H_0 (x_1 - x_2) \leq \omega \|x_1 - x_2\|^2 ,$$

gdzie

$$\omega = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda_{\max}(A^T H_0 + H_0 A)}{2\lambda_{\min}(H_0)} \geq 0, & \text{gd}y \quad \lambda_{\max}(A^T H_0 + H_0 A) \geq 0 \\ \frac{\lambda_{\max}(A^T H_0 + H_0 A)}{2\lambda_{\max}(H_0)} \leq 0, & \text{gd}y \quad \lambda_{\max}(A^T H_0 + H_0 A) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (9.11)$$

Zgodnie z definicją 9.1.3 operator $-(B + \omega I)$ jest dyssypatywny względem iloczynu skalarnego (9.9) jeśli równanie (9.10) posiada rozwiązanie $H_0 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H_0 > 0$. Warunek konieczny i dostateczny istnienia takiego rozwiązania podaje poniższy lemat.

Lemat 9.3.1. Nierówność

$$d^T b < 0 \quad (9.12)$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby równanie (9.10) posiadało rozwiązanie $H_0 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = H_0^T > 0$.

Dowód. Konieczność. Niech $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = H_0^T > 0$ będzie rozwiązaniem równania (9.10). Wtedy $H_0 b = -d$, a stąd ponieważ $b \neq 0$ mamy $0 < b^T H_0 b = -d^T b$.

Dostateczność. Zakładamy, że (9.12) zachodzi. Wykorzystamy następujący wynik [88, Lemat 4],

Lemat 9.3.2 (Meyer). Jeżeli $\gamma \geq 0$, $\text{Re } \lambda(P) < 0$ oraz

$$\gamma + 2 \text{Re } h^T (P - i\omega T)^{-1} q > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} ,$$

to istnieją $H_0, Q \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = H_0^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ oraz $g \in \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\left\{ \begin{array}{l} P^T H_0 + H_0 P = -gg^T - Q \\ H_0 q + h = -\sqrt{\gamma} g \end{array} \right\} .$$

Podstawmy w lemacie $P = -I$, $\gamma = 0$, $h = d$, $q = b$. Wówczas z jednej strony $\operatorname{Re} \lambda(P) < 0$, a z drugiej strony na mocy (9.12)

$$\gamma + 2 \operatorname{Re} h^T (P - \omega I)^{-1} q = 2 \operatorname{Re} d^T (-I - \omega I)^{-1} b = -2d^T b \frac{1}{1 + \omega^2} > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Z tezy lematu Meyera wynika istnienie $H_0, Q \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = H_0^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ oraz $g \in \mathbb{R}^n$ takich, że

$$2H_0 = gg^T + Q, \quad H_0 b + d = 0 ,$$

co w szczególności oznacza, że (9.10) posiada pożądane rozwiązanie. \square

Zauważmy, że $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = -d^T b$, gdzie

$$G(s) = d^T (A - sI)^{-1} b \tag{9.13}$$

jest transmitancją części liniowej układu (9.3).

Uwaga 9.3.3. Nierówność (9.12) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym występowania *ruchów ślizgowych* w układzie rzeczywistym, którego wyidealizowanym modelem matematycznym jest (9.3), tj. w układzie z przekaźnikiem wykazującym niewielką *histerezę*. Ruchy ślizgowe, o ile występują, są zlokalizowane w zbiorze

$$SM = \{x \in \mathbb{R}^n : |d^T Ax| < |d^T b|, \quad d^T x = 0\} .$$

9.3.2. Domkniętość operatora B

Wykażemy, że operator (9.8) jest domknięty. Niech $x_n \rightarrow x$ oraz $y_n \in Bx_n = -Ax_n - b \operatorname{sign}(d^T x_n)$, $y_n \rightarrow y$. Zachodzą następujące przypadki:

1°. $x \in \{u : d^T u > 0\}$.

Wówczas dla prawie wszystkich n mamy $x_n \in \{u : d^T u > 0\}$, stąd

$$\begin{array}{ccc} y_n & = & -Ax_n - b \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & = & -Ax - b \operatorname{sign}(d^T x) \implies [x, y] \in B . \end{array}$$

2°. $x \in \{u : d^T u < 0\}$.

Wówczas dla prawie wszystkich n mamy $x_n \in \{u : d^T u < 0\}$, stąd

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

$$\begin{array}{rcl} y_n & = & -Ax_n + b \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & = & -Ax - b \operatorname{sign}(d^T x) \implies [x, y] \in B . \end{array}$$

3°. $x \in \{u : d^T u = 0\}$.

Ze względu na to, że ciąg y_n jest zbieżny, musi zachodzić jedna z trzech możliwości:

- (a) $x_n \in \{u : d^T u > 0\}$ dla prawie wszystkich n ,
- (b) $x_n \in \{u : d^T u < 0\}$ dla prawie wszystkich n ,
- (c) $x_n \in \{u : d^T u = 0\}$ dla prawie wszystkich n .

Zbiory:

$$\begin{aligned} \operatorname{graph} h^+(u) &= \left\{ \begin{array}{ll} +1, & \text{gdy } u \geq 0 \\ -1, & \text{gdy } u < 0 \end{array} \right\} , \\ \operatorname{graph} h^-(u) &= \left\{ \begin{array}{ll} +1, & \text{gdy } u > 0 \\ -1, & \text{gdy } u \leq 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

są wykresami funkcji prawo-lewostronnie ciągłej, określonej na \mathbb{R} i zawierają się w zbiorze $\operatorname{sign}(\cdot)$ zdefiniowanym w (9.6), stąd:

Ad (a)

$$\begin{array}{rcl} y_n & = & -Ax_n - bh^+(d^T x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & = & -Ax - b \in -Ax - b \operatorname{sign}(d^T x) \implies [x, y] \in B , \end{array}$$

Ad (b)

$$\begin{array}{rcl} y_n & = & -Ax_n - bh^-(d^T x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & = & -Ax - b \in -Ax - b \operatorname{sign}(d^T x) \implies [x, y] \in B , \end{array}$$

Ad (c) $y_n = -Ax_n - \varepsilon_n b$, $\varepsilon_n \in [-1, 1]$, $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon$. Oczywiście musi być $\varepsilon \in [-1, 1]$, a stąd

$$\begin{array}{rcl} y_n & = & -Ax_n - \varepsilon_n b \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & = & -Ax - \varepsilon b \in -Ax - b \operatorname{sign}(d^T x) \implies [x, y] \in B . \end{array}$$

Ostatecznie pokazaliśmy, że zachodzi implikacja

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \in Bx_n, \quad y_n \rightarrow y \implies [x, y] \in B ,$$

a zatem zgodnie z definicją 9.1.8 operator B jest domknięty.

9.3.3. Surjektywność operatora $I + \lambda B$

Pokażemy, że dla dostatecznie małej $\lambda > 0$ zachodzi

$$R(I + \lambda B) = \mathbb{R}^n \quad (9.14)$$

Dla dowodu ustalmy dowolnie $y \in \mathbb{R}^n$. Należy wykazać, że przy dostatecznie małej $\lambda > 0$ przynależność $y \in (I + \lambda B)x$ posiada rozwiązanie. Liczba λ ma być niezależna od y . Z definicji zbiorów $(I + \lambda B)x$, Bx wynika, że jest to równoważne wykazaniu, że przy dostatecznie małej $\lambda > 0$, niezależnej od y , układ

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (I - \lambda A)x - \lambda bu \\ u \in \text{sign}(d^T x) \end{array} \right\} \quad (9.15)$$

posiada rozwiązanie względem (x, u) . Jeżeli $\lambda \in (0, \|A\|^{-1})$ to istnieje $(I - \lambda A)^{-1}$ i z pierwszego równania układu (9.15) dostajemy

$$x = (I - \lambda A)^{-1}(y + \lambda bu) \quad (9.16)$$

Uwzględniając ten wynik w drugim równaniu układu (9.15) otrzymujemy przynależność

$$u \in \text{sign} [d^T (I - \lambda A)^{-1}y + \lambda d^T (I - \lambda A)^{-1}bu] \quad (9.17)$$

1°. $d^T (I - \lambda A)^{-1}b = 0$. Przynależność (9.17) posiada wówczas rozwiązanie

$$u^* \in \text{sign} [d^T (I - \lambda A)^{-1}y] .$$

2°. $d^T (I - \lambda A)^{-1}b \neq 0$. Podstawienie

$$v = d^T (I - \lambda A)^{-1}y - G(\lambda^{-1}) ,$$

gdzie G oznacza transmitancję liniowej części systemu i wyraża się wzorem (9.13), sprowadza przynależność (9.17) do postaci

$$\frac{d^T (I - \lambda A)^{-1}y - v}{G(\lambda^{-1})} \in \text{sign } v \quad (9.18)$$

Wykresem lewej strony (9.18) jest niepozioma prosta posiadająca punkt wspólny z operatorem wielowartościowym $\text{sign}(\cdot)$, stąd przynależność (9.18) ma rozwiązanie. Zatem przynależność (9.17) także posiada rozwiązanie u^* .

Podstawiając u^* do (9.16) otrzymujemy element x^* . Para (u^*, x^*) jest rozwiązaniem układu (9.15), co dowodzi, że zachodzi (9.14).

Wnioskiem z rozważań udokumentowanych w Rozdziale 9.3, Propozycji 9.1.6 i Twierdzenia 9.1.9 jest kolejny wynik.

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

Twierdzenie 9.3.4. Jeżeli $d^T b < 0$ to dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ problem początkowy (9.7), (9.8) posiada dokładnie jedno mocne rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$, równoważnie, $x(\cdot, x_0)$ jest jedynym rozwiązaniem problemu (9.5), (9.6) w sensie Filippova. Więcej, zachodzi oszacowanie

$$\|x(t, x_0^1) - x(t, x_0^2)\| \leq e^{\omega t} \|x_0^1 - x_0^2\| \quad \forall x_0^1, x_0^2 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0 \quad (9.19)$$

gdzie $\|x\| = \sqrt{x^T H_0 x}$, $H_0 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = H_0^T > 0$ jest rozwiązaniem równania (9.10), ω wyraża się wzorem (9.11). Trójka $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^*, \Pi)$, $\Pi(t, x_0) := x(t, x_0)$ jest CSDS-em na przestrzeni \mathbb{R}^n .

9.4. ZACHOWANIE SIĘ TRAJEKTORII UKŁADU (9.7), (9.8)

9.4.1. Trajektorie startujące z hiperpłaszczyzny przełączeń

Zachowanie się trajektorii układu (9.7), (9.8) startujących z hiperpłaszczyzny przełączeń $d^T x = 0$ jest opisane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 9.4.1. Przyjmijmy założenia i oznaczenia jak w Twierdzeniu 9.3.4. Jeżeli

$$x_0 \in \overline{SM} = \{w \in \mathbb{R}^n : d^T w = 0, |d^T Aw| \leq |d^T b|\}$$

to rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ porusza się w hiperpłaszczyźnie $\Pi = \{w \in \mathbb{R}^n : d^T w = 0\}$, aż do osiągnięcia zbioru $\{w \in \mathbb{R}^n : d^T w = 0, |d^T Aw| = |d^T b|\}$. Niech przedział $[0, T]$, $T \in [0, \infty]$, oznacza maksymalny przedział, dla którego zachodzi implikacja

$$t \in [0, T] \implies x(t, x_0) \in \overline{SM} .$$

Wtedy

$$u = \frac{-d^T Ax(t, x_0)}{d^T b} \quad \forall t \in [0, T]$$

oraz

$$\dot{x}(t, x_0) = \hat{A}x(t, x_0)$$

prawie wszędzie na $[0, T]$, gdy $T < \infty$, prawie wszędzie na zwartych podzbiorach \mathbb{R}^* , gdy $T = \infty$.

Jeżeli

$$x_0 \in S_1 = \{w \in \mathbb{R}^n : d^T w = 0, d^T Aw > |d^T b|\}$$

to przy sterowaniu $u = 1$ rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ wchodzi do zbioru

$$\Pi^+ = \{w \in \mathbb{R}^n : d^T w > 0\}$$

i na przedziale $(0, \delta)$, gdzie δ – dostatecznie mała, dodatnia, pozostaje w zbiorze Π^+ . Niech $(0, T)$ oznacza maksymalny przedział, dla którego zachodzi implikacja

9.4. ZACHOWANIE SIĘ TRAJEKTORII UKŁADU (9.7), (9.8)

$$t \in (0, T) \implies x(t, x_0) \in \Pi^+ .$$

Wtedy $\dot{x}(t, x_0) = Ax(t, x_0) + b$ prawie wszędzie na zwartych podzbiorach przedziału $(0, T)$.

Jeżeli

$$x_0 \in S_2 = \{w \in \mathbb{R}^n : d^T w = 0, -d^T A w > |d^T b|\}$$

to przy sterowaniu $u = -1$ rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ wchodzi do zbioru

$$\Pi^- = \{w \in \mathbb{R}^n : d^T w < 0\}$$

i na przedziale $(0, \delta)$, gdzie δ – dostatecznie mała, dodatnia, pozostaje w zbiorze Π^- . Niech $(0, T)$ oznacza maksymalny przedział, dla którego zachodzi implikacja

$$t \in (0, T) \implies x(t, x_0) \in \Pi^- .$$

Wtedy $\dot{x}(t, x_0) = Ax(t, x_0) - b$ prawie wszędzie na zwartych podzbiorach przedziału $(0, T)$.

Dowód. Przeprowadzimy dyskusję układu (9.15) przy założeniach: (9.12),

$$0 < \lambda < \|A\|^{-1} \left[1 + \frac{2\|d\|\|b\|}{|d^T b|} \right]^{-1} \quad (9.20)$$

i

$$d^T y = 0 \quad (9.21)$$

Zauważmy najpierw, że wobec $d \neq 0$ na podstawie wzorów (9.21), (9.15) otrzymujemy

$$d^T x = \lambda[d^T Ax + ud^T b] \quad (9.22)$$

Pod działaniem transformacji

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ d^T A & d^T b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} ,$$

której odwrotnością jest

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{d^T b} d^T A & \frac{1}{d^T b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

układ (9.15) przyjmuje postać

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (I - \lambda \hat{A})x - \frac{\lambda v}{d^T b} b \\ \frac{v - d^T Ax}{d^T b} \in \text{sign } v \end{array} \right\} \quad (9.23)$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

gdzie

$$\hat{A} = \left[I - \frac{1}{d^T b} b d^T \right] A \quad (9.24)$$

Ponadto $\text{sign } d^T x = \text{sign } (d^T A x + u d^T b) = \text{sign } v$.

Macierz $(I - \lambda \hat{A})$ jest odwracalna, co wynika z oszacowania

$$\lambda < \|A\|^{-1} \left[1 + \frac{2 \|d\| \|b\|}{|d^T b|} \right]^{-1} < \|A\|^{-1} \left[1 + \frac{\|d\| \|b\|}{|d^T b|} \right]^{-1} \leq \|\hat{A}\|^{-1} .$$

Zatem układ (9.23) można sprowadzić do postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (I - \lambda \hat{A})x - \frac{\lambda v}{d^T b} b \\ \frac{1}{d^T b} v \left[1 - \frac{\lambda}{d^T b} d^T A (I - \lambda \hat{A})^{-1} b \right] - \frac{1}{d^T b} d^T A (I - \lambda \hat{A})^{-1} y \in \text{sign } v \end{array} \right\} \quad (9.25)$$

Przy ustalonej λ , spełniającej (9.20), wykresem lewej strony drugiego równania układu (9.25) jest prosta, przechodząca przez punkt $\left(0, -\frac{1}{d^T b} d^T A (I - \lambda \hat{A})^{-1} y \right)$. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest ujemny, gdyż

$$1 - \frac{\lambda}{d^T b} d^T A (I - \lambda \hat{A})^{-1} b > 0 \quad (9.26)$$

Dla dowodu (9.26) dokonujemy oszacowania

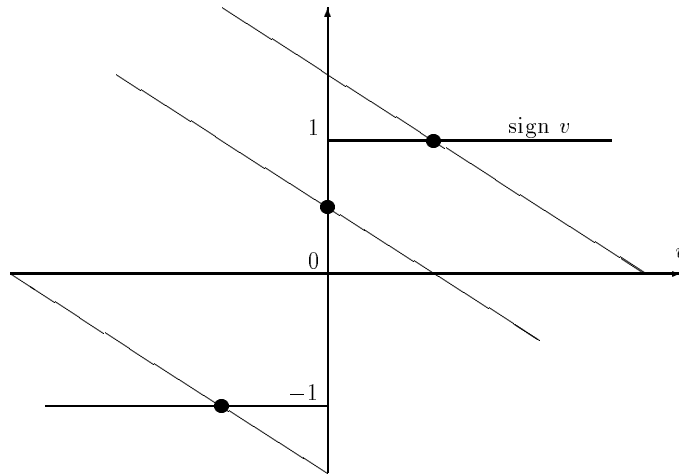
$$\left| \frac{\lambda}{d^T b} d^T A (I - \lambda \hat{A})^{-1} b \right| \leq \frac{\lambda}{|d^T b|} \|A\| \|d\| \|b\| \|(I - \lambda \hat{A})^{-1}\| .$$

Jak wiemy $\lambda \|\hat{A}\| < 1$, skąd

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda}{d^T b} d^T A (I - \lambda \hat{A})^{-1} b \right| &\leq \frac{\|d\| \|b\|}{|d^T b|} \frac{\lambda \|A\|}{1 - \lambda \|\hat{A}\|} \leq \frac{\|d\| \|b\|}{|d^T b|} \frac{\lambda \|A\|}{1 - \lambda \frac{\|d\| \|b\|}{|d^T b|} \|A\|} \\ &= \frac{\|d\| \|b\|}{|d^T b|} \|A\| \frac{1}{\|A\| \frac{|d^T b| + \|d\| \|b\|}{|d^T b|}} \\ &< \frac{1}{1 - \frac{|d^T b| + \|d\| \|b\|}{|d^T b|} \|A\| \frac{1}{\|A\| \frac{|d^T b| + 2 \|d\| \|b\|}{|d^T b|}}} = 1 \end{aligned}$$

i w konsekwencji nierówność (9.26) jest spełniona. Na rysunku 9.1 dokonano graficznej dyskusji drugiego równania układu (9.25).

9.4. ZACHOWANIE SIĘ TRAJEKTORII UKŁADU (9.7), (9.8)



Rysunek 9.1. Dyskusja graficzna drugiego równania układu (9.25)

- 1°. Prosta – wykres lewej strony drugiego równania układu (9.25) przecina wieloznaczną część $\text{sign}(\cdot)$, co zachodzi, gdy

$$\left| d^T A(I - \lambda \hat{A})^{-1} y \right| \leq |d^T b| \quad (9.27)$$

Szukanymi rozwiązaniami układów (9.25), (9.15) są zatem:

$$v = 0, \quad x = (I - \lambda \hat{A})^{-1} y, \quad u = -\frac{d^T Ax}{d^T b} \quad (9.28)$$

Ze wzoru na u i zależności (9.22) wynikają następujące własności otrzymanego rozwiązania:

$$d^T x = 0, \quad |d^T Ax| \leq |d^T b| \quad (9.29)$$

- 2°. Prosta – wykres lewej strony drugiego równania układu (9.25) przecina segment wykresu $\text{sign}(\cdot)$ nad dodatnimi wartościami v , co zachodzi, gdy

$$d^T A(I - \lambda \hat{A})^{-1} y > |d^T b| \quad (9.30)$$

Wtedy $\text{sign } v = 1$, a stąd:

$$v = d^T Ax + d^T b, \quad u = 1, \quad x = (I - \lambda A)^{-1} (y + \lambda b) \quad (9.31)$$

Rozwiązanie to posiada następujące własności:

$$d^T x > 0, \quad y = (I - \lambda A)x - \lambda b \quad (9.32)$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

3°. Prosta – wykres lewej strony drugiego równania układu (9.25) przecina segment wykresu $\text{sign}(\cdot)$ nad ujemnymi wartościami v , co zachodzi, gdy

$$-d^T A(I - \lambda \hat{A})^{-1} y > |d^T b| \quad (9.33)$$

Wtedy $\text{sign} v = -1$ i w konsekwencji:

$$v = d^T Ax - d^T b, \quad u = -1, \quad x = (I - \lambda A)^{-1}(y - \lambda b) \quad (9.34)$$

Dla tego rozwiązania:

$$d^T x < 0, \quad y = (I - \lambda A)x + \lambda b \quad (9.35)$$

Z rezultatów Rozdziału 9.3 i Twierdzenia 9.1.5 wynika, że przy warunkach:

$$0 < \lambda < \|A\|^{-1}, \quad \lambda \omega < 1, \quad d^T b < 0 \quad (9.36)$$

problem początkowy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_\lambda(t) - x_\lambda(t - \lambda)}{\lambda} + Bx_\lambda(t) \ni 0, \quad t \geq \lambda \\ x_\lambda(t) = x_0, \quad 0 \leq t < \lambda \end{array} \right\} \quad (9.37)$$

posiada przy dowolnym $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dokładnie jedno rozwiązanie $x_\lambda(\cdot, x_0)$ określone na \mathbb{R}^* , co więcej

$$\lim_{\lambda \searrow 0} x_\lambda(t, x_0) = x(t, x_0)$$

niemal jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}^*$. Rozwiązanie $x_\lambda(\cdot, x_0)$ można otrzymać metodą kroków. Po uwzględnieniu (9.8) w (9.37) otrzymamy $x_\lambda(t, x_0) = x_0$, $0 \leq t < \lambda$, podczas gdy $x_\lambda(t, x_0)$ dla $\lambda \leq t < 2\lambda$ jest rozwiązaniem układu

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - \lambda A)x_\lambda(t, x_0) - \lambda u b = x_0 \\ u \in \text{sign } d^T x \end{array} \right\} .$$

Jest to układ postaci (9.15) z x zastąpionym przez $x_\lambda(t, x_0)$ i y zastąpionym przez x_0 . Teza dowodzonego twierdzenia dotyczy rozwiązań startujących z hiperpłaszczyzny Π , a zatem $d^T x_0 = 0$. Ponieważ $d^T b < 0$ więc zmniejszając, w razie potrzeby, λ tak, aby jednocześnie zachodziły nierówności (9.36) i (9.20), możemy skorzystać z przeprowadzonej uprzednio dyskusji rozwiązalności układu (9.15).

1°. Nierówności (9.27) odpowiada warunek $|d^T A(I - \lambda \hat{A})^{-1} x_0| \leq |d^T b|$. W tym przypadku, zgodnie z (9.28), dla $t \in [\lambda, 2\lambda)$ mamy:

$$\frac{x_\lambda(t, x_0) - x_\lambda(t - \lambda, x_0)}{\lambda} = \hat{A}x_\lambda(t, x_0), \quad u = -\frac{d^T Ax_\lambda}{d^T b}$$

9.4. ZACHOWANIE SIĘ TRAJEKTORII UKŁADU (9.7), (9.8)

oraz, dzięki (9.29),

$$d^T x_\lambda(t, x_0) = 0, \quad |d^T A x_\lambda(t, x_0)| \leq |d^T b| \quad (9.38)$$

Traktując, zgodnie z ideą metody kroków, $x_\lambda(\lambda, x_0)$ jako nowy warunek początkowy widzimy, że $d^T x_\lambda(\lambda, x_0) = 0$. Teraz może zachodzić albo drugi z warunków (9.38), z x_0 zastąpionym przez $x_\lambda(\lambda, x_0)$, a wtedy w drugim kroku rozwiązanie $x_\lambda(\cdot, x_0)$ spełnia identyczne związki co w pierwszym kroku, albo zachodzi któraś z nierówności ujętych w dalej opisanych przypadkach 2°, 3°, a wtedy rozwiązanie $x_\lambda(\cdot, x_0)$ w drugim kroku spełnia związki odpowiadające przypadkowi 2° lub przypadkowi 3° poniżej. Jeżeli rozwiązanie $x_\lambda(\cdot, x_0)$ przez k kroków ($k \geq 1$) podlega przypadkowi 1°, to analogicznie, jak dla drugiego kroku można ustalić, któremu przypadkowi podlega rozwiązanie w $(k + 1)$ kroku.

- 2°. Nierówności (9.30) odpowiada warunek $d^T A(I - \lambda \hat{A})^{-1} x_0 > |d^T b|$. W tym przypadku, zgodnie z (9.31), dla $t \in [\lambda, 2\lambda)$ mamy:

$$\frac{x_\lambda(t, x_0) - x_\lambda(t - \lambda, x_0)}{\lambda} = A x_\lambda(t, x_0) + b, \quad u = 1$$

oraz, dzięki (9.32), $d^T x_\lambda(t, x_0) > 0$. W kolejnym kroku rozwiązanie $x_\lambda(\cdot, x_0)$ zachowuje się identycznie jak rozwiązanie startujące z Π^+ .

- 3°. Nierówności (9.33) odpowiada warunek $-d^T A(I - \lambda \hat{A})^{-1} x_0 > |d^T b|$. W tym przypadku, zgodnie z (9.34), dla $t \in [\lambda, 2\lambda)$ mamy:

$$\frac{x_\lambda(t, x_0) - x_\lambda(t - \lambda, x_0)}{\lambda} = A x_\lambda(t, x_0) - b, \quad u = -1$$

oraz, dzięki (9.35),

$$d^T x_\lambda(t, x_0) < 0 \quad (9.39)$$

W kolejnym kroku rozwiązanie $x_\lambda(\cdot, x_0)$ zachowuje się identycznie jak rozwiązanie startujące z Π^- .

Tezę twierdzenia otrzymamy po przejściu granicznym $\lambda \searrow 0$. □

Z tezy Twierdzenia 9.4.1 wynika, że korzystnie jest zdefiniować funkcję

$$\mathcal{F}(w) = \left\{ \begin{array}{ll} Aw + b, & \text{gdy } d^T w > 0 \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} d^T w = 0 \\ d^T Aw > |d^T b| \end{array} \right\} \\ \hat{A}w, & \text{gdy } \left\{ \begin{array}{l} d^T w = 0 \\ d^T Aw \leq |d^T b| \end{array} \right\} \\ Aw - b, & \text{gdy } d^T w < 0 \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} d^T w = 0 \\ -d^T Aw > |d^T b| \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (9.40)$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

Definicja 9.4.2. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy *lokalnie ograniczoną* jeśli dla każdego zbioru $Z \subset \mathbb{R}^n$ istnieje $M = M(Z) > 0$ takie, że $\|f(x)\| \leq M$ dla dowolnego $x \in Z$.

Funkcja \mathcal{F} nie jest ciągła, ale jest lokalnie ograniczona.

9.4.2. Punkty osobliwe

Twierdzenie 9.4.3. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ (9.7), (9.8) posiadał skończoną liczbę punktów równowagi jest, aby

$$d^T \operatorname{adj} Ab \neq 0 \quad (9.41)$$

Więcej, jeżeli

$$\det A = 0 \quad \text{lub} \quad \left\{ \begin{array}{l} \det A \neq 0 \\ d^T A^{-1}b > 0 \end{array} \right\}$$

to tylko początek układu jest punktem równowagi, a jeżeli

$$\left\{ \begin{array}{l} \det A \neq 0 \\ d^T A^{-1}b < 0 \end{array} \right\}$$

to punktami równowagi są: $0, \pm A^{-1}b$.

Dowód. Punkty osobliwe (stacjonarne) są związaniem przynależności $0 \in Bx$ lub, równoważnie, rozwiązaniami układu

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} A & b \\ d^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\ u \in \operatorname{sign} y \end{array} \right\} \quad (9.42)$$

Układ ten posiada skończoną liczbę rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{bmatrix} A & b \\ d^T & 0 \end{bmatrix} = -d^T \operatorname{adj} Ab \neq 0 ,$$

co dowodzi (9.41). Przy spełnionym warunku (9.41), z pierwszego równania układu (9.42) otrzymamy

$$u = \frac{y \det A}{-d^T \operatorname{adj} Ab} .$$

Uwzględniając ten wynik w drugim równaniu układu (9.42) dostajemy przynależność

$$\frac{y \det A}{-d^T \operatorname{adj} Ab} \in \operatorname{sign} y \quad (9.43)$$

9.5. WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI

1°. $\det A = 0$.

Wtedy $u = 0$ i $y = 0$ jest jedynym rozwiązaniem (9.43). Pierwsze równanie układu (9.42) jest jednorodne, a ponieważ przy założeniu (9.41) ma jednoznaczne rozwiązanie, więc $x = 0$.

2°. $\det A \neq 0$.

Przynależność (9.43) przyjmuje równoważną postać

$$\frac{y}{-d^T A^{-1}b} \in \text{sign } y \quad (9.44)$$

Dyskusji rozwiązalności (9.44) najlepiej jest dokonać graficznie w sposób nieco podobny do przedstawionego na rysunku 9.1. Możliwe są dwa podprzypadki:

(a) $d^T A^{-1}b > 0$.

Wtedy $y = 0$ jest jedynym rozwiązaniem (9.44). Pierwsze równanie układu (9.42) znów jest jednorodne, a ponieważ (9.41) zachodzi, więc $x = 0$, $u = 0$ jest jego jedynym rozwiązaniem.

(b) $d^T A^{-1}b < 0$.

Wtedy albo $y = 0$, co prowadzi do rozwiązania $x = 0$, $u = 0$ pierwszego równania układu (9.42), albo $u = \pm 1$ i pierwsze równanie układu (9.42) daje $x = \pm A^{-1}b$.

□

9.5. WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI

Jak wynika z Twierdzenia 9.3.4 analiza własności dynamicznych szerokiej klasy układów Lurie z przekąźnikiem może być oparta na metodach teorii **CSDS**-ów. Poniższy lemat jest wersją uogólnionego twierdzenia LaSalle'a dla rozpatrywanej klasy układów Lurie.

9.5.1. Wersja twierdzenia LaSalle'a

Lemat 9.5.1. Rozważmy problem początkowy (9.7), (9.8) z wielowartościowym operatorem B spełniającym nierówność (9.12). Niech $x(\cdot, x_0)$ nadal oznacza rozwiązanie problemu początkowego (9.7), (9.8), którego istnienie jest zagwarantowane Twierdzeniem 9.3.4. Przypuśćmy, że istnieją: ciągły, lokalnie lipschitzowski funkcjonal $V : \Omega \ni u \mapsto V(u) \in \mathbb{R}$, gdzie Ω jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , $0 \in \Omega$, $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ dla dowolnego $x \in \Omega$, $x \neq 0$ i liczba $k \in \mathbb{R}$ takie, że:

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

(i) $k \in (0, l_0)$, gdzie $l_0 > 0$ oznacza taką liczbę, że dla dowolnego $l \in (0, l_0)$ przekrój $\Omega_l^* := \{u \in \Omega : V(u) \leq l\}$ funkcjonału V , posiada zwartą składową Ω_l , otaczającą początek układu, taką, że $\Omega_l \cap \overline{\Omega_l^*} \subset \Omega_l = \Phi^*$ (istnienie liczby l_0 jest zagwarantowane Lematem 2.3.1),

(ii)

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V(w + h\mathcal{F}(w)) - V(w)}{h} \leq 0 \quad \forall w \in \Omega_k ,$$

przy czym \mathcal{F} jest funkcją zdefiniowaną wzorem (9.40), a Ω_k jest składową zwartą zawierającą początek układu przekroju $\Omega_k^* = \{u \in \Omega : V(u) \leq k\}$.

Jeżeli $\{0\}$ jest największym w sensie relacji inkluzji zbiorów, zbiorem *mocno-inwariantnym*, zawartym w zbiorze

$$E := \left\{ u \in \Omega_k : \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V(w + h\mathcal{F}(w)) - V(w)}{h} = 0 \right\} ,$$

to początek układu jest *atraktorem*, tzn. w jego obszar atrakcji $\mathcal{A}(\{0\})$ da się wpisać otwarte otoczenie 0, oraz $\Omega_k \subseteq \mathcal{A}(\{0\})$.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że wobec tego, że \mathcal{F} jest lokalnie ograniczona granica w (ii) istnieje. Ω_k jest zbiorem niepustym i zwartym. Wykażemy, że Ω_k jest zbiorem inwariantnym. Dla dowodu definiujemy

$$\Omega_k^0 := \{u \in \Omega : V(u) < k\} \cap \Omega_k$$

i będziemy dowodzić, że Ω_k^0 jest zbiorem *inwariantnym*, tzn. zachodzi implikacja

$$x_0 \in \Omega_k^0 \implies x(t, x_0) \in \Omega_k^0 \quad \forall t > 0 \quad (9.45)$$

Przypuśćmy, że (9.45) nie zachodzi. Wtedy istnieje czas $T > 0$ taki, że:

$$x(t, x_0) \in \Omega_k^0 \quad \forall t \in [0, T) \quad (9.46)$$

$$x(T, x_0) \in \partial\Omega_k^0 .$$

Niech $\Phi(t) := V[x(t, x_0)]$ dla tych $t \geq 0$, dla których $x(t, x_0) \in \Omega$. Ponieważ $x(\cdot, x_0)$ jest absolutnie ciągle więc $\Phi(\cdot)$ jest absolutnie ciągła i prawie wszędzie posiada pochodną

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} [\Phi(t+h) - \Phi(t)] .$$

Z Twierdzenia 9.4.1 wynika, że dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^*$ i infimezimalnego h mamy

$$x(t+h, x_0) = x(t, x_0) + h\dot{x}(t, x_0) + o(h) = x(t, x_0) + h\mathcal{F}(x(t, x_0)) + o(h) .$$

9.5. WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI

Stąd

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(x(t+h, x_0)) - V(x(t, x_0))}{h} = \\ &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V[x(t+h, x_0) + h\mathcal{F}(x(t, x_0)) + o(h)] - V[x(t, x_0)]}{h} \end{aligned} \quad (9.47)$$

dla prawie wszystkich $t \in [0, T)$. Z lokalnej lipschitzowskości V wynika jednak, że istnieje taka $L > 0$, że

$$\begin{aligned} -L \|o(h)\| &\leq V[(x(t+h, x_0)) + h\mathcal{F}(x(t, x_0)) + o(h)] - \\ &\quad - V[x(t, x_0) + h\mathcal{F}(x(t, x_0))] \leq L \|o(h)\|, \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} &\frac{V[(x(t+h, x_0)) + h\mathcal{F}(x(t, x_0)) - V[x(t, x_0)] - L \|o(h)\|]}{h} \leq \\ &\leq \frac{V[(x(t+h, x_0)) + h\mathcal{F}(x(t, x_0)) + o(h)] - V[x(t, x_0)]}{h} \leq \\ &\leq \frac{V[(x(t+h, x_0)) + h\mathcal{F}(x(t, x_0)) + L \|o(h)\| - V[x(t, x_0)]}{h} \end{aligned} \quad (9.48)$$

dla prawie wszystkich $t \in [0, T)$ i infimezymalnego $h > 0$. Ostatecznie z (9.47), (9.48) dostajemy

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\Phi(t+h) - \Phi(t)] &= \\ &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{V[x(t+h, x_0) + h\mathcal{F}(x(t, x_0)) + o(h)] - V[x(t, x_0)]\} \end{aligned} \quad (9.49)$$

dla prawie wszystkich $t \in [0, T)$. Teraz z (9.49), założenia (ii) i (9.46) dostajemy

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\Phi(t+h) - \Phi(t)] \leq 0$$

dla prawie wszystkich $t \in [0, T)$. Z [86, Twierdzenie 1.5, str. 174] wynika, że Φ jest funkcją malejącą na $[0, T)$, a więc

$$\Phi(t) = V[x(t, x_0)] \leq \Phi(0) = V(x_0) < k, \quad \forall t \in [0, T) \quad (9.50)$$

Stąd i z ciągłości $V[x(\cdot, x_0)]$ w punkcie $t = T$ otrzymamy

$$k = V[x(T, x_0)] = \lim_{t \rightarrow T^+} V[x(t, x_0)] = \lim_{t \rightarrow T^-} V[x(t, x_0)] \leq V(x_0) < k.$$

Z uzyskanej sprzeczności, wynika że Ω_k^0 jest inwariantny, a stąd zbiór $\Omega_k = \overline{\Omega_k^0}$ też jest inwariantny i ważność nierówności (9.50) rozciąga się na \mathbb{R}^* .

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

Z dotychczasowych rozważań i definicji zbioru E wynika, że

$$E = \{x_0 \in \Omega_k : V[x(t, x_0)] = V(x_0) = \text{const}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^*\} .$$

Spełnione są założenia uogólnionego twierdzenia LaSalle'a 2.1.6. Z tezy tego twierdzenia wynika teza dowodzonego lematu. \square

Lemat 9.5.1 stanowi poprawę nieprecyzyjnego rezultatu Weissenbergera [146, Twierdzenie 1]. Niemniej jednak, jak wykażemy dalej, metody numeryczne podane w [146], [147] jako praktyczne sposoby otrzymania aproksymacji obszaru atrakcji zbioru $\{0\}$ pozostają w mocy.

9.5.2. Własności przekrojów pewnej klasy funkcjonałów

Lemat 9.5.2. Rozważmy funkcjonał

$$V(x) = x^T H x + |d^T x| \tag{9.51}$$

przy czym $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$ i d spełniają związek

$$\{u \in \mathbb{R}^n : u^T H u \leq 0\} \cap \{u \in \mathbb{R}^n : d^T u = 0\} = \{0\} \tag{9.52}$$

a w przypadku $\det H = 0$ dodatkowo zakłada się, że

$$\text{adj } H d \neq 0 \tag{9.53}$$

Niech $\Omega := \{u \in \mathbb{R}^n : |d^T u| < \alpha\}$,

$$\alpha := \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & \text{gdy } \frac{\det H}{d^T \text{adj } H d} \geq 0 \\ -\frac{d^T \text{adj } H d}{\det H}, & \text{gdy } \frac{\det H}{d^T \text{adj } H d} < 0 \end{array} \right\} .$$

Wtedy $V(x) > 0$ dla dowolnego $x \in \Omega$, $x \neq 0$ oraz dla każdego $l \in [0, l_0)$,

$$l_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^T \text{adj } H d}{4 \det H}, & \text{gdy } \frac{\det H}{d^T \text{adj } H d} < 0 \\ \infty, & \text{gdy } \frac{\det H}{d^T \text{adj } H d} \geq 0 \end{array} \right\}$$

przekrój $\Omega_l^* = \{u \in \Omega : V(u) \leq l\}$ funkcjonału V posiada zwartą składową Ω_l zawierającą początek układu. Podana liczba l_0 jest największą z możliwych, przy których przekroje funkcjonału V mają opisaną własność.

Dowód. Formalnie definiujemy funkcję φ

9.5. WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI

$$\varphi : \mathbb{R}^* \ni k \longmapsto \varphi(k) := \min_{d^T x = k} V(x) = k + \min_{d^T x = k} x^T H x \in \mathbb{R} .$$

Dla dowodu poprawności określenia funkcji φ wystarczy pokazać, że ostatni problem minimalizacyjny posiada rozwiązanie. Stosując metodę mnożników Lagrange'a, budujemy odpowiadający mu lagrangian $\mathcal{L}(x, \lambda) = x^T H x - \lambda(d^T x - k)$. Dowolny punkt stacjonarny (x^*, λ^*) jest rozwiązaniem równania $\nabla \mathcal{L} = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, skąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 2H & -d \\ d^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (9.54)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układ (9.54) posiadał jedyne rozwiązanie jest aby

$$\det \begin{bmatrix} 2H & -d \\ d^T & 0 \end{bmatrix} = 2^{n-1} d^T \operatorname{adj} H d \neq 0 \quad (9.55)$$

Przypuśćmy, że (9.55) nie zachodzi, tzn.

$$d^T \operatorname{adj} H d = 0 \quad (9.56)$$

Rozpatrzmy wektor $w = \operatorname{adj} H d$ i zauważmy, że

$$w^T H w = d^T (\operatorname{adj} H) H (\operatorname{adj} H) d = \det H d^T \operatorname{adj} H d \quad (9.57)$$

Na mocy (9.56) mamy

$$d^T w = d^T \operatorname{adj} H d = 0 \quad (9.58)$$

a stąd i z (9.57) wynika, że

$$w^T H w = 0 \quad (9.59)$$

Wobec (9.58) i (9.59) mamy

$$w \in \{u \in \mathbb{R}^n : u^T H u \leq 0\} \cap \{u \in \mathbb{R}^n : d^T u = 0\} = \{0\} ,$$

a stąd

$$w = 0 \quad (9.60)$$

Możliwe są dwa przypadki:

- 1°. $\det H = 0$. W tym przypadku z (9.53) wynika, że $w \neq 0$, co jest sprzeczne z (9.60).
- 2°. $\det H \neq 0$. W tym przypadku z (9.60) i (9.53) wynika, iż d jest rozwiązaniem równania $\operatorname{adj} H y = 0$. Ponieważ $\det \operatorname{adj} H = (\det H)^{n-1} \neq 0$, co oznacza, że równanie to posiada zerowe rozwiązanie. Zatem $d = 0$, co sprzeczne jest z założeniem generalnym $d \neq 0$.

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

Z obu uzyskanych sprzeczności wynika, że zachodzi (9.55).

Pokażemy, że rozwiązanie (x^*, λ^*) układu (9.54) jest takie, że x^* realizuje ściśle minimum funkcjonału $\Phi(x) = x^T H x$ na hiperpłaszczyźnie $d^T x = k$. Istotnie, jeżeli przyjmiemy, że $\Delta\Phi(x^*)$ oznacza przyrost funkcjonału Φ , mierzony w hiperpłaszczyźnie $d^T x = k$, spowodowany odejściem od punktu x^* do punktu $x^* + \Delta x$ też zlokalizowanego w tej hiperpłaszczyźnie, to wtedy:

$$\Delta\Phi(x^*) = \Phi(x^* + \Delta x) - \Phi(x^*) = 2[x^*]^T H \Delta x + [\Delta x]^T H \Delta x, \quad d^T \Delta x = 0 \quad (9.61)$$

Z układu (9.54) wyznaczamy λ^* ,

$$\lambda^* = \frac{2k \det H}{d^T \operatorname{adj} H d}.$$

Wstawiając na powrót λ^* do (9.54) otrzymamy

$$\left\{ \begin{array}{l} Hx^* = \frac{k \det H}{d^T \operatorname{adj} H d} d \\ d^T x^* = k \end{array} \right\} \quad (9.62)$$

Konsekwencjami (9.62) są: równość

$$\Phi(x^*) = [x^*]^T H x^* = \frac{k^2 \det H}{d^T \operatorname{adj} H d} \quad (9.63)$$

oraz implikacja

$$d^T \Delta x = 0 \implies 2[x^*]^T H \Delta x = 0 \quad (9.64)$$

Uwzględniając (9.64) w (9.61) otrzymamy

$$\Delta\Phi(x^*) = [\Delta x]^T H \Delta x, \quad d^T \Delta x = 0 \quad (9.65)$$

Z (9.65) i (9.52) wynika jednak ($\Delta x \neq 0$), że $\Delta\Phi(x^*) > 0$, a zatem x^* realizuje ściśle minimum $\Phi(x) = x^T H x$ na $d^T x = k$. Co więcej, na mocy (9.63) mamy

$$\min_{d^T x = k} x^T H x = \frac{k^2 \det H}{d^T \operatorname{adj} H d}.$$

Tak więc φ jest poprawnie określona, oraz

$$\varphi(k) = k + \frac{k^2 \det H}{d^T \operatorname{adj} H d}.$$

W przedziale $[0, \alpha)$ zachodzi nierówność $\varphi(k) \geq 0$, z równością tylko dla $k = 0$, ale wtedy $\min_{d^T x = 0} V(x)$ jest, jak wynika z (9.54), osiągnane wyłącznie w zerze. W ten sposób pokazaliśmy, że $V(x) > 0$ dla $x \in \Omega$, $x \neq 0$.

Dla dowodu pozostałej części tezy rozważymy dwa przypadki:

9.5. WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI

1°. $\alpha \neq \infty$. Punkt $k_0 = 0.5\alpha$ jest punktem, w którym φ osiąga maximum globalne, równe ℓ_0 . Niech x_0^* będzie punktem realizującym $\min_{d^T x = k_0} x^T H x$. Funkcjonał V jest sumą formy kwadratowej i funkcyjonału wypukłego $x \mapsto |d^T x|$. Stosując rezultaty [122, Twierdzenie 10.1, str. 99 i Twierdzenie 10.4, str. 103] ustalamy, że V jest ciągły i lokalnie lipschitzowski. Zatem V posiada w dowolnym punkcie uogólniony gradient w sensie Clarke'a [28]

$$\delta V(x) = \{2Hx + ud : u \in \text{sign } d^T x\} .$$

Na mocy (9.62) mamy

$$\delta V(x_0^*) = \frac{2k_0 \det H}{d^T \text{adj } Hd} d + d \quad (9.66)$$

a z definicji k_0

$$\frac{2k_0 \det H}{d^T \text{adj } Hd} + l = 0 \quad (9.67)$$

Z (9.66), (9.67) wynika, że $\delta V(x_0^*) = 0$, a to oznacza, że punkt x_0^* jest punktem stacjonarnym funkcyjonału V [28]. Ponieważ z jednej strony x_0^* realizuje $\min_{d^T x = k_0} x^T H x$, więc przy oddalaniu się w hiperpłaszczyźnie $d^T x = k_0$ od punktu x_0^* funkcyjonał V rośnie, a z drugiej strony, wzdłuż krzywej, stanowiącej zbiór tych punktów x^* , które realizują $\min_{d^T x = k_0} x^T H x$, przy k traktowanym jako parametr, funkcyjonał V maleje przy oddalaniu się od punktu x_0^* , jako, że w punkcie k_0 funkcja φ posiada maksimum. Z powyższego rozumowania wynika, że punkt x_0^* jest punktem siodłowym funkcyjonału V , a to oznacza, że dla dowolnego $l \in [0, l_0)$ przekrój $\Omega_l^* = \{u \in \Omega : V(u) \leq l\}$ funkcyjonału V posiada zwartą składową Ω_l zawierającą początek układu, a także to, że liczba l_0 nie może być powiększona w taki sposób, by zachować opisaną topologiczną własność przekrojów funkcyjonału V .

2°. $\alpha = \infty$. Ponieważ funkcja φ jest rosnąca na \mathbb{R}^n , więc punkt x_0^* nie wystąpi, a więc wszystkie przekroje funkcyjonału V są zwarte, $l_0 = \infty$. □

9.5.3. Wyznaczanie obszaru atrakcji

Lemat 9.5.3. Załóżmy, że zachodzi (9.12), a V – spełnia założenia Lematu 9.5.2. Warunkiem wystarczającym na to, aby istniało $k \in (0, l_0)$ takie, że

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(w + h\mathcal{F}(w)) - V(w)] \leq 0 \quad \forall w \in \Omega_k ,$$

gdzie Ω_k oznacza składową zbioru $\Omega_k^* = \{w \in \Omega : V(w) \leq k\}$ zawierającą początek układu, jest aby

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

$$\{w \in \mathbb{R}^n : w^T [\hat{A}^T H + H \hat{A}] w \geq 0\} \cap \{w \in \mathbb{R}^n : d^T w = 0\} = \{0\} \quad (9.68)$$

Dowód. Uwzględniając wypukłość funkcjonału $x \mapsto |d^T x|$ otrzymujemy

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(w + h\mathcal{F}(w)) - V(w)] = \mathcal{F}^T(w)Hw + w^T H\mathcal{F}(w) + z^T \mathcal{F}(w) ,$$

$z \in \partial |d^T w| = \text{dsign } d^T w$, gdzie $\partial |d^T w|$ jest *subgradientem* funkcjonału $x \mapsto |d^T x|$ w punkcie w . Pokażemy, że jeśli

$$\|w\| \leq \min \left\{ \frac{\left[\sqrt{\|k\|^2 + 4\rho(Q) |d^T b|} - \|k\| \right]}{2\rho(Q)}, \frac{|d^T b|}{\|A^T d\|} \right\} > 0 \quad (9.69)$$

$k = A^T d + 2Hb$, $\rho(Q)$ jest promieniem spektralnym macierzy $Q = A^T H + HA$, to

$$\mathcal{F}^T(w)Hw + w^T H\mathcal{F}(w) + z^T \mathcal{F}(w) \leq 0, \quad z \in \partial |d^T w| \quad (9.70)$$

Istotnie, z (9.69) wynika, że jeśli $d^T w = 0$ to $|d^T Aw| \leq |d^T b|$ i na mocy (9.40) mamy

$$\mathcal{F}^T(w)Hw + w^T H\mathcal{F}(w) + z^T \mathcal{F}(w) = \left\{ \begin{array}{l} w^T Qw \pm k^T w + d^T b, \quad \text{gdy } d^T w \neq 0 \\ w^T (\hat{A}^T H + H \hat{A}) w, \quad \text{gdy } \left\{ \begin{array}{l} d^T w = 0 \\ |d^T Aw| \leq |d^T b| \end{array} \right\} \end{array} \right\} \forall z \in \partial |d^T w| \quad (9.71)$$

Ponieważ $w^T Qw \pm k^T w + d^T b \leq \rho(Q) \|w\|^2 + \|k\| \|w\| - |d^T b|$, więc z (9.69) i (9.68) wynika (9.70).

Teraz na podstawie Lematu 9.5.2 widać, że można wybrać liczbę $k \in (0, l_0)$ na tyle małą, by zbiór Ω_k zawierał się w kuli (9.69), co kończy dowód. \square

Z Lematu 9.5.3 wynika, że warunkiem wystarczającym na to, aby dla trójki (Ω, V, l_0) , gdzie Ω, V, l_0 są określone w Lemacie 9.5.2, można było wyznaczyć liczbę $k \in (0, l_0)$ taką, że czwórka (Ω, V, l_0, k) może być podstawiona do Lematu 9.5.1, jest aby, macierz H i \hat{A} spełniały założenia Lematu 9.5.2 i warunek (9.68). Okazuje się, że warunki te można uzyskać, zakładając asymptotyczną stabilność ruchu ślizgowego, zachodzi bowiem następujący lemat, będący wzmocnieniem wyników Weissenbergera [146], [147].

Lemat 9.5.4. Załóżmy, że zachodzi (9.12). Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniała macierz H , spełniająca założenia Lematu 9.5.2 i taka, że para

9.5. WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI

(H, \hat{A}) spełnia (9.68) jest, aby $(n - 1)$ wartości własnych macierzy \hat{A} miało ujemne części rzeczywiste.

Uwaga 9.5.5. Zauważmy, że 0 jest wartością własną macierzy \hat{A} . Istotnie: $\hat{A}x_0 = 0$, gdzie $x_0 = \text{adj } Ab$. Zatem x_0 jest wektorem własnym macierzy \hat{A} , odpowiadającym zerowej wartości własnej.

Dowód. Część wstępna. Bezpośrednio z (9.24) wynika, że

$$d^T \hat{A} = 0^T \quad (9.72)$$

Dokonując blokowej dekompozycji macierzy \hat{A} i wektora d według schematu:

$$d = \begin{bmatrix} d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & a \\ c^T & a_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie $A_{n-1} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{n-1})$, $a, c, d_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $d_n, a_{nn} \in \mathbb{R}$ otrzymamy równoważną postać (9.72),

$$d_{n-1}^T A_{n-1} + d_n c^T = 0^T, \quad d_{n-1}^T a + d_n a_{nn} = 0.$$

Rozważmy macierz:

$$G = \begin{bmatrix} G_{n-1} & g \\ \frac{1}{\|d\|} d_{n-1}^T & \frac{d_n}{\|d\|} \end{bmatrix}, \quad G_{n-1} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad g \in \mathbb{R}^n \quad (9.73)$$

Macierz G jest ortogonalna gdy, $G^T G = G G^T = I$, czemu odpowiada układ

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n-1}^T G_{n-1} + \frac{1}{\|d\|^2} d_{n-1} d_{n-1}^T = I \\ G_{n-1}^T g + \frac{d_n}{\|d\|^2} d_{n-1} = 0 \\ \|g\|^2 + \frac{d_n^2}{\|d\|^2} = 1 \\ G_{n-1} G_{n-1}^T + g g^T = I \\ G_{n-1} d_{n-1} + d_n g = 0 \end{array} \right. \quad (9.74)$$

Jeżeli zauważy się, że wektor d_{n-1} jest wektorem własnym macierzy $d_n^2 I + d_{n-1} d_{n-1}^T$ odpowiadającym wartości własnej $\|d\|^2$, to z (9.74) otrzymamy

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n-1} = I - \alpha_j d_{n-1} d_{n-1}^T \\ g = \beta_j d_{n-1} \end{array} \right\}, \quad j = 1, 2$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

oraz:

$$\alpha_1 = \frac{\|d\| - d_n}{\|d\| \|d_{n-1}\|^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\|d\| + d_n}{\|d\| \|d_{n-1}\|^2}, \quad \beta_1 = \frac{-1}{\|d\|}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\|d\|} .$$

Macierz G dyktuje ortogonalną transformację:

$$y = \begin{bmatrix} z \\ y_n \end{bmatrix} = Gx \quad z \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad y_n \in \mathbb{R} \quad (9.75)$$

która sprowadza równania różniczkowe $\dot{x} = \hat{A}x$ do postaci

$$\dot{y} = G\hat{A}G^T y = \begin{bmatrix} A' & e \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} y \quad (9.76)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A' &= G_{n-1}A_{n-1}G_{n-1}^T + G_{n-1}ag^T + gc^T G_{n-1}^T + a_{nn}gg^T, \\ e &= \frac{1}{\|d\|} [G_{n-1}A_{n-1}d_{n-1} + d_n G_{n-1}a + c^T d_{n-1}g + a_{nn}d_n g] . \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} x^T [\hat{A}^T H + H \hat{A}] x &= y^T [G\hat{A}^T G^T G H G^T + G H G^T G \hat{A} G^T] y = \\ &= y^T \left\{ \begin{bmatrix} (A')^T & 0 \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \tilde{H} + \tilde{H} \begin{bmatrix} (A')^T & e \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \right\} y \end{aligned} \quad (9.77)$$

$$\tilde{H} = G H G^T = \begin{bmatrix} H' & h \\ h^T & h_{nn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{H} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad h \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad h_{nn} \in \mathbb{R} \quad (9.78)$$

Na mocy (9.78), (9.51) i (9.74) mamy także

$$V = y^T \tilde{H} y + \|d\| |y_n| = z^T H' z + y_n h^T z + z^T h y_n + y_n^2 h_{nn} + \|d\| |y_n| \quad (9.79)$$

Warunek konieczny. Zakładamy, że istnieje $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, taka, że spełniony jest warunek (9.52), ewentualnie dodatkowo (9.53) oraz para (H, \hat{A}) jest taka, że spełniony jest warunek (9.68). Z (9.68) wynika, że:

$$x^T [\hat{A}^T H + H \hat{A}] x \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad d^T x = 0 ,$$

przy czym równość ma miejsce tylko dla $x = 0$. Uwzględniając (9.75), (9.77) i (9.78) otrzymamy $z^T [(A')^T H' + H' A'] z \leq 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, przy czym równość ma miejsce tylko dla $z = 0$, a zatem

$$(A')^T H' + H' A' < 0 \quad (9.80)$$

9.5. WYZNACZANIE OBSZARU ATRAKCJI PUNKTU RÓWNOWAGI

Ponieważ (9.52) i (9.53) są spełnione, więc na mocy Lematu 9.5.2: $V(x) \geq 0$ dla $x \in \Omega$, przy czym równość ma miejsce tylko dla $x = 0$. Uwzględniając w tym wyniku (9.75) i (9.79) otrzymamy $V = z^T H' z \geq 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, przy czym równość ma miejsce tylko dla $z = 0$. Stąd

$$H' > 0 \quad (9.81)$$

Odwołując się do teorii macierzowego równania Lapunowa [80, Twierdzenie 3.12, str. 136], [2], [130] z (9.80) i (9.81) otrzymamy $\operatorname{Re} \sigma(A') < 0$, ale wobec (9.76) wynik ten oznacza, że $(n-1)$ -wartości własnych macierzy \hat{A} ma ujemne części rzeczywiste.

Warunek wystarczający. Zakładamy, że $(n-1)$ -wartości własnych macierzy \hat{A} posiada ujemne części rzeczywiste. Wobec (9.76) jest to natychmiast równoważne warunkowi

$$\operatorname{Re} \sigma(A') < 0 \quad (9.82)$$

Z teorii macierzowego równania Lapunowa [80, Twierdzenie 3.12, str. 136], [2], [130] wiadomo, że (9.82) gwarantuje istnienie $H' \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{n-1})$, $H' = (H')^T > 0$,

$$(A')^T H' + H' A' < 0 \quad (9.83)$$

Z (9.83) wynika, że

$$z^T [(A')^T H' + H' A'] z \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n-1} ,$$

przy czym równość ma miejsce tylko dla $z = 0$. Wprowadźmy macierz

$$H := G^T \tilde{H} G = G^T \begin{bmatrix} H' & h \\ h^T & h_{nn} \end{bmatrix} G \quad (9.84)$$

gdzie H' jest macierzą określoną przez (9.83), $h \in \mathbb{R}^{n-1}$, $h_{nn} \in \mathbb{R}$, a G jest macierzą transformacji ortogonalnej (9.75). Twierdzimy, że para (H, \hat{A}) spełnia (9.68), a macierz H czyni zadość założeniom Lematu 9.5.2, tj. spełnia warunki (9.52), (9.53).

Z zależności (9.77), (9.78), (9.75), (9.83) wynika implikacja

$$(d^T x = 0 \iff y_n = 0) \implies x^T [\hat{A}^T H + H \hat{A}] x = z^T [(A')^T H' + H' A'] z \leq 0 ,$$

przy czym równość ma miejsce tylko dla $x = 0$. Jest to równoważne warunkowi (9.68).

Stosując transformację (9.75) do formy kwadratowej $x^T H x$ otrzymamy na podstawie (9.84)

$$x^T H x = y^T G H G^T y = \begin{bmatrix} z \\ y_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H' & h \\ h^T & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y_n \end{bmatrix} .$$

Zatem zachodzi implikacja

$$(d^T x = 0 \iff y_n = 0) \implies x^T H x = z^T H' z \geq 0 ,$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

przy czym równość ma miejsce tylko dla $x = 0$. Z udowodnionej w ten sposób implikacji: $d^T x = 0 \implies x^T H x \geq 0$, z równością tylko dla $x = 0$, wynika równoważny jej warunek (9.52).

Przyjmijmy, że: $\det H = 0 \iff \det \tilde{H} = h_{nn} \det H' - h^T \operatorname{adj} H' h = 0$. Przypuśćmy, że (9.53) nie zachodzi. Zatem $\operatorname{adj} H d = 0$. Stąd

$$d^T \operatorname{adj} H d = 0 \quad (9.85)$$

Z drugiej strony mamy

$$d^T \operatorname{adj} H d = d^T (\operatorname{adj} G) (\operatorname{adj} \tilde{H}) (\operatorname{adj} G^T) d = d^T G^T \operatorname{adj} \begin{bmatrix} H' & h \\ h^T & h_{nn} \end{bmatrix} G d .$$

Korzystając z ostatniego równania układu (9.74) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d^T \operatorname{adj} H d &= \begin{bmatrix} 0 \\ \|d\| \end{bmatrix}^T \operatorname{adj} \begin{bmatrix} H' & h \\ h^T & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \|d\| \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \|d\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & (-\operatorname{adj} H') h \\ -h^T (\operatorname{adj} H') & \det H' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \|d\| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(postać macierzy X jest tutaj nieistotna). Stąd

$$d^T \operatorname{adj} H d = \|d\|^2 \det H' > 0 ,$$

co jest sprzeczne z (9.85). Zatem (9.53) zachodzi.

Warto podkreślić, że powyższy dowód warunku wystarczającego dostarcza konstrukcji macierzy H . \square

Zakładając, że macierz \hat{A} posiada $(n-1)$ -wartości własnych o ujemnych częściach rzeczywistych, widzimy na podstawie Lematu 9.5.4, że istnieje macierz H , taka, że para (H, \hat{A}) spełnia warunek (9.68) i czyni zadość założeniom Lematu 9.5.2. Jednak, jak wynika z dowodu lemtu 9.5.3, warunek (9.68) jest na tyle silny, że jedynym zerem pochodnej: $\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(w + h\mathcal{F}(w)) - V(w)]$ dla w spełniających (9.69) jest $w = 0$, ale to oznacza, że nasze wyjściowe założenie o widmie \hat{A} implikuje w pewien sposób spełnienie warunku (9.41). Wyjaśnienie tego przynosi poniższy lemat.

Lemat 9.5.6. Załóżmy, że zachodzi (9.12). Wtedy

$$d^T \operatorname{adj} A b \neq 0 \iff \det A' \neq 0 \quad (9.86)$$

Dowód. Dzięki (9.24) mamy

$$\text{adj } \hat{A} = (\text{adj } A) \left[\text{adj} \left(I - \frac{1}{d^T b} b d^T \right) \right] = \frac{1}{d^T b} (\text{adj } A) b d^T \quad (9.87)$$

Z (9.87) otrzymamy

$$d^T \text{adj } \hat{A} b = d^T \text{adj } A b \quad (9.88)$$

Równość (9.88) można także otrzymać na innej drodze. W tym celu wystarczy zauważyć, że

$$\begin{bmatrix} A & b \\ d^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{d^T b} d^T A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \frac{1}{d^T b} b d^T A & b \\ d^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & b \\ d^T & 0 \end{bmatrix},$$

skąd przechodząc do wyznaczników otrzymamy (9.88). Z (9.76) wynika, że

$$\begin{aligned} \text{adj } \hat{A} &= \text{adj} \left(G^T \begin{bmatrix} A' & e \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} G \right) = (\text{adj } G) \text{adj} \begin{bmatrix} A' & e \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} (\text{adj } G^T) = \\ &= G^T \left(\text{adj} \begin{bmatrix} A' & e \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \right) G = G^T \begin{bmatrix} 0 & -\text{adj } A' e \\ 0^T & \det A' \end{bmatrix} G \end{aligned} \quad (9.89)$$

Uwzględniając (9.89) w (9.88) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d^T \text{adj } A b &= d^T G^T \begin{bmatrix} 0 & -\text{adj } A' e \\ 0^T & \det A' \end{bmatrix} G b = \\ &= \begin{bmatrix} 0^T & \|d\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\text{adj } A' e \\ 0^T & \det A' \end{bmatrix} G b = \|d\| (\det A') G b \end{aligned} \quad (9.90)$$

Ponieważ $d \neq 0$, $b \neq 0$ i G jest nieosobliwa, więc na podstawie (9.90) widzimy, że zachodzi równoważność (9.86). \square

Dla wyjaśnienia powstałej poprzednio kwestii zauważmy, że założenie o widmie \hat{A} daje $\text{Re } \sigma(A') < 0$, a więc $\det A' \neq 0$, ale teraz na podstawie Lematu 9.5.6 wynika, że zachodzi warunek (9.41).

9.6. PRZYKŁAD

Regulator czasooptymalny dla układu

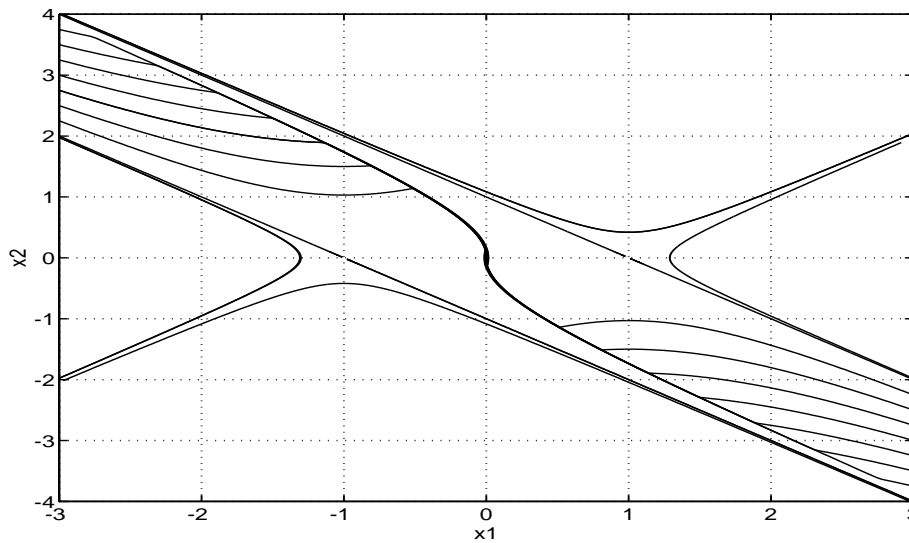
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - u \end{cases}, \quad |u| \leq 1$$

ma postać

$$u = \text{sign} \left[x_2 + \sqrt{x_1^2 + 2|x_1|} \text{sign } x_1 \right].$$

Portret fazowy tego układu przedstawiono na rysunku 9.2.

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM



Rysunek 9.2. Portret fazowy układu czasoptymalnego

Aproksymacja linii komutacji prostą $x_1 + 2x_2 = 0$ prowadzi do układu suboptymalnego

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - \text{sign}(x_1 + 2x_2) \end{cases} \quad (9.91)$$

mającego postać (9.5) z:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $d^T b = -2 < 0$ więc, zgodnie z Lematem 9.3.1, równanie (9.10) posiada rozwiązanie $H_0 \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$, $H_0 = H_0^T > 0$,

$$H_0 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Mamy teraz:

$$\lambda_{\min}(H_0) = \frac{1}{2} \left[\alpha + 2 - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 8} \right], \quad \lambda_{\max}(H_0) = \frac{1}{2} \left[\alpha + 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 8} \right]$$

$$\lambda_{\max}(A^T H_0 + H_0 A) = \alpha + 4 > 0,$$

a zatem na mocy (9.11)

$$\omega(\alpha) = \frac{\lambda + 4}{\alpha + 2 - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 8}}, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Funkcja $\omega(\alpha)$ przyjmuje na przedziale $(\frac{1}{2}, \infty)$ minimum globalne w punkcie $\alpha_0 = 3.5$, równe $\omega(\alpha_0) = 2.5$. Tak więc biorąc $\alpha = \alpha_0 = 3.5$ otrzymamy:

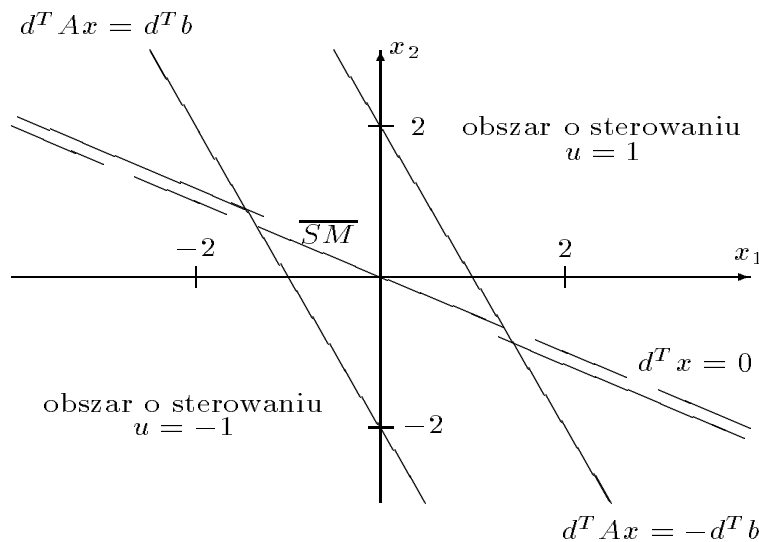
$$H_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\min}(H_0) = \frac{3}{2}, \quad \lambda_{\max}(H_0) = 4.0$$

i w konsekwencji $\omega \geq 2.5$.

Zgodnie z Twierdzeniem 9.3.4, jedyne rozwiązanie $x = x(\cdot, x_0)$ problemu (9.7) i (9.8) jakie istnieje dla naszej trójki (A, b, d) jest rozwiązaniem w sensie Filippowa dla układu (9.5), (9.6) oraz definiuje ono **CSDS** na \mathbb{R}^2 . Więcej z oszacowania (9.19) i twierdzenia Rayleigha wynika, że

$$\|x(t, x_0^1) - x(t, x_0^2)\|_e \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)}} e^{\omega t} \|x_0^1 - x_0^2\|_e = \sqrt{\frac{8}{3}} e^{2.5t} \|x_0^1 - x_0^2\|_e,$$

gdzie $\|\cdot\|_e$ oznacza normę euklidesową w \mathbb{R}^n . Wynikające z Twierdzenia 9.4.1 i Uwagi 9.3.3, rozbitcie przestrzeni \mathbb{R}^2 na obszary charakteryzujące się odmiennym sterowaniem przedstawione jest na rysunku 9.3 wraz z lokalizacją ruchów ślizgowych.



Rysunek 9.3. Dekompozycja płaszczyzny stanu na obszary o różnym sterowaniu i lokalizacja ruchów ślizgowych

Ponieważ:

$$\det A = -1 \neq 0, \quad d^T A^{-1} b = -1 < 0,$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

więc z Twierdzenia 9.4.3 wynika, że $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ są punktami osoblwymi.

Macierz \hat{A} wyznaczamy ze wzoru (9.24),

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Widmo macierzy \hat{A} tworzą liczby: $\{0\}$, $\{-\frac{1}{2}\}$, a zatem \hat{A} posiada $n - 1 = 1$ wartości własnych o ujemnych częściach rzeczywistych, co na mocy Lematu 9.5.4 oznacza, że istnieje macierz H spełniająca założenia Lematu 9.5.2 i czyniąca wraz z \hat{A} zadość warunkowi (9.52). Wyznaczenia ogólnej postaci H może być oparte na procedurze opisanej w dowodzie Lematu 9.5.4. Za pomocą wzorów (9.73) i (9.74) znajdujemy

$$G = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = G^T .$$

Z (9.76) otrzymujemy $A' = -\frac{1}{2}$. H' wyznaczamy z zależności (9.80):

$$2H'A' = -q, \quad q > 0, \quad q - \text{dowolne} .$$

Biorąc dowolne liczby rzeczywiste h , h_{22} ze wzoru (9.84) znajdujemy

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} q & h \\ h & h_{22} \end{bmatrix} \iff H = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4q - 4h + h_{22} & -2q - 3h + 2h_{22} \\ -2q - 3h + 2h_{22} & q + 4h + 4h_{22} \end{bmatrix} .$$

Z (9.71) wynika, że wybór H w taki sposób, aby

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + H A \geq 0 \\ 2Hb + A^T d = 0 \end{array} \right\} \quad (9.92)$$

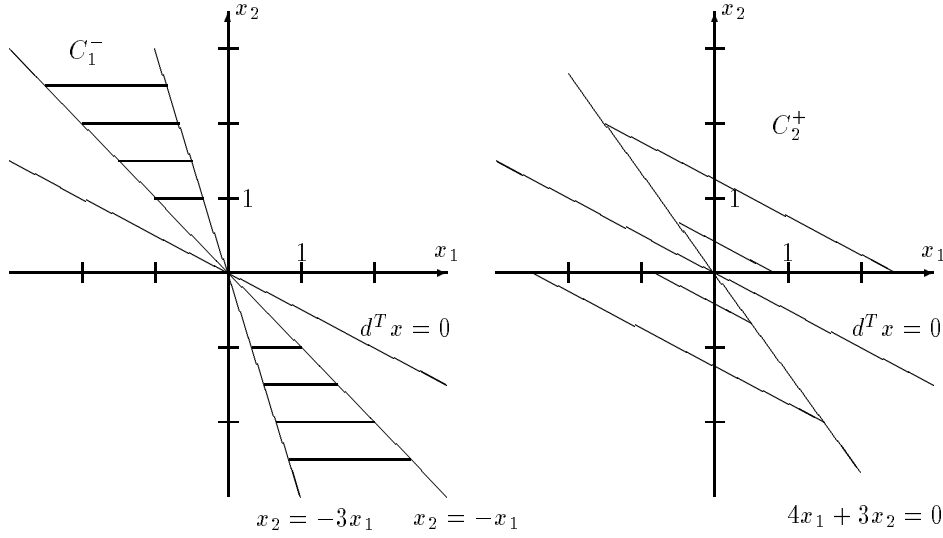
upraszcza postać pochodnej D^+V funkcjonału (9.51). Otrzymamy stąd macierz

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

odpowiadającą parametrom $q = \frac{1}{2}$, $h = -1.0$, $h_{22} = \frac{3}{2}$ (drugie rozwiązanie układu (9.92) odpowiada $q < 0$ i nie jest dopuszczalne). Wtedy

$$A^T H + H A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \hat{A}^T H + H \hat{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Sprawdzamy, że są spełnione warunki (9.52) i (9.68), co objaśnia rysunek 9.4.



Rysunek 9.4. Weryfikacja warunków (9.52), (9.68). W stożku \$C_1^-\$ forma kwadratowa \$x^T H x\$ nie przyjmuje wartości dodatnich, a w stożku \$C_2^+\$ forma kwadratowa \$x^T (\hat{A}^T H + H \hat{A}) x\$ nie przyjmuje wartości ujemnych

Na podstawie Lematu 9.5.2 znajdujemy \$\alpha = 10\$, \$l_0 = \frac{5}{2}\$. Zbiór poziomicowy \$\Omega_l^*\$ funkcjonału (9.51) posiada dla \$l < l_0\$ składową zwartą \$\Omega_l\$ otaczającą początek układu. Ponadto

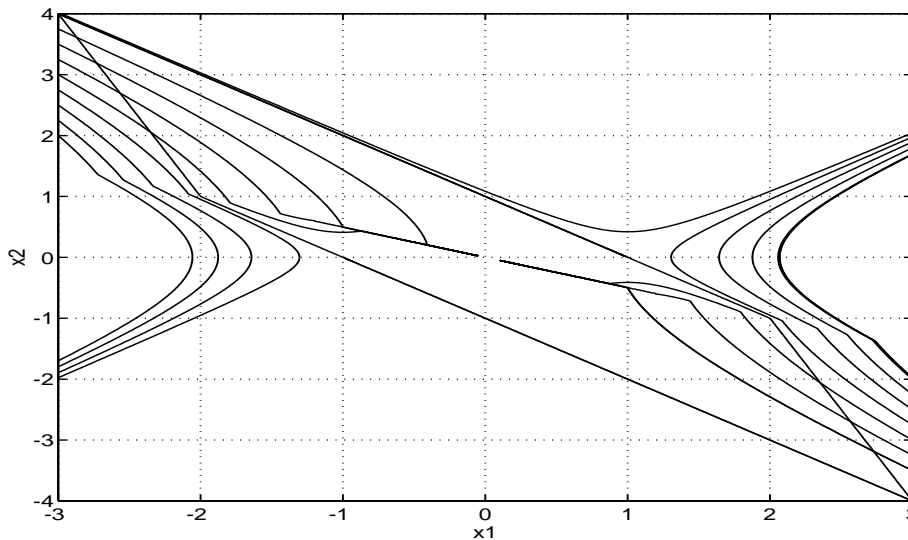
$$\begin{aligned}
 D^+V(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(x + h\mathcal{F}(x)) - V(x)}{h} = \\
 &= \mathcal{F}^T(x)Hx + x^T H \mathcal{F}(x) + \left\{ \begin{array}{ll} d^T \mathcal{F}(x), & \text{gdy } d^T x > 0 \\ |d^T \mathcal{F}(x)|, & \text{gdy } d^T x = 0 \\ -d^T \mathcal{F}(x), & \text{gdy } d^T x < 0 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} x^T (A^T H + HA) x + 2b^T Hx + d^T Ax + d^T b, & \text{gdy } d^T x > 0 \text{ lub} \\ & d^T x = 0, \quad d^T Ax > |d^T b| \\ x^T (A^T H + HA) x - 2b^T Hx - d^T Ax + d^T b, & \text{gdy } d^T x < 0 \\ & d^T x = 0, \quad -d^T Ax > |d^T b| \\ x^T (\hat{A}^T H + H \hat{A}) x, & \text{gdy } d^T x = 0, \\ & |d^T Ax| \leq |d^T b| \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} 2(x_1 + x_2)^2 - 2, & \text{gdy } x_1 + 2x_2 \neq 0 \text{ lub} \\ & x_1 + 2x_2 = 0, \quad |2x_1 + x_2| > 2 \\ \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2, & \text{gdy } x_1 + 2x_2 = 0, \quad |2x_1 + x_2| \leq 2 \end{array} \right\} \leq 0
 \end{aligned}$$

9. UKŁADY LURIE Z PRZEKAŹNIKIEM

dla każdego $x \in \{(x_1, x_2) : |x_1 + 2x_2| < l\}$ z równością tylko dla $x = 0$. Estymata obszaru atrakcji początku układu, wyznaczona z Lematu 9.5.1,

$$\Omega_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}(2x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + |x_1 + 2x_2| < \frac{5}{2}, |x_1 + 2x_2| < 10 \right\} \quad (9.93)$$

jest przedstawiona na rysunku 9.5.



Rysunek 9.5. Portret fazowy układu suboptymalnego z zaznaczoną estymatą obszaru atrakcji

Zauważmy, że konstrukcja funkcjonału Lapunowa i estymaty obszaru atrakcji początku układu może być także zrealizowana podobnie do wyników przedstawionych w dowodzie Twierdzenia 6.1.5. Jeżeli istnieje $q \geq 0$ i $k > 0$, dla których układ

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + H A - k d d^T = -g g^T \\ H b + \frac{q}{2} A^T d + \frac{1}{2} d = -\sqrt{-q d^T b g} \end{array} \right\} \quad (9.94)$$

posiada rozwiązanie (H, g) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$, $g \in \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T \left(\hat{A}^T H + H \hat{A} \right) x \geq 0 \right\} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d^T x = 0 \right\} = \{0\} \quad ,$$

to pochodną D^+V funkcjonału $V(x) = x^T H x + q |d^T x|$ wzdłuż rozwiązań układu (9.7), (9.8) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
D^+V(x) &= \mathcal{F}^T(x)Hx + x^T H\mathcal{F}(x) + q \left\{ \begin{array}{ll} d^T \mathcal{F}(x), & \text{gdy } d^T x > 0 \\ |d^T \mathcal{F}(x)|, & \text{gdy } d^T x = 0 \\ -d^T \mathcal{F}(x), & \text{gdy } d^T x < 0 \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} x^T (A^T H + HA)x + 2b^T Hx + qd^T Ax + qd^T b, & \text{gdy } d^T x > 0 \text{ lub} \\ & d^T x = 0, d^T Ax > |d^T b| \\ x^T (A^T H + HA)x - 2b^T Hx - qd^T Ax + qd^T b, & \text{gdy } d^T x < 0 \text{ lub} \\ & d^T x = 0, -d^T Ax > |d^T b| \\ x^T (\hat{A}^T H + H\hat{A})x, & \text{gdy } d^T x = 0, \\ & |d^T Ax| \leq |d^T b| \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} - \left(g^T x + \sqrt{-qd^T b} \text{sign } d^T x \right)^2 - |d^T x| (1 - k |d^T x|) , \\ \quad \quad \quad x^T (\hat{A}^T H + H\hat{A})x , \\ - \left(g^T x + \sqrt{-qd^T b} \right)^2 , \\ - \left(g^T x - \sqrt{-qd^T b} \right)^2 , \end{array} \right. \\
&\left. \begin{array}{l} \text{gdy } d^T x \neq 0 \\ \text{gdy } d^T x = 0, \quad d^T Ax \leq |d^T b| \\ \text{gdy } d^T x = 0, \quad d^T Ax > |d^T b| \\ \text{gdy } d^T x = 0, \quad -d^T Ax > |d^T b| \end{array} \right\} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |d^T x| \leq \frac{1}{k} ,
\end{aligned}$$

przy czym największym zbiorem mocno-inwariantym zawartym w zbiorze

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : k |d^T x| < 1, D^+V(x) = 0\}$$

jest zerowy punkt równowagi. Na podstawie Lematu 9.5.1 otrzymuje się następującą estymatę obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi

$$\Omega_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |d^T x| \leq \frac{1}{k}, x^T Hx + q |d^T x| < q + \frac{k^2 \det H}{d^T \text{adj } Hd} \right\} \quad (9.95)$$

Jeżeli para (A, b) jest sterowalna, to rozwiązanie układu (9.94) można określić korzystając ze wzorów (6.27) ÷ (6.29). Tak właśnie jest w przypadku układu (9.91). Ponieważ macierz $A + \mu b d^T$ jest hurwitzowska dla $\mu > 1$ więc najmniejsze $k > 0$, przy którym nierówność częstotliwościowa (6.18) może być spełniona dla pewnego $q \in \mathbb{R}$ jest $k = 1$. Zgodnie z (9.13)

$$G(s) = d^T (A - sI)^{-1} b = \frac{2s + 1}{s^2 - 1}$$

i dla $k = 1, q \geq 0$ mamy

$$\text{Re } G(j\omega) - \omega q \text{Im } G(j\omega) + |G(j\omega)|^2 = \frac{2q\omega^4 + (2q + 3)\omega^2}{(\omega^2 + 1)^2} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Zatem $k = 1$. Obliczeń nie będziemy jednak kontynuować, gdyż estymata (9.95) jest konserwatywna w porównaniu z (9.93). Wynika to z faktu, że Ω_2 zawiera się w pasie $|d^T x| \leq 1$.

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE

10.1. UKŁADY Z BEZPOŚREDNIM STEROWANIEM

10.1.1. Sprowadzenie problemu do standardowego układu Lurie

Części liniowe układów Lurie rozpatrywanych w innych rozdziałach nie zawierały *bezpośredniego sterowania*. Rozważmy teraz układ z bezpośrednim oddziaływaniem sterowania na wyjście

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \\ (y(t), u(t)) \in F \end{array} \right\}, \quad t \geq 0 \quad (10.1)$$

gdzie $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest operatorem wielowartościowym opisującym sprzężenie zwrotne. Z dwu ostatnich równań układu (10.1) i definicji 9.1.2 wynika, że

$$(c^T x, y) \in (I - dF)^{-1}.$$

Jeżeli $(I - dF)^{-1}$ jest *wykresem* skalarnej, lokalnie lipschitzowskiej, zerującej się w zerze funkcji, którą dla prostoty oznaczymy tym samym symbolem, to otrzymamy

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (I - dF)^{-1}(c^T x) \\ u = \frac{1}{d}(I - dF)^{-1}(c^T x) - \frac{1}{d}c^T x \end{array} \right\} \quad (10.2)$$

Uwzględniając (10.2) w pierwszym równaniu układu (10.1) dostajemy układ Lurie bez bezpośredniego sterowania

$$\dot{x} = \left(A - \frac{1}{d}bc^T \right) x + \frac{1}{d}b(I - dF)^{-1}(c^T x) \quad (10.3)$$

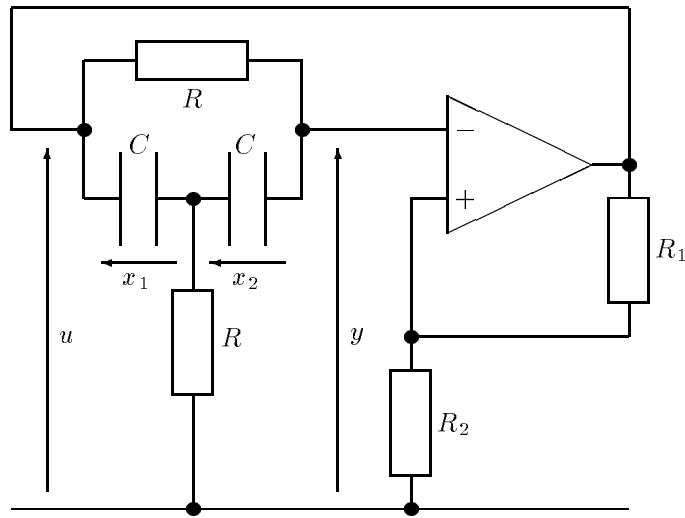
Teraz stabilność zerowego punktu równowagi może być analizowana z wykorzystaniem Twierdzenia 6.1.5.

10.1.2. Przykład. Oscylator z filtrem typu T

Równania stanu oscylatora z filtrem typu T, przedstawionego na rysunku 10.1, mają postać (10.1) z:

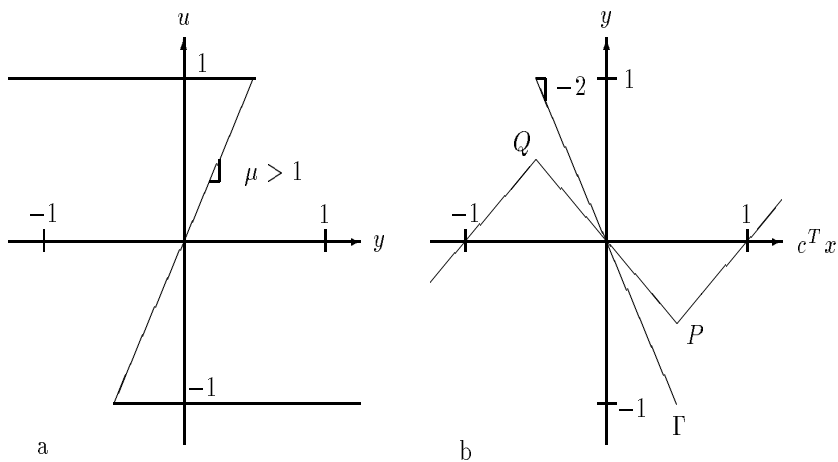
$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d = 1$$

i operatorem wielowartościowym F o wykresie przedstawionym na rysunku 10.2a.



Rysunek 10.1. Oscylator z mostkiem typu T

Ponieważ analizujemy asymptotyczne zachowanie się systemu możemy bez straty ogólności rozważać przyjąć $RC = 1$. Nachylenie $\mu > 1$ zależy od doboru rezystancji R_1, R_2 . Operator $(I - F)^{-1}$ jest lokalnie lipschitzowską funkcją skalarną, zerującą się w zerze, o wykresie przedstawionym na rysunku 10.2b.



Rysunek 10.2. Wykresy operatorów wielowartościowych: a) operator F ; b) operator $(I - F)^{-1}$. Γ – granica stabilności, $Q = ((\mu - 1)/\mu, 1/\mu)$, $P = ((1 - \mu)/\mu, 1/\mu)$

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE

Układ (10.3) przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + (I - F)^{-1}(-x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (10.4)$$

Z Twierdzenia 6.1.5 (przypadek **(II)**) z $q = 0$, $k_1 = -2$) wynika, że układ Lurie (6.21) z:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

jest **ABSS** w sektorze $(-2, \infty)$. Porównując ten wynik z (10.4) widzimy, że dla $\mu > \frac{3}{2}$ wykres $(I - F)^{-1}$ mieści się w sektorze **ABSS** i układ (10.4) jest **GAS**.

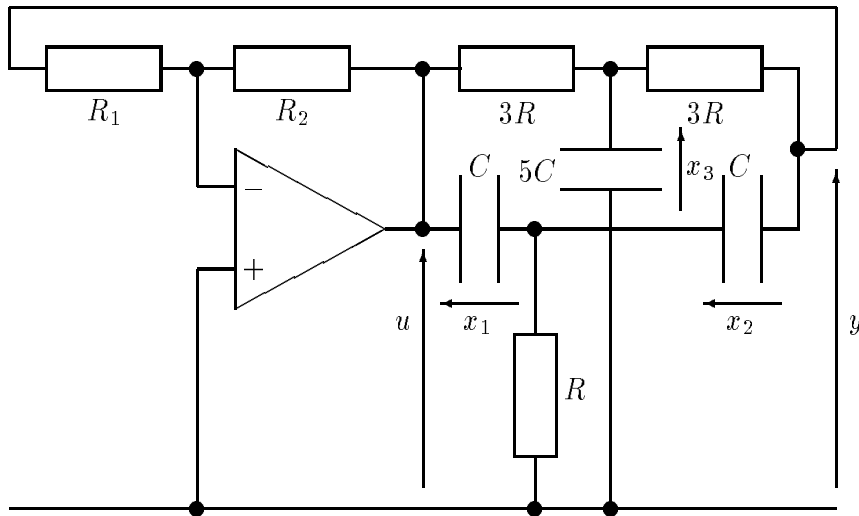
Z drugiej strony, transformacja liniowa $X = -x_1 - x_2$, $Y = -x_2$ przeprowadza (10.4) w układ

$$\begin{cases} \dot{X} = Y - 2X - (I - F)^{-1}(X) \\ \dot{Y} = -X \end{cases},$$

równoważny układowi Liénarda (7.7). Z Uwagi 7.3.1 wynika, że dla $\mu < \frac{3}{2}$ w układzie wzbudzają się drgania okresowe.

10.1.3. Przykład. Generator z filtrem typu 2T

Równania stanu oscylatora z filtrem typu 2T, przedstawionego na rysunku 10.3,



Rysunek 10.3. Oscylator z mostkiem typu 2T

mają postać (10.1) z:

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = 1 .$$

Bez straty ogólności rozważań przyjęto $RC = 1$. Ze względu na odmienny niż w przykładzie poprzednim sposób aplikacji wzmacniacza operacyjnego F jest wykresem funkcji, którą dla prostoty zapisu oznaczymy tym samym symbolem,

$$F(y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } y \leq -\frac{1}{\mu} \\ -\mu y, & \text{gdy } |y| < \frac{1}{\mu} \\ -1, & \text{gdy } y \geq \frac{1}{\mu} \end{cases},$$

gdzie μ jest parametrem dodatnim, zależnym od doboru rezystancji R_1, R_2 . $(I - F)^{-1}$ jest także wykresem funkcji,

$$(I - F)^{-1}(y) = \begin{cases} y + 1, & \text{gdy } y \leq -\frac{\mu + 1}{\mu} \\ \frac{1}{\mu + 1}y, & \text{gdy } |y| < \frac{\mu + 1}{\mu} \\ y - 1, & \text{gdy } y \geq \frac{\mu + 1}{\mu} \end{cases} \quad (10.5)$$

Układ (10.3) przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}(I - F)^{-1}(c^T x) \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}(I - F)^{-1}(c^T x) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{15}x_1 + \frac{1}{15}x_2 - \frac{2}{15}x_3 + \frac{2}{15}(I - F)^{-1}(c^T x) \end{cases} \quad (10.6)$$

tj. postać $n = 3$ -wymiarowego układu Lurie (6.21) z:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE

i funkcją $f = (I - F)^{-1}$ zdefiniowaną przez (10.5). Do dalszych obliczeń wybieramy trójkę (A, b, c) jak w (10.7). Transmitancja liniowej części układu wynosi

$$G(s) = c^T (A - sI)^{-1} b = \frac{\frac{5}{3}s^2 + \frac{7}{15}s}{s^3 + \frac{2}{15}s^2 + \frac{2}{45}s + \frac{1}{45}}.$$

Macierz $(A + \mu bc^T)$ jest hurwitzowska dla $\mu > \frac{-46 + \sqrt{7891}}{525}$. Dla:

$$k_1 = \frac{-46 + \sqrt{7891}}{525} > 0, \quad q = \frac{45(-597 + 7\sqrt{7891})}{2(7891 + 4\sqrt{7891})} > 0$$

mamy

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} G(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} G(j\omega) + k_1 |G(j\omega)|^2 = \\ & = \frac{\frac{5}{3}q\omega^2 (\omega^2 - \Omega)^2}{\left(\frac{1}{45} - \frac{2}{15}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{2}{45}\omega - \omega^3\right)^2} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \Omega = \frac{4 + \sqrt{7891}}{1125}, \end{aligned}$$

a zatem nierówność częstotliwościowa (6.18) jest spełniona. Z Twierdzenia 6.1.5 wynika, że zerowy punkt równowagi układu (10.6) jest **GAS**, gdy

$$\frac{1}{1 + \mu} > k_1 \iff \mu < \frac{35 + \sqrt{7891}}{11}.$$

Dla $\mu < \frac{35 + \sqrt{7891}}{11}$ zerowy punkt równowagi traci stabilność ale, zgodnie z Twierdzeniem 7.4.4, układ (10.6) jest dyssypatywny.

10.2. UKŁADY Z NIELINIOWOŚCIAMI RÓŻNICZKOWALNYMI

10.2.1. Konstrukcja funkcjonału Lapunowa. Kryterium stabilności

Systemy z nieliniowościami różniczkowalnymi były analizowane w [64], [150], [118], [66], [22], [97], [8], podczas gdy artykuły [131], [132], [133], [134] są poświęcone badaniom układów z nieliniowościami wykazującymi pewne własności symetrii, nieparzystości i/lub monotoniczności. Rezultaty opisane w tym podrozdziale stanowią pomost pomiędzy klasycznymi ujęciami tematu [64] (podobna konstrukcja funkcjonału Lapunowa), a podejściami nowoczesnymi [53], [54] (uproszczenie rezultatów poprzez stosowanie ograniczeń nakładanych wyłącznie na pochodną charakterystyki nieliniowego sprzężenia zwrotnego).

10.2. UKŁADY Z NIELINIOWOŚCIAMI RÓŻNICZKOWALNYMI

Rozważać będziemy układ Lurie:

$$\dot{x} = Ax + bF(c^T x), \quad F \in C^1(\mathbb{R}) \quad (10.8)$$

Dla układu (10.8) będziemy konstruować funkcjonal Lapunowa postaci

$$V(x) = x^T Hx + 2h^T xF + \gamma F^2 + q \int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma \quad (10.9)$$

Pochodną \dot{V} funkcjonału (10.9) wzdłuż rozwiązań układu (10.8) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Hx + x^T H\dot{x} + 2h^T \dot{x}F + 2h^T x\dot{F} + 2\gamma F\dot{F} + qF c^T \dot{x} = \\ &= x^T A^T Hx + Fb^T Hx + x^T HAx + x^T HbF + 2h^T AxF + \\ &+ 2h^T bF^2 + 2h^T x\dot{F} + 2\gamma F\dot{F} + qF c^T Ax + qF^2 c^T b = \\ &= \begin{bmatrix} x \\ F \\ \dot{F} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T H + HA & Hb + A^T h + \frac{q}{2} A^T c & h \\ b^T H + h^T A + \frac{q}{2} c^T A & 2h^T b + qc^T b & \gamma \\ h^T & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F \\ \dot{F} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Zakładamy, że na pochodną charakterystyki nieliniowego sprzężenia zwrotnego nakładane są ograniczenia

$$0 < F'(\sigma) < k \quad \forall \sigma \in \mathbb{R} \quad (10.11)$$

Aby uwzględnić ograniczenia (10.11) dodajemy do i odejmujemy od prawej strony (10.10) wyrażenie

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left[1 - \frac{1}{k} F'(\sigma)\right] F'(\sigma) (\dot{\sigma})^2 = \left[\dot{\sigma} - \frac{1}{k} F'(\sigma) \dot{\sigma}\right] F'(\sigma) \dot{\sigma} = \\ &= (c^T Ax + c^T bF - \frac{1}{k} \dot{F}) \dot{F} = \begin{bmatrix} x \\ F \\ \dot{F} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} A^T c \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} c^T b \\ \frac{1}{2} c^T A & \frac{1}{2} c^T b & -\frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F \\ \dot{F} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

W efekcie otrzymujemy

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ F \\ \dot{F} \end{bmatrix}^T D \begin{bmatrix} x \\ F \\ \dot{F} \end{bmatrix} - \left[1 - \frac{1}{k} F'(\sigma)\right] F'(\sigma) (\dot{\sigma})^2,$$

gdzie macierz D jest równa

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE

$$D = \begin{bmatrix} A^T H + H A & H b + A^T h + \frac{q}{2} A^T c & h + \frac{1}{2} A^T c \\ b^T H + h^T A + \frac{q}{2} c^T A & 2h^T b + q c^T b & \gamma + \frac{1}{2} c^T b \\ h^T + \frac{1}{2} c^T A & \gamma + \frac{1}{2} c^T b & -\frac{1}{k} \end{bmatrix},$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$A_1 := \begin{bmatrix} A & b \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$K := \begin{bmatrix} 0 & \frac{q}{2} A^T c \\ \frac{q}{2} c^T A & q c^T b \end{bmatrix}, \quad e_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A^T c \\ \frac{1}{2} c^T b \end{bmatrix}.$$

Przy powyższych oznaczeniach mamy: $D \leq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ rozwiązujący równań Lurie

$$\begin{cases} A_1^T H_1 + H_1 A_1 + K &= -g_1 g_1^T \\ H_1 b_1 + e_1 &= -\sqrt{\frac{1}{k}} g_1 \end{cases} \quad (10.12)$$

posiada rozwiązanie (H_1, g_1) , $H_1 = H_1^T \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^{n+1})$, $g_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$H_1 := \begin{bmatrix} H & h \\ h^T & \gamma \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} g \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Uwaga 10.2.1. Rozpisaną postacią układu (10.12) jest

$$\begin{cases} A^T H + H A &= -g g^T \\ H b + A^T h + \frac{q}{2} A^T c &= -\delta g \\ 2b^T h + \frac{1}{2} c^T b &= -\delta^2 \\ h + \frac{1}{2} A^T c &= -\sqrt{\frac{1}{k}} g \\ \gamma + \frac{1}{2} c^T b &= -\sqrt{\frac{1}{k}} \delta \end{cases} \quad (10.13)$$

Jeżeli układ (10.12) posiada rozwiązanie (H_1, g_1) to

$$\dot{V}(x) \leq - \left[1 - \frac{1}{k} F'(\sigma) \right] F'(\sigma) (\dot{\sigma})^2 \leq 0 \quad (10.14)$$

i funkcjonal (10.9) jest funkcjonalem Lapunowa dla (10.8).

Ponieważ para (A_1, b_1) jest sterowalna wtedy i tylko wtedy, gdy para (A, b) jest *sterowalna*, więc do ustalenia, czy układ (10.12) posiada rozwiązanie można zastosować Lemat 6.1.4. Porównując (10.12) z (6.3) i korzystając z Lematu 6.1.4 wnosimy, że nierówność częstotliwościowa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} + e_1^T (A_1 - j\omega I)^{-1} b_1 + b_1^T (A_1^T + j\omega I)^{-1} e_1 - \\ & - b_1^T (A_1^T + j\omega I)^{-1} K (A_1 - j\omega I)^{-1} b_1 \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A_1) \end{aligned} \quad (10.15)$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwiązalności układu (10.12). Zauważmy, że

$$(A_1 - sI)^{-1} b_1 = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} (A - sI)^{-1} b \\ -1 \end{bmatrix},$$

a stąd dzięki tożsamości (2.21),

$$e_1^T (A_1 - j\omega I)^{-1} b_1 = \frac{1}{2} G(j\omega), \quad -b_1^T (A_1^T + j\omega I)^{-1} K (A_1 - j\omega I)^{-1} b_1 = \frac{q}{\omega^2} \operatorname{Re}[j\omega G(j\omega)],$$

gdzie G oznacza transmitancję liniowej części systemu i wyraża się wzorem (2.40). Ostatecznie (10.15) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} G(j\omega) - \frac{q}{\omega} \operatorname{Im} G(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad j\omega \notin \lambda(A) \quad (10.16)$$

Z (10.14) i (10.11) wynika inkluzja

$$E_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} \subseteq E_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : c^T \dot{x} = c^T A x + c^T b F(c^T x) = 0\}.$$

Jeżeli $x(\cdot, x_0)$ jest rozwiązaniem (10.8) zawartym w E_2 to musi być

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t, x_0) = A \dot{x}(t, x_0) \\ c^T \dot{x}(t, x_0) = 0 \end{array} \right\}, \quad t \geq 0.$$

Przy założeniu *obserwowalności* pary (A, c^T) otrzymujemy $\dot{x}(t, x_0) \equiv 0$, co oznacza, że wtedy E_2 jest zbudowany z punktów równowagi układu (10.8). Dla zagwarantowania, że początek układu współrzędnych jest punktem równowagi zakładamy

$$F(0) = 0 \quad (10.17)$$

Warunki (10.11) i (10.17) implikują warunek sektorowy

$$0 < \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k \quad \forall \sigma \neq 0 \quad (10.18)$$

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE

Istotnie, na mocy (10.11) funkcja $\sigma \mapsto F(\sigma) - k\sigma$ jest rosnąca, a ponieważ dzięki (10.17) zeruje się w zerze, więc dla $\sigma > 0$ wykres F leży nad, a dla $\sigma < 0$ pod wykresem funkcji liniowej $\sigma \mapsto k\sigma$. Podobnie $F'(\sigma) > 0$ wraz z (10.17) pozwala ustalić, że dla $\sigma > 0$ wykres F leży nad, a dla $\sigma < 0$ – pod osią 0σ .

Założmy także, że

$$\operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu \in (0, k) \quad (10.19)$$

Wtedy z pierwszej metody Lapunowa (metody linearyzacji) wynika, że początek układu jest lokalnie **AS** dla dowolnej F spełniającej (10.11).

Wykażemy teraz, że przy założeniu sterowalności pary (A, b) i obserwowalności pary (A, c^T) zbiór punktów równowagi składa się wyłącznie z początku układu współrzędnych, tzn. równanie

$$Ax + bF(c^T x) = 0 \quad (10.20)$$

posiada tylko zerowe rozwiązanie. Dla dowodu rozważmy dwa przypadki.

1°. $\det A = 0$. Mnożąc (10.20) z lewej strony przez $c^T \operatorname{adj} A$ dostajemy

$$c^T \operatorname{adj} AbF(c^T x) = 0 .$$

Zauważmy, że $c^T \operatorname{adj} Ab \neq 0$. Gdyby tak nie było, to $s = 0$ byłby pierwiastkiem wielomianu $c^T \operatorname{adj}(A - sI)b$ stanowiącego licznik transmitancji (2.40), a ponieważ założyliśmy, że $s = 0$ jest biegunem transmitancji, więc wystąpiłaby degeneracja transmitancji (skrócenie licznika i mianownika przez s). Na mocy twierdzenia Popova [128, str. 534 - 535], [40, str. 48] jest to sprzeczne ze sterowalnością pary (A, b) i obserwowalnością (A, c^T) . Ponieważ $c^T \operatorname{adj} Ab \neq 0$, więc $F(c^T x) = 0$. Dzięki (10.17) i (10.18) mamy $c^T x = 0$. Rozwiązanie osobliwe $x(\cdot, x_0)$ spełnia zatem układ

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t, x_0) = Ax(t, x_0) \\ c^T x(t, x_0) = 0 \end{array} \right\}, \quad t \geq 0 .$$

Stąd, wobec obserwowalności pary (A, c^T) mamy $x(t, x_0) \equiv 0$.

2°. $\det A \neq 0$. Mnożąc (10.20) z lewej strony przez $c^T A^{-1}$ dostajemy

$$c^T x + G(0)F(c^T x) = 0 .$$

Przypuśćmy, że $c^T x \neq 0$. Wtedy dla $\mu = \frac{F(c^T x)}{c^T x}$ mamy $1 + \mu G(0) = 0$. Na mocy (10.18), oznacza to, że istnieje $\mu \in (0, k)$, dla którego $s = 0$ jest biegunem układu zamkniętego, co jest sprzeczne z (10.19). Zatem $c^T x = 0$. Powtarzając dyskusję poprzedniego przypadku ustalamy, że 0 jest jedynym punktem równowagi.

Ostatecznie pokazaliśmy, że $E_1 = E_2 = \{0\}$. Z Twierdzenia 2.1.6 wynika teraz, że każde ograniczone rozwiązanie układu (10.8) zdąża do zerowego punktu równowagi.

Jak wiemy, zerowy punkt równowagi jest lokalnie **AS**. Zatem dla dowodu **GAS** wystarczy udowodnić, że wszystkie rozwiązania są ograniczone. Zgodnie z Twierdzeniem 7.1.3 wymaga to wykazania, że warunek (7.2) jest spełniony. Funkcja liniowa $F(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu \in (0, k)$ spełnia warunki (10.11) i (10.17). W tym przypadku układ (10.8) staje się układem liniowym

$$\dot{x} = (A + \mu bc^T) x \quad (10.21)$$

a funkcjonal (10.9) przyjmuje postać formy kwadratowej

$$V_\mu(x) = x^T \left[H + \mu hc^T + \mu ch^T + \gamma \mu^2 cc^T + \frac{q\mu}{2} cc^T \right] x .$$

Z (10.14) wynika, że pochodna \dot{V}_μ formy kwadratowej V_μ wzdłuż rozwiązań układu (10.21) spełnia nierówność

$$\dot{V}_\mu(x) \leq -\mu \left(1 - \frac{\mu}{k} \right) [c^T (A + \mu bc^T) x]^2 .$$

Teraz z (10.19) wynika, że

$$V_\mu(x_0) \geq \mu \left(1 - \frac{\mu}{k} \right) \int_0^\infty [c^T (A + \mu bc^T) e^{t(A + \mu bc^T)} x_0]^2 dt \geq 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n .$$

Całka znika dla tych $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dla których

$$c^T (A + \mu bc^T) e^{t(A + \mu bc^T)} x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0 .$$

Ponieważ para (A, c^T) jest obserwowalna, więc para $(A + \mu bc^T, c^T)$ też jest obserwowalna. Wobec wynikającej z (10.19) nieosobliwości macierzy $A + \mu bc^T$, $\mu \in (0, k)$, para $(A + \mu bc^T, c^T (A + \mu bc^T))$ jest obserwowalna. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że jej macierz obserwowalności powstaje przez lewostronne przemnożenie przez $A + \mu bc^T$ macierzy obserwowalności pary $(A + \mu bc^T, c^T)$. Dzięki obserwowalności pary $(A + \mu bc^T, c^T (A + \mu bc^T))$ mamy

$$V_\mu(x_0) > 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \neq 0 .$$

W ten sposób pokazaliśmy, że

$$H + \mu hc^T + \mu ch^T + \gamma \mu^2 cc^T + \frac{q\mu}{2} cc^T > 0 \quad \forall \mu \in (0, k) \quad (10.22)$$

Jeżeli $c^T x = 0$ to $V(x) = x^T H x = V_\mu(x)$ i z (10.22) dostajemy

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, c^T x = 0} V(x) = \infty .$$

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE

Jeżeli $c^T x \neq 0$ to $V(x)$ zapisujemy w postaci

$$V(x) = x^T \left[H + \frac{F(c^T x)}{c^T x} hc^T + ch^T \frac{F(c^T x)}{c^T x} + \gamma \left[\frac{F(c^T x)}{c^T x} \right]^2 cc^T + \frac{q}{2} \frac{F(c^T x)}{c^T x} cc^T \right] + q \left[\int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma - \frac{1}{2} c^T x F(c^T x) \right] .$$

Funkcja

$$\mathbb{R} \ni \mu \longmapsto \lambda_{\min} \left(H + \mu hc^T + \mu ch^T + \gamma \mu^2 cc^T + \frac{q\mu}{2} cc^T \right)$$

jest ciągła i dzięki (10.22) w przedziale $(0, k)$ przyjmuje wartości dodatnie, a w przedziale $[0, k]$ – wartości nieujemne. Przyjmijmy mocniejsze założenie, że funkcja ta jest dodatnia w przedziale $[0, k]$ lub, równoważnie, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\lambda_{\min} \left(H + \mu hc^T + \mu ch^T + \gamma \mu^2 cc^T + \frac{q\mu}{2} cc^T \right) \geq \varepsilon \quad \forall \mu \in [0, k] \quad (10.23)$$

Założenie (10.23) jest spełnione, gdy zamiast (10.11) zachodzi mocniejszy warunek

$$0 < \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} F'(\sigma) \leq F'(\sigma) \leq \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} F'(\sigma) < k \quad \forall \sigma \in \mathbb{R} \quad (10.24)$$

którego konsekwencją jest wzmocniony warunek sektorowy

$$0 < \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \frac{F(\sigma)}{\sigma} < k .$$

Załóżmy także, że

$$\liminf_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{q}{\sigma^2} \left[\int_0^\sigma F(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \sigma F(\sigma) \right] \geq 0 \quad (10.25)$$

Wtedy, na mocy (10.25) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\sigma_0 > 0$ taka, że

$$\Phi(\sigma) := q \left[\int_0^{c^T x} F(\sigma) d\sigma - \frac{1}{2} c^T x F(c^T x) \right] \geq -\frac{\varepsilon |c^T x|^2}{2 \|c\|^2} \geq -\frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2 \quad \text{gdy} \quad |\sigma| \geq \sigma_0 .$$

Stąd i z (10.23) otrzymujemy

$$V(x) \geq \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \|x\|^2 - \min_{|\sigma| \leq \sigma_0} \Phi(\sigma) & \text{gdy} \quad |\sigma| \leq \sigma_0 \\ \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2 & \text{gdy} \quad |\sigma| \geq \sigma_0 \end{array} \right\} \longrightarrow \infty \quad \text{gdy} \quad \|x\| \rightarrow \infty .$$

Powyższe wyniki można zebrać w formie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 10.2.2. Załóżmy, że para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) jest obserwowalna. Przypuśćmy, że istnieją $k > 0$, $q \in \mathbb{R}$ takie, że warunki (10.16)

i (10.19) są spełnione. Wtedy układ Lurie (10.8) jest **ABSS** w klasie tych nieliniowości $F \in C^1(\mathbb{R})$, które spełniają warunki (10.17), (10.24) i (10.25).

Uwaga 10.2.3. Promieniowej–nieograniczoneści funkcjonu V , tj. warunku (7.2), można dowieść także przy założeniu (10.11) zamiast (10.24), jednak wtedy należy w miejsce (10.25) przyjąć mocniejsze założenia, które gwarantują, że $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \Phi(\sigma) = \infty$.

Przykładowo, jeżeli $q \neq 0$ i $F \in C^2(\mathbb{R})$, przy czym $-q\sigma F''(\sigma) > 0$ dla każdego $\sigma \neq 0$ to funkcja jest klasy C^2 ,

$$\Phi''(\sigma) = -\frac{q\sigma}{2}F''(\sigma) > 0, \quad \sigma \neq 0 .$$

Zatem Φ jest dodatnio–określona i ściśle wypukła.

W pracy [97] sugeruje się, że teza Twierdzenia 10.2.2 pozostaje prawdziwa bez założenia (10.25) i z założeniem (10.11) przyjętym zamiast (10.24). Autor pracy [97] twierdzi, że otrzymał taki wynik stosując odmienną technikę dowodową, jednak wobec fragmentaryczności jej prezentacji, jego argumenty należy uznać za dalekie od przekonujących.

10.2.2. Numeryczny algorytm weryfikacji nierówności (10.16)

Do weryfikacji nierówności (10.16) można zastosować algorytm opisany w podrozdziale 2.7.3.1 z zastąpieniem funkcji Φ przez

$$\Phi(\Omega) = c^T(-qI + A)(A^2 + \Omega I)^{-1}b$$

oraz z modyfikacją funkcji

$$k(q) = -1/\min_{\Omega \geq 0} \Phi(\Omega) .$$

Kod tego algorytmu stanowi zawartość plików `victord.m` i `bod.m` realizowanych pod MATLAB-em (patrz podrozdział 10.2.5). Program `victord.m` kończy się uzyskaniem plotu zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowej

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) \\ Y(\omega) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} G(j\omega) \end{array} \right\}, \quad \omega \geq 0$$

i prostej o równaniu

$$\frac{1}{k_{opt}} + X - q_{opt}Y = 0 ,$$

podpierającej ten plot.

10.2.3. Przykład 1

Zbadamy stabilność systemu (10.8) z:

$$n = 3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) jest obserwowalna. Transmitancję liniowej części układu wyliczamy z (2.40),

$$G(s) = \frac{-s^2}{s^3 + 5s^2 + s + 1}.$$

Sektor Hurwitza dla analizowanego układu ma postać $(-\infty, 4)$, wobec czego próbujemy wziąć $k = 4$. Wtedy dla $q = 1$ mamy

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} G(j\omega) - \frac{q}{\omega} \operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{(\omega^2 + 1)(\omega^2 - 1)^2}{(1 - 5\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

a zatem warunek częstotliwościowy (10.16) jest spełniony. Stosując procedurę faktoryzacyjno-realizacyjną znajdujemy:

$$g = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \delta = -2.$$

Pozostałe niewiadome wyznaczamy bezpośrednio z układu (10.13):

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 21 \end{bmatrix} = H^T > 0, \quad h = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

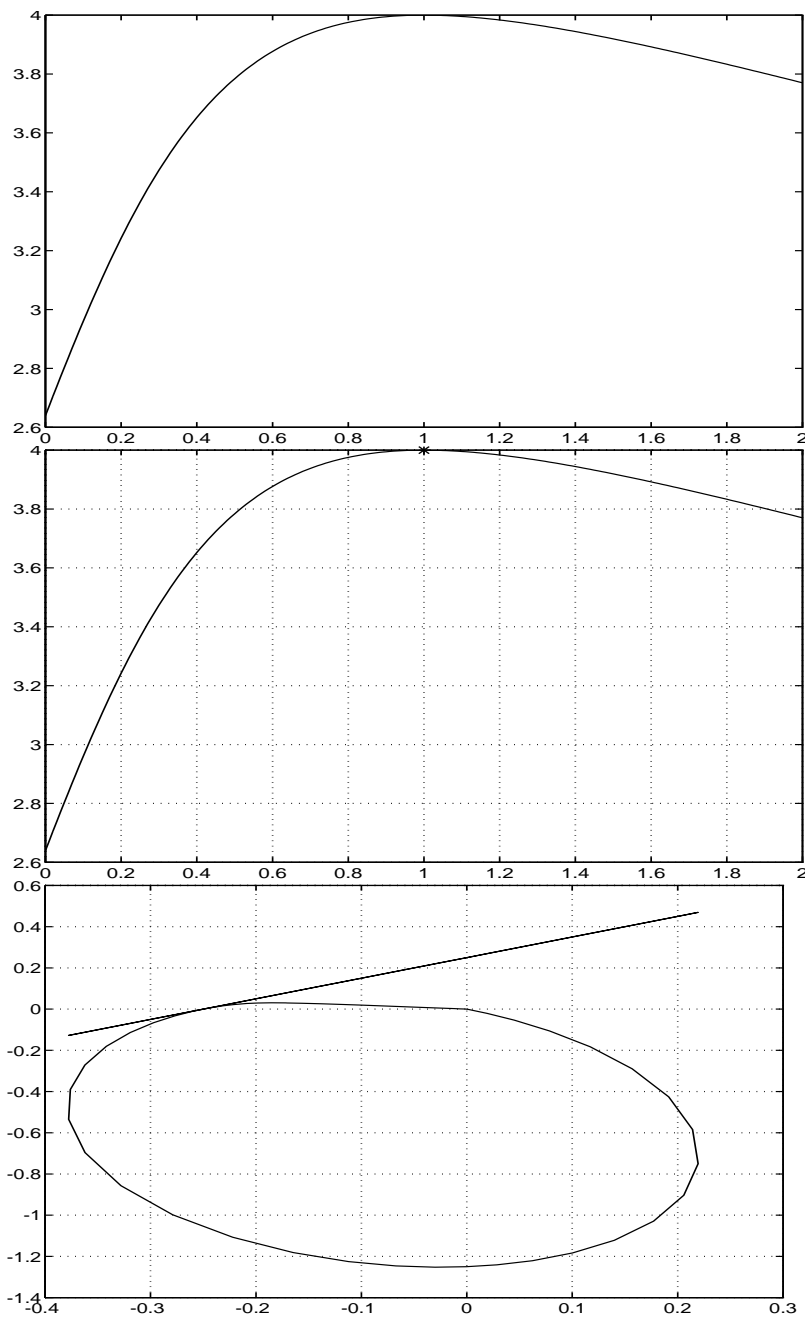
Zauważmy, że

$$\det \left[H + khc^T + kch^T + \gamma k^2 cc^T + \frac{qk}{2} cc^T \right] = \frac{1}{8} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Z Twierdzenia 10.2.2 wynika, że analizowany system jest **ABSS** w klasie nierówności różniczkowalnych spełniających warunki (10.17), (10.24) z $k = 4$ i (10.25).

Na rysunku 10.4 przedstawiono kolejne fazy numerycznej weryfikacji nierówności częstotliwościowej (10.16) z użyciem algorytmu opisanego w podrozdziale 10.2.5.

10.2. UKŁADY Z NIELINIOWOŚCIAMI RÓŻNICZKOWALNYMI



Rysunek 10.4. Ilustracja poszczególnych faz działania programu victord.m

10.2.4. Przykład 2

System (10.8) z:

$$n = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -28.125 & -85.125 & -59 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

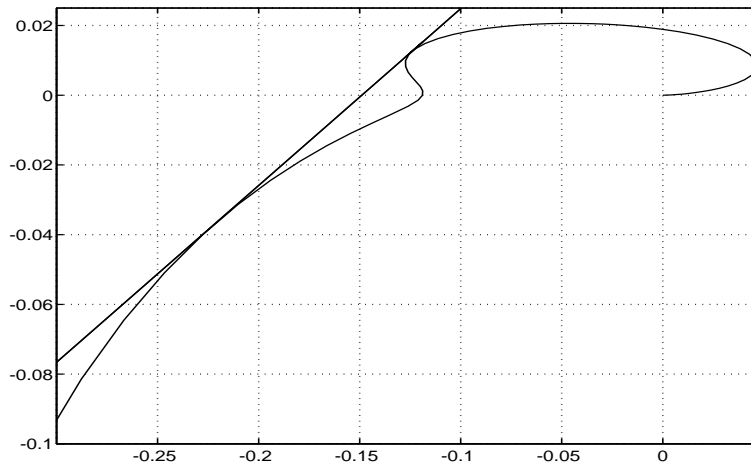
w którym para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) jest obserwowalna, realizuje transmitancję

$$G(s) = c^T(A - sI)^{-1}b = \frac{100}{s^4 + 3s^3 + 59s^2 + 85.125s + 28.125},$$

a zatem odpowiada układowi analizowanemu w pracy [101]. Ponadto

$$\operatorname{Re} \lambda(A + \mu bc^T) < 0 \quad \forall \mu \in (-0.28125, 8.4085938).$$

Zastosowanie algorytmu numerycznego opisanego w podrozdziale 10.2.5 pozwala otrzymać maksymalnie duże k , przy którym istnieje q , takie, że (10.16) zachodzi – patrz rysunek 10.5.

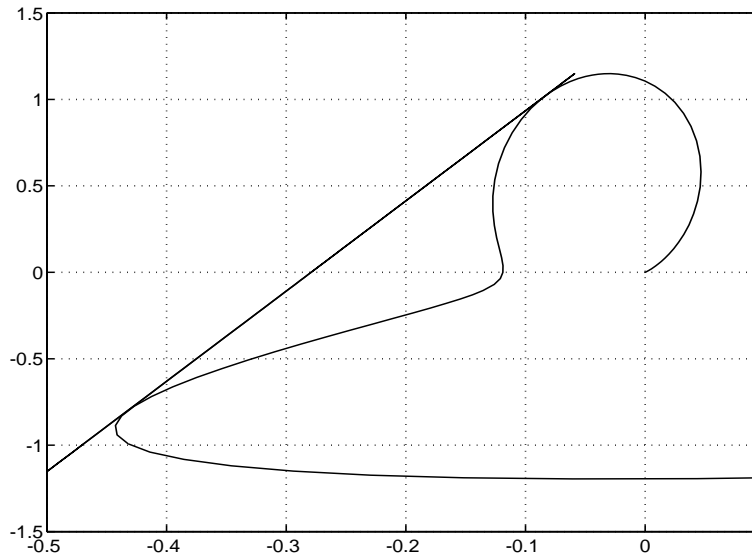


Rysunek 10.5. Weryfikacja nierówności (10.16) dla Przykładu 2

Obliczenia dają $k = 6.714$, $q = 1.972$. Zmniejszając nieznacznie otrzymane k , dla uzyskania pewności, że błąd numeryczny nie daje złej wartości k i stosując Twierdzenie 10.2.2 ustalamy, że analizowany system jest **ABSS** w klasie tych nieliniowości $F \in C^1(\mathbb{R})$, które spełniają warunki (10.17), (10.24) z $k = 6.71$ i (10.25). Zbliżony wynik

otrzymany został w pracy [101]. Rezultatów prac [53], [54] nie można zastosować, gdyż w pracach tych żąda się, aby $G(0) > 0$ oraz by nierówność częstotliwościowa (10.16) zachodziła przy ujemnym q .

Dla porównania, zastosowanie numerycznego algorytmu weryfikującego nierówność Popova daje $k = 3.582$ i $q = 0.1917$ – patrz rysunek 10.6.



Rysunek 10.6. Weryfikacja nierówności Popova (2.84) dla Przykładu 2

10.2.5. Dodatek: m–pliki victord.m, bod.m

Kod programu victord.m

```
clear
clc
clg
format long
global A b c
disp(' The current data are: ')
A = [ 0      1      0
      0      0      1
      -1     -1     -5]
b = [ 0
      0
      1]
```

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE

```
c = [0
      0
      1]
disp(' Do you accept the current data ? yes - <enter>, ')
disp('          no - Ctrl C, Modify the data ')
pause
q_pocz = input(' Introduce initial value of q = ')
q_kon = input(' Introduce final value of q = ')
krok_q = input(' Introduce increment of q = ')
y = q_pocz:krok_q:q_kon;
for m=1:length(y)
w(m) = y(m);
d(m) = -bod(w(m));
end
plot(w,d)
disp(' Strike any key if the graph exhibits an optimum ')
disp(' otherwise - CTRL C and modify the search interval of q .')
pause
hold on
xa = min(y);
xb = max(y);
options(2)=0.000001;
options(7)=3;
options(1)=0;
x = fmin('bod',xa,xb,options);
plot(x,-bod(x),'*')
grid;
hold off
pause
clg
[re,im,om] = nyquisto(A,b,c',0);
x1=-re;
x2=-im./om;
plot(x1,x2,'g')
hold on
plot(x1,-1/(x*bod(x))+x1/x,'r')
grid
hold off
```

Kod programu bod.m

```
function [K]=bod(q)
global A b c
u=length(b);
```

```

for i=1:2*u-1
x(i)=i-1;
dt=det((A^2+x(i)*eye(u))^2);
y(i)=dt*c'*(-q*eye(u)+A)*((A^2+x(i)*eye(u))^(-2))*b;
end
z=polyfit(x,y,2*u-2);
s=roots(z);
for k=1:length(s);
    if imag(s(k))==0,
        r(k)=s(k);
    else
        r(k)=0;
    end
end
j=0;
for i=1:length(s);
    if r(i)>=0,
        j=j+1;
        rr(j)=r(i);
        p(j)=c'*(-q*eye(u)+A)*((A^2+r(i)*eye(u))^(-1))*b;
    end
end
f=c'*(-q*eye(u)+A)*A^(-2)*b;
K=-1/(-min([p 0 f]));

```

10.3. NIEAUTONOMICZNE UKŁADY LURIE

10.3.1. Estymata obszaru atrakcji

Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \quad (10.26)$$

z funkcją $f : \mathcal{W} \times \mathbb{R}^* \ni (x, t) \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}^n$, gdzie \mathcal{W} jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , czyni zadość następującym *warunkom regularności*:

- (R1) dla każdego $x \in \mathcal{W}$ funkcja $f(x, \cdot)$ jest mierzalna na $\mathbb{R}^* := [0, \infty)$,
(R2) dla dowolnego zwartego zbioru $\mathcal{Z} \subset \mathcal{W}$ istnieje $M_{\mathcal{Z}}$ takie, że:

$$\|f(x, t)\| \leq M_{\mathcal{Z}} \quad \forall x \in \mathcal{Z} \text{ i prawie wszystkich } t \in \mathbb{R}^* ,$$

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq M_{\mathcal{Z}} \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{Z} \text{ i prawie wszystkich } t \in \mathbb{R}^* .$$

Tutaj $\|\cdot\|$ oznacza dowolną normę w \mathbb{R}^n .

Wakeman [139] wykazał, że absolutnie ciągłe rozwiązania równania (10.26) określają w specjalny sposób strumień **LCSDS** na stosownie dobranej przestrzeni metrycznej i w oparciu o ten wynik uzyskał uogólnienie *zasady inwariantności LaSalle'a*. Do prezentacji tego wyniku potrzebna będzie poniższa definicja.

Definicja 10.3.1. Niech \mathcal{G} będzie dowolnym zbiorem takim, że $\bar{\mathcal{G}} \subset \mathcal{W}$. Funkcjonał $V : \mathcal{G} \times \mathbb{R}^* \ni (x, t) \mapsto V(x, t) \in \mathbb{R}$ klasy C^1 nazywamy *funkcjonałem Lapunowa* dla (10.26) na \mathcal{G} jeśli spełnia on warunki:

- (i) dla dowolnego $x \in \bar{\mathcal{G}}$ istnieje otoczenie N punktu x takie, że V jest ograniczony z dołu w $(\mathcal{G} \cap N) \times \mathbb{R}^*$,
- (ii) dla dowolnego $x \in \bar{\mathcal{G}}$ i prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^*$ mamy

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla V, f(x, t) \rangle \leq -W(x) \leq 0 ,$$

przy czym W jest funkcjonałem ciągłym na $\bar{\mathcal{G}}$.

Twierdzenie 10.3.2 (Wakemana). Załóżmy, że funkcja f spełnia warunki regularności **(R1)**, **(R2)**, a V jest funkcjonałem Lapunowa dla (10.26) na otwartym, ograniczonym i dodatnio-inwariantnym zbiorze \mathcal{G} . Ponadto załóżmy, że gradient ∇V jest ograniczony na $\bar{\mathcal{G}} \times \mathbb{R}^*$. Niech $M \subset \bar{\mathcal{G}}$ i $V(x, t) = c(t)$ dla $x \in \partial M$, gdzie c jest niemalejącą funkcją czasu. Wtedy, jeżeli M jest największym dodatnio-inwariantnym zbiorem zawartym w

$$E := \{x \in \bar{\mathcal{G}} : W(x) = 0\}$$

to M jest **JAS** atraktorem, a \mathcal{G} jest obszarem atrakcji zbioru M .

Twierdzenie to może być w szczególności zastosowane do konstrukcji podzbioru obszaru atrakcji **JAS** rozwiązania zerowego układu (10.26) (w tym przypadku $M = \{0\}$).

Porównując Twierdzenie 10.3.2 z analogicznymi rezultatami dla układów autonomicznych, na przykład 2.3.2, można zauważyć, że jedną z głównych różnic jest szacowanie pochodnej funkcjonału V przez niezależny od czasu t funkcjonał W . Podamy obecnie przykład wykazujący, że bez dysponowania takim oszacowaniem teza Twierdzenia 10.3.2 może być nieprawdziwa.

Rozwiązaniem problemu początkowego $\dot{x}(t) = -e^{-t}x(t)$, $x(t_0) = x_0$ jest

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{e^{-t} - e^{-t_0}} .$$

Nietrudno ustalić, że rozwiązanie zerowe jest **JS**, ale nie jest nawet **AS**, bo w obszar atrakcji tego rozwiązanie nie można wpisać żadnego pasa o dodatniej szerokości stanowiącego otoczenie osi czasu. Z drugiej strony, dla funkcjonału $V(x) = x^2$ mamy:

$$\dot{V}(x) = -2x^2 e^{-t} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Zatem wersja Twierdzenia 10.3.2 bez funkcjonału W , nie jest prawdziwa.

10.3.2. Przykład objaśniający

Rozważmy system opisany równaniem różniczkowym:

$$\ddot{x}(t) + h(t)\dot{x}(t) + \sin[x(t)] = 0, \quad t \geq 0,$$

gdzie h jest funkcją mierzalną,

$$0 < \alpha \leq h(t) \leq \beta$$

dla pewnych α, β . Wprowadzając zmienne stanu $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ otrzymujemy układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -h(t)x_2(t) - \sin[x_1(t)] \end{array} \right\}, \quad t \geq 0 \quad (10.27)$$

który ma postać (10.26). Nietrudno ustalić, że dzięki przyjętym założeniom o h , prawa strona (10.27) spełnia warunki regularności przy $\mathcal{W} = \mathbb{R}^n$.

Rozważmy funkcjonal

$$V(x_1, x_2) = (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Sprawdzimy, że V jest funkcjonałem Lapunowa dla (10.27) na zbiorze

$$\mathcal{G} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \pi, \quad V(x_1, x_2) < l < 2 \right\}.$$

Oczywiście V jest klasy C^1 . Zbiór \mathcal{G} jest zbiorem otwartym, ograniczonym i dodatnio-inwariantnym. Ostatni fakt wynika stąd, że

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -h(t)x_2^2 \leq -\alpha x_2^2 \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

W definicji 10.3.1 można przyjąć dowolnie $N \subset \mathbb{R}^2$ i $W(x) = \alpha x_2^2$. Dalej,

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \sin x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

jest ograniczony na $\overline{\mathcal{G}}$ a więc i na $\overline{\mathcal{G}} \times \mathbb{R}^*$, jako, że V nie zależy jawnie od t . Weźmy teraz

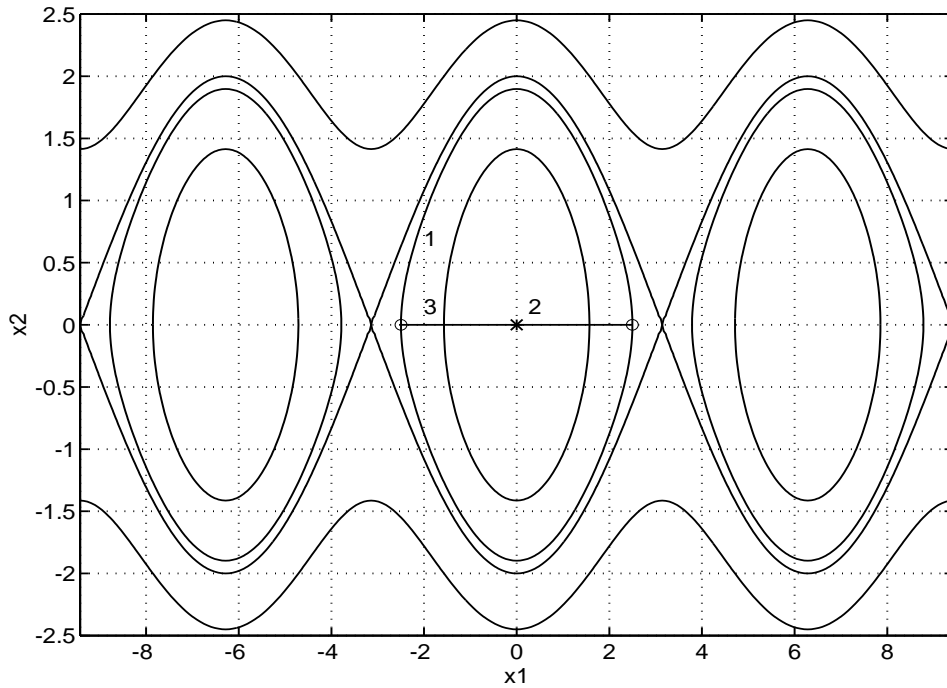
$$M = \{(0, 0)\} \subset \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2.$$

Na $\partial M = M$ mamy: $V(x) = 0 \equiv c(t)$. Oczywiście c jest niemalejącą funkcją czasu. Zbiór E przyjmuje postać

$$E = \left\{ x \in \mathcal{G} : W(x) = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \pi, \quad V(x_1, x_2) < l, \quad x_2 = 0 \right\}.$$

Przekroje funkcjonału V , zbiory \mathcal{G} , M i E przedstawiono na rysunku 10.7.

10. SPECJALNE UKŁADY LURIE



Rysunek 10.7. Przekroje funkcjonału V i estymata obszaru atrakcji: 1 – zbiór \mathcal{G} , 2 – zbiór M , 3 – zbiór E

Jeżeli $x(\cdot, t_0, x_0)$ jest rozwiązaniem (10.27) startującym w chwili t_0 z punktu $x_0 \in E$ to wzdłuż takiego rozwiązania musi być $x_2 \equiv 0$, $|x_1| < \pi$ i z drugiego równania układu (10.27) dostajemy $x_1 \equiv 0$. Zatem M jest największym zbiorem dodatnio-inwariantnym zawartym w E . Założenia Twierdzenia 10.3.2 są spełnione i w konsekwencji zerowy punkt równowagi jest **JAS**, a zbiór \mathcal{G} jest oszacowaniem obszaru atrakcji tego punktu.

W charakterze zbioru \mathcal{G} można także wziąć zbiór:

$$\mathcal{G} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq N\pi, \quad V(x_1, x_2) < l < 2 \right\},$$

gdzie N jest liczbą nieparzystą nie większą niż 3. Wtedy z Twierdzenia 10.3.2 wynika, że zbiór punktów równowagi

$$\left\{ (0, 0), (\mp 2\pi, 0), (\mp 4\pi, 0), \dots, (\mp (N-1)\pi, 0) \right\}$$

jest zbiorem **JAS**, a zmodyfikowany \mathcal{G} jest estymatą jego obszaru przyciągania.

10.3.3. Układy semiliniowe. Uogólnione kryterium koła

Twierdzenie 10.3.3. Załóżmy, że para (A, B) jest sterowalna, a sterowanie $u(x, t)$ posiada następujące własności:

- (i) dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja $u(x, \cdot)$ jest mierzalna na \mathbb{R}^* oraz dla każdego zwartego $Z \subset \mathbb{R}^n$ istnieje $M_Z > 0$ taka, że:

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\| &\leq M_Z \quad \forall x \in Z \text{ i prawie wszystkich } t \in \mathbb{R}^* , \\ \|u(x, t) - u(y, t)\| &\leq M_Z \|x - y\| \quad \forall x, y \in Z \text{ i prawie wszystkich } t \in \mathbb{R}^* ; \end{aligned}$$

- (ii) istnieje ciągle funkcjonal W , $W(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, przy czym Ω zawiera w sobie otwarte otoczenie zera oraz istnieją macierze $K = K^T \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, $M = M^T \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$ i $L \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takie, że:

- (a) spełniona jest nierówność częstotliwościowa

$$\begin{aligned} K + L^T(A - j\omega I)^{-1}B + B^T(A^T + j\omega I)^{-1}L + \\ + B^T(A^T + j\omega I)^{-1}M(A - j\omega I)^{-1}B \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, j\omega \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (10.28)$$

- (b) dla każdego $x \in \Omega$ i prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^*$ ważne jest oszacowanie

$$\|G^T x + Vu(x, t)\|^2 + \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix} \geq W(x) \quad (10.29)$$

gdzie $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $V \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$ są elementami trójki (H, G, V) , $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $H = H^T$ będącej rozwiązaniem układu

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + HA - M = -GG^T \\ HB + L = -GV \\ V^T V = K \end{array} \right\} \quad (10.30)$$

- (c) rozwiązanie zerowe jest jedynym rozwiązaniem układu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(x, t) \quad (10.31)$$

w zbiorze $\{x \in \text{Int}\Omega : W(x) = 0\}$,

- (d) dla tych $\mu \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dla których sterowanie liniowe $u(x, t) = \mu x$ spełnia warunek (10.29) macierz $A + B\mu$ jest hurwitzowska, tzn.

$$\text{Re } \lambda(A + B\mu) < 0 \quad (10.32)$$

Wtedy zerowy punkt równowagi układu $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(x, t)$ jest **JAS**, a zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < l\}$, gdzie $l > 0$ jest taką liczbą, że $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < l \subset \Omega\}$, jest zbiorem jego obszaru przyciągania.

Dowód. Dzięki (i) są spełnione warunki regularności (R1), (R2). Ponieważ para (A, B) jest sterowalna więc warunek (10.28), jest na mocy Lematu 6.1.4, warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układ (10.30) posiadał rozwiązanie (H, G, V) . Teraz mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^T H x &= \dot{x}^T H x + x^T H \dot{x} = \\ &= \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T H + H A - M & H B + L \\ B^T H + L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix} = \\ &= -\|G^T x + V u(x, t)\|^2 - \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & L \\ L^T & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u(x, t) \end{bmatrix} \leq -W(x) \leq 0 \end{aligned}$$

dla każdego $x \in \Omega$ i prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^n$, przy czym na mocy (10.31) w zbiorze $\{x \in \text{Int}\Omega : W(x) = 0\}$, brak innych rozwiązań analizowanego układu niż zerowe.

Przeprowadzony wyżej rachunek jest w szczególności słuszny dla sterowania liniowego $u(x, t) = \mu x$. Na mocy (10.32) system liniowy, odpowiadający takiemu sterowaniu, $\dot{x} = (A + B\mu)x$ jest **AS**. Stosując teraz twierdzenie [10, str. 31] do formy kwadratowej $x^T H x$ otrzymamy $H > 0$.

Funkcjonał $V(x) = x^T H x$ jest funkcyjonałem Lapunowa dla układu $\dot{x} = Ax + Bu(x, t)$ na zbiorze $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < l\}$ przy czym $l > 0$ (liczba taka istnieje, wobec tego, że Ω zawiera w sobie otwarte otoczenie $0 \in \mathbb{R}^n$) jest taka, że: $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x \leq l\} \subset \Omega$. Teza wynika teraz z twierdzenia Wakemana. \square

Z Twierdzenia 10.3.2 wynika uogólnione kryterium koła dla układów nieautonomicznych. Aby to wykazać rozważmy układ

$$\dot{x} = [A + BK(x, t)C^T] x \quad (10.33)$$

z macierzami $A \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$, $B, C \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$.

Twierdzenie 10.3.4. Załóżmy, że para (A, B) jest sterowalna, para (A, C^T) jest obserwowalna, a $K(x, t)$ jest macierzą diagonalną, której elementy niezerowe $k_j(x, t)$, $j = 1, 2, \dots, m$ posiadają następujące własności:

- (i) dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja $k_j(x, \cdot)$ jest mierzalna na \mathbb{R}^* ,
- (ii) dla każdego zwartego $Z \subset \mathbb{R}^n$ istnieje $M_Z > 0$ takie że:

$$\begin{aligned} |k_j(x, t)| &\leq M_Z \quad \forall x \in Z \text{ i prawie wszystkich } t \in \mathbb{R}^* , \\ |k_j(x, t) - k_j(y, t)| &\leq M_Z \|x - y\| \quad \forall x, y \in Z \text{ i prawie wszystkich } t \in \mathbb{R}^* , \end{aligned}$$

(iii) istnieje $K_1 = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $K_2 = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$

$$\alpha_j + \varepsilon \leq K_j(x, t) \leq \beta_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (10.34)$$

prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}^*$ i pewnego $\varepsilon > 0$, przy czym Ω zawiera w sobie otwarte otoczenie zera,

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)G(j\omega) + \frac{1}{2}G^T(-j\omega)(K_1 + K_2) + \\ + G^T(-j\omega)K_2K_1G(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, j\omega \notin \lambda(A) \end{aligned} \quad (10.35)$$

gdzie $G(s) = C^T(A - sI)^{-1}B$ jest transmitancją liniowej części systemu (10.33), dla każdej diagonalnej macierzy $\mu \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m)$, $K_1 < \mu < K_2$ mamy

$$\text{Re } \lambda(A + B\mu C^T) < 0 \quad (10.36)$$

Wtedy zerowy punkt równowagi układu (10.33) jest **JAS**, a zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x < l\},$$

gdzie $H \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n)$ jest podzbiorem obszaru atrakcji tego rozwiązania. Tutaj H oznacza pierwszy element pary (H, G) , $H = H^T$, $G \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ stanowiącej rozwiązanie układu

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T H + H A - C K_2 K_1 C^T = -G G^T \\ H B + \frac{1}{2} C (K_1 + K_2) = -G \end{array} \right\},$$

a $l > 0$ jest taką liczbą, że $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x \leq l\} \subset \Omega$.

Dowód. Wobec założenia (i) dla układu (10.31) z $u(x, t) = K(x, t)C^T x$ spełnione jest założenie (i) Twierdzenia 10.3.2. Podstawmy w założeniu (ii) Twierdzenia 10.3.2 następujące elementy:

$$K = K^T = I, \quad L = \frac{1}{2}C(K_2 + K_1), \quad M = C K_2 K_1 C^T, \quad W(x) = \varepsilon^2 x^T C C^T x \quad (x \in \Omega).$$

Wówczas: warunek (10.28) jest spełniony na mocy (10.35), warunek (10.29) jest spełniony na mocy (10.34) i wreszcie warunek (10.30) jest spełniony na mocy założenia o obserwowalności pary (A, C^T) . Dalej, (10.31) wynika z (10.36) i teza Twierdzenia 10.3.4 jest konsekwencją Twierdzenia 10.3.2. \square

Twierdzenie 10.3.4 jest uogólnieniem wyników pracy [153]. Dla skalarnego układu (10.33), Barkin i Želencovski [11] zaproponowali interesujące uogólnienie kryterium koła jako warunku dostatecznego **GAS**.

10.3.4. Przykład Povera i Tsoi

Układ (10.33) z:

$$n = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C^T = c^T = [1 \quad 2\beta], \quad \beta \geq 0$$

był badany przez Povera i Tsoi [115], [116]. Para (A, b) jest sterowalna, a para (A, c^T) jest obserwowalna przy założeniu $\beta \neq 1/4$. Transmitancja części liniowej układu wyraża się wzorem

$$G(s) = c^T(A - sI)b = \frac{2\beta s + 1}{s^2 + 2s}.$$

Wobec tego

$$1 + S \operatorname{Re} G(j\omega) + P |G(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 + \omega^2[4 - S(1 - 4\beta) + 4\beta^2 P] + P}{\omega^4 + 4\omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0,$$

gdzie $S = k_1 + k_2$, $P = k_1 k_2$. Niech $\beta \in [0, 1/4)$. Wtedy nierówność częstotliwościowa (10.35) jest spełniona gdy

$$k_1 = \frac{1 - 4\beta}{4\beta^2}, \quad k_2 = \infty$$

lub

$$0 \leq k_1 < \frac{1 - 4\beta}{4\beta^2}, \quad k_2 = \left[\frac{\sqrt{k_1(1 - 4\beta)} + 2}{\sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta\sqrt{k_1}} \right]^2 \quad (10.37)$$

Występujący w (10.37) wzór na k_2 wyprowadza się w oparciu o Lemat 3.1.1. Wyróżnik trójmianu $s^2 + s[4 - S(1 - 4\beta) + 4\beta^2 P] + P$ zeruje się, gdy

$$S^2 [(1 - 4\beta)^2] - 8S(1 - 4\beta)(1 + \beta^2 P) + 16(1 + \beta^2 P)^2 - 4P = 0 \quad (10.38)$$

Większym z pierwiastków równania (10.38) jest

$$S = \frac{4(1 + \beta^2 P) + 2\sqrt{P}}{1 - 4\beta} = k_1 + k_2 = \frac{4(1 + \beta^2 k_1 k_2) + 2\sqrt{k_1 k_2}}{1 - 4\beta} \quad (10.39)$$

Traktując (10.39) jako równanie kwadratowe względem $\sqrt{k_2}$ znajdujemy

$$k_2 = \left[\frac{\sqrt{k_1} + 2(1 + \beta k_1)\sqrt{1 - 4\beta}}{1 - 4\beta - 4\beta^2 k_1} \right]^2 = \left[\frac{\sqrt{k_1(1 - 4\beta)} + 2}{\sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta\sqrt{k_1}} \right]^2.$$

Ponieważ $\operatorname{Re}(A + \mu bc^T) < 0$ dla dowolnego $\mu > 0$, więc na mocy Twierdzenia 10.3.4 zerowy punkt równowagi badanego układu jest globalnie **JAS** dla dowolnej skalarnej funkcji $k(x, \cdot)$ spełniającej warunki (i)÷(iii) Twierdzenia 10.3.4 z $\alpha_1 = k_1$ i $\beta_1 = k_2$.

W pracy [116] pokazano, że potwierdzone wyżej, ogólne warunki stabilności mogą być w pewnych przypadkach poprawione. W szczególności dla $\beta = 0$, wzór (10.37) daje $k_2 = (\sqrt{k_1} + 1)^2$. Jednak stosując funkcję Lapunowa, której poziomice są sklejane z poziomice odpowiednio dobranych form kwadratowych można w tym przypadku uzyskać

$$k_2 = \left[\sqrt{\frac{(\sqrt{k_1} + 1)^2 + 1 + \sqrt{(\sqrt{k_1} + 1)^4 + (\sqrt{k_1} + 1)^2 + 5}}{2}} + 1 \right]^2 .$$

Algorytmy numeryczne określenia najlepszych warunków absolutnej stabilności dla rozważanego przykładu przedstawiono w [117] i literaturze tam zamieszczonej. W [117] dokonano też porównania wyników uzyskiwanych w oparciu o te algorytmy z wyżej przedstawionymi rezultatami.

LITERATURA

- [1] AJZERMAN M.A., GANTMACHER F.R.: *Absolutnaja ustojčivost' regulirujemych sistem.* Moskva, Izdatel'stvo AN SSSR 1963
- [2] ANDERSON B.D.O., VONGPANITLERD S.: *Network Analysis and Synthesis. A Modern Systems Theory Approach.* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall. Inc. 1973
- [3] BALAKRISHNAN A.V.: *Applied Functional Analysis.* New York, Springer 1981
- [4] BALL J.M.: *Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation of constants formula.* PROCEEDINGS of the AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. 1977. 63. 370 - 373
- [5] BALL J.M.: *On the asymptotic behavior of generalized processes with applications to nonlinear evolution equations.* JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1978. 27. 2. 224 - 265
- [6] BALL J.M., PELETIER L.A.: *Stabilization of concentration profiles in catalyst particles.* JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1976. 20. 3. 356 - 368
- [7] BALL J.M., SLEMROD M.: *Feedback stabilization of distributed semilinear boundary control systems.* APPLIED MATHEMATICS and OPTIMIZATION. 1979. 5. 169 - 179
- [8] BARABANOV N.E.: *O problemie Kalmana.* SIBIRSKIJ MATEMATIČESKIJ ŽURNAL. 1988. 29. 3. 3 - 11
- [9] BARABANOV N.E., KATKOVNIK V.Y., NELEPIN R.A., CHLYPALO J.I., JACUBOVIČ V.A.: *Metody issledovanija nelinejnyh sistem avtomatičeskovo regulirovanija.* Moskva, Nauka 1975
- [10] BARBASHIN E.A.: *Funkcii Lapunova.* Moskva, Nauka 1970
- [11] BARKIN A.I., ZELENTOVSKY A.L.: *Metod of power transformations for analysis of stability of nonlinear control systems.* SYSTEMS and CONTROL LETTERS. 1983. 3. 303 - 310
- [12] BEDEAUX D., MAZUR P., PASMANTER R.A.: *The ballast resistor; an electro-thermal instability in a conducting wire. I.* PHYSICA. 1977. 86A. 355 - 382
- [13] BERGER M.S.: *Nonlinearity and Fractional Analysis. Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis.* New York, Academic Press 1977
- [14] BHATTACHARYA B.B., SUNDARAMURTHY M.: *Realization of RC-active oscillators with grounded capacitors and voltage amplifiers.* INTERNATIONAL JOURNAL of CIRCUIT THEORY and APPLICATIONS. 1980. 8. 355 - 371
- [15] BHATIA N., SZEGÖ G.P.: *Stability Theory of Dynamical Systems.* Berlin, Springer 1970
- [16] BRAUER F., NOHEL J.: *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.* New York, Benjamin. Inc. 1969
- [17] BRAYTON R.K.: *Necessary and sufficient conditions for bounded global stability of certain nonlinear systems.* QUARTERLY of APPLIED MATHEMATICS. 1971. 29. 2. 237 - 244
- [18] BRÉZIS N.: *On a characterization of flow-invariant sets.* COMMUNICATIONS in PURE and APPLIED MATHEMATICS. 1970. 23. 2. 261 - 263
- [19] BROCKETT R.W.: *On the Stability of Nonlinear Feedback Systems.* IEEE TRANSACTIONS on APPLICATIONS and INDUSTRY. 1964. AP-83. 75. 443 - 449
- [20] BROCKETT R.W., WILLEMS J.: *Frequency Domain Stability Criteria.* IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1965. 10. 3. 255 - 261

- [21] BUTZER P.L., NESSEL R.J.: *Fourier Analysis and Approximation. I: One-dimensional Theory*. Basel, Birkhäuser 1971
- [22] BYRNE P.C.: *Frequency-domain stability theorem for the Lur'e system with multiple non-linearities specified by sector and slope information*. ELECTRONICS LETTERS. 1975. 11. 16. 394 - 396
- [23] CALLIER F.M., WINKIN J.: *Spectral factorization and LQ - optimal regulation for multivariable distributed systems*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1990. 52. 1. 55 - 75
- [24] CARTHRIGHT M.: *On the stability of solutions of certain differential equations of the 4-th order*. The QUARTELY of MECHANICS and APPLIED MATHEMATICS. 1956. 9. 185 - 194
- [25] CAZENAVE T., LIONS P.L.: *Solutions globales d'équations de la chaleur semi lineaires*. COMMUNICATIONS in PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1984. 9. 10. 955 - 978
- [26] CHAFEE N.: *Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions*. JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1975. 18. 1. 111 - 134
- [27] CHAFEE N.: *The electric ballast resistor: homogeneous and inhomogeneous equilibrium*. Proceedings of the Symposium and International Conference on Nonlinear Differential Equations.: Invariance, stability and bifurcations. Trento, Italy. 1980. Editor L.Salvadori. New York, Academic Press 1981. 97 - 127
- [28] CLARKE F.H.: *Generalized Gradients and its Applications*. TRANSACTIONS of the AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. 1975. 205. 247 - 262
- [29] CRANDALL M.G.: *Semigroups of Nonlinear Transformations*. Proceedings of a Symposium Conducted by the Mathematic Research Center. The University of Wisconsin, Madison April 12 - 1. 1971. Editor E.Zarantonello *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. New York and London, Academic Press 1971. 157 - 179
- [30] CRANDALL M.G.: *A generalization of Peano's existence theorem and flow invariance*. PROCEEDINGS of the AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. 1972. 36. 1. 151 - 155
- [31] CRANDALL M.G., LIGGETT T.M.: *Generation of Semigroups of Nonlinear Transformations on General Banach Spaces*. AMERICAN JOURNAL of MATHEMATICS. 1971. 93. 265 - 298
- [32] DIEJČ V.G.: *Obobšćenije častotnoj teoriemy na slučaj nieograničennovo operatora nabludienija i evo primienienije k zadači absolutnoj ustojčivosti*. SIBIRSKIJ MATEMATIČESKIJ ŽURNAL. 1989. 30. 4. 44 - 52
- [33] DESOER C.A., VIDYASAGAR. M.: *Feedback Systems: Input-Output Properties*. New York, Academic Press 1975
- [34] DEWEY A.G., JURY E.I.: *A note on Aizerman's conjecture*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1965. 10. 4. 482 - 483
- [35] ENGELKING R.: *Topologia ogólna*. Warszawa, PWN 1975
- [36] EZEILO J.O.C.: *On the stability of solutions of some third-order differential equations*. JOURNAL of the LONDON MATHEMATICAL SOCIETY. 1968. 43. II. 170. 161 - 167
- [37] FANTIN J., ACHAIBOU A.: *Domaines suffisants de stabilité dans un problème de stabilité dynamique d'un réseau*. REVUE FRANCAISE d'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE, RECHERCHE OPERATIONELLE. 1975. 9. 9. 47 - 54

LITERATURA

- [38] FITTS R.R.: *On the Stability of Feedback System with one Differentiable Nonlinear Element*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1966. 11. 485 - 491
- [39] FITZHUGH R.: *Thresholds and plateaus in the Hodgkin-Huxley nerve equations*. JOURNAL of GENERAL PHYSIOLOGY. 1960. 43. 5. I. 867 - 896
- [40] GELIG A.H., LEONOV G.A., JAKUBOVIČ V.A.: *Ustojčivost' nelinejnych sistem s neodinstvennym sostojaniem ravnovesija*. Moskva, Nauka 1978
- [41] GLENDINNING P.: *Stability, Instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge, Cambridge University Press 1995
- [42] GÓRECKI H., FUKSA S., GRABOWSKI P., KORYTOWSKI A.: *Analysis and Synthesis of Time-Delay systems*. Chichester and Warsaw, J.Wiley and PWN 1989
- [43] GORIAČENKO V.D.: *Metody teorii ustojčivosti v dinamiki jadriernych reaktorov*. Moskva, Atomizdat 1971
- [44] GRABOWSKI P.: *Operatory akkretywne w teorii układów semidynamicznych*. Rozprawa doktorska. Rozprawa doktorska. Kraków, IIA. AGH. 1978 (1979)
- [45] GRABOWSKI P.: *A note on "Two counterexamples to Ajzerman's Conjecture"*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1980. 25. 2. 334 - 335
- [46] GRABOWSKI P.: *Some stability results for a class of abstract semilinear problems*. 4th International Conference. Functional Systems and Related Topics, Jachranka, Poland. 1985. The Higher College of Engineering at Zielona Góra Press 1985. 41 - 49
- [47] GRABOWSKI P.: *Stability of semilinear systems in Hilbert spaces*. LECTURE NOTES in CONTROL and INFORMATION SCIENCES. 1986. 84. 282 - 291
- [48] GRABOWSKI P.: *Evaluation of quadratic cost functionals for neutral systems: the frequency-domain approach*. INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL. 1989. 49. 3. 1033 - 1053
- [49] GRABOWSKI P.: *On spectral-Lyapunov approach to parametric optimization of distributed parameter systems*. IMA JOURNAL of MATHEMATICAL CONTROL and INFORMATION. 1990. 7. 317 - 338
- [50] GRABOWSKI P.: *Metody spektralne i lapunowskie w analizie układów nieskończenie - wymiarowych ze sprzężeniem zwrotnym*. ZESZYTY NAUKOWE AGH. s. Automatyka. 1991. 58. 1 - 189
- [51] GRABOWSKI P.: *Comments on "Generalized Lyapunov functions for Liénard - type non - linear systems"*. JOURNAL of CONTROL THEORY and ADVANCED TECHNOLOGY. 1991. 7. 1. 117 - 128
- [52] GRABOWSKI P.: *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. Kraków, Wydawnictwa AGH 1996
- [53] HADDAD W., KAPILA V.: *Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1995. 40. 2. 361 - 365
- [54] HADDAD W.: *Correction to "Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities"*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1997. 42. 4. 591
- [55] HALE J.K.: *Ordinary Differential Equations*. New York, Wiley - Interscience 1966
- [56] HALE J.K.: *Theory of Functional Differential Equations*. New York, Springer 1977
- [57] HARTMAN PH.: *Ordinary Differential Equations*. New York, J.Wiley and Sons 1964, 1973 (przekład rosyjski: Moskva, Mir Publishers 1973)
- [58] HARTMAN PH.: *On invariant sets and on a theorem of Ważewski*. PROCEEDINGS of the AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. 1972. 32. 2. 511 - 420

- [59] HAYASHI M., OSHAWA Y.: *Transient stability of power systems using series expansion of Lyapunov functions*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1979. 29. 6. 1059 - 1066
- [60] HENNER V.E.: *A multimachine power systems Liapunov functions using the generalized Popov criterion*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1974. 19. 5. 969 - 976, 1976. 23. 1. 143
- [61] HENRY D.: *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. LECTURE NOTES in MATHEMATICS. Berlin, Springer 1981. 840
- [62] ISHII H.: *Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations*. JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1977. 26. 2. 291 - 319
- [63] JAKUBOVIČ V.A.: *Metod matričných nieravenstv v teorii ustojčivosti nelinejnych regulirujemych sistem I*. AVTOMATIKA i TELEMECHANIKA. 1964. 25. 7. 1017 - 1029
- [64] JAKUBOVIČ V.A.: *Metod matričných nieravenstv v teorii ustojčivosti nelinejnych regulirujemych sistem II. Absolutnaja ustojčivost' v klassie nelinejnostiej s uslovijem na proizvodnuju*. AVTOMATIKA i TELEMECHANIKA. 1965. 26. 4. 577 - 590; DOK-LADY AN SSSR. 1965. 160. 2. 298 - 301
- [65] JAKUBOVIČ V.A.: *Častotnyje uslovija avtokolebanij v nelinejnych sistemach s odnoj stacionarnoj nelinejnost'ju*. SIBIRSKIJ MATEMATIČESKIJ ŽURNAL. 1973. 15. 5. 1100 - 1129
- [66] JOSSELSOHN R., RAJU G.V.S.: *Absolute stability of control systems with many sector and slope-restricted non-linearities*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1974. 19. 3. 609 - 614
- [67] KAKIMOTO N., OSHAWA Y., HAYASHI M.: *Transient stability analysis of multimachine power systems with field flux decay via Lyapunov's direct method*. IEEE TRANSACTIONS on POWER APPARATUS and SYSTEMS. 1980. 99. 5. 1819 - 1827
- [68] KAKIMOTO N., OHNOGI Y., MATSUDA H., SHIBUYA H.: *Transient stability analysis of large-scale power systems by Liapunov direct method*. IEEE TRANSACTIONS on POWER APPARATUS and SYSTEMS. 1984. 103. 1. 160 - 167
- [69] KALMAN R.E.: *Lyapunov function for the problem of Lur'e in automatic control*. PROCEEDINGS of the NATIONAL ACADEMY of SCIENCES of the USA. 1963. 49. 2. 201 - 205
- [70] KRZYŻ J.: *Problems in Complex Variable Theory*. New York, Elsevier Publishers 1972
- [71] KUDREWICZ J.: *Częstotliwościowe metody analizy układów nieliniowych*. Warszawa, WNT 1970
- [72] LANCASTER P.: *Theory of Matrices*. New York, Academic Press 1969
- [73] LASALLE J.P.: *Some extensions of Liapunov second method*. IRE TRANSACTIONS on CIRCUIT THEORY. 1960. 7. 4. 520 - 527
- [74] LASALLE J.P., LEFSCHETZ S.: *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*. Warszawa, WNT 1964
- [75] LASIECKA I.: *Stability of wave equations with nonlinear damping in the Dirichlet and Neumann boundary conditions*. LECTURE NOTES in CONTROL and INFORMATION SCIENCES. 1989. 114. 47 - 64
- [76] LASIECKA I.: *Asymptotic behavior of solutions to plate equations with nonlinear dissipation occurring through shear forces and bending moments*. APPLIED MATHEMATICS and OPTIMIZATION. 1990a. 21. 2. 167 - 189
- [77] LASIECKA I.: *Stabilization of the semilinear wave equations with viscous damping*. JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1990b. 86. 1. 73 - 87

LITERATURA

- [78] LASIECKA I., STAHEL A.: *The wave equation with semilinear Neumann boundary conditions*. NONLINEAR ANALYSIS, THEORY, METHODS and APPLICATIONS. 1989. 15. 1. 39 - 58
- [79] LEFEVER R., NICOLIS G.: *Chemical instabilities and sustained oscillations*. JOURNAL of THEORETICAL BIOLOGY. 1971. 30. 267 - 284
- [80] LEFSCHETZ S.: *Stability of Nonlinear Control Systems*. New York and London, Academic Press 1965
- [81] LICHTARNIKOV A.L.: *Kriterij absolutnoj ustojčivosti nelinejnyh operatornyh uravnenij*. IZVIESTIA AN SSSR. Seria matematičeskaja. 1977. 41. 5. 1064 - 1083
- [82] LICHTARNIKOV A.L., JAKUBOVIČ A.V.: *Častotnaja teoriema dla nelinejnyh odnoparametričeskich polugrup*. IZVIESTIA AN SSSR. Seria matematičeskaja. 1977. 41. 4. 895 - 911
- [83] LOPES O.: *Stability and forced oscillations*. JOURNAL of MATHEMATICAL ANALYSIS and APPLICATIONS. 1976. 55. 3. 686 - 698
- [84] LORENZ E.N.: *On the prevalence of aperiodicity in simple systems*. LECTURE NOTES in MATHEMATICS. 1979. 755. 53 - 75
- [85] LOUIS J.-CL., WEXLER D.: *The Hilbert space regulator problem operator Riccati equation under stabilizability*. ANNALES de la SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE de BRUXELLES, 1991. 105. 4. 137 - 165
- [86] ŁOJASIEWICZ S.: *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*. Warszawa, PWN 1973 (wydanie drugie 1976; *An Introduction to the Theory of Real Functions*. Chichester, Wiley 1988)
- [87] MARCATI P.: *Decay and stability for hyperbolic equations*. JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1984. 55. 1. 30 - 58
- [88] MEYER K.R.: *On the existence of Lyapunov functions for the problem of Lur'e*. SIAM JOURNAL on CONTROL. 1965. 3. 3. 373 - 382
- [89] MEYER K.: *Stability of Lur'e type equation*. LECTURE NOTES in MATHEMATICS. 1973. 312. 145 - 150
- [90] NAGUMO M.: *Über die Lage der Intergralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen*. PROCEEDINGS of the PHYSICO-MATHEMATICAL SOCIETY of JAPAN. 1942. 24. 551 - 559
- [91] MIN B.J., SLIVINSKY CH., HOFT R.: *Absolute stability analysis of PWM systems*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1977. 22. 3. 447 - 452
- [92] MIRA C.: *Détermination pratique du domaine de stabilité d'un point d'équilibre d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles*. COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES des SÉANCES de l'ACADEMIE des SCIENCES. PARIS. 1965. 261. 5314 - 5317
- [93] MIYADERA I.: *Some Remarks on Semigroups of Nonlinear Operators*. TÔHOKU MATHEMATICAL JOURNAL. 1971. 23. 2. 245 - 258
- [94] MOSER J.K.: *On nonoscillating networks*. QUARTERLY of APPLIED MATHEMATICS. 1967. 25. 1. 1 - 9
- [95] NAKAO M.: *Global existence and smoothing effect for a parabolic equation with a non-monotonic perturbation*. FUNKCIALAJ EKVACIOJ. 1986. 29. 2. 141 - 149
- [96] NARENDRA K.S., TAYLOR J.H.: *Frequency-Domain Criteria for Absolute Stability*. New York, Academic Press 1973
- [97] NEČITAILO A.V.: *Uslovija absolutnoj ustojčivosti regulirujemyh sistem v klassie nelinejnostej s uslovijem na proizvodnuju*. SIBIRSKIJ MATEMATIČESKIJ ŽURNAL. 1976. 17. 5. 1190 - 1193

- [98] NÖLDUS E.: *Autonomous periodic motion in nonlinear feedback systems*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1974. 19. 4. 381 - 387
- [99] NÖLDUS E.: *Oscillations criteria of the Popov type*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1975. 20. 4. 577 - 579
- [100] OKOCHI H.: *On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations*. JOURNAL of the MATHEMATICAL SOCIETY of JAPAN. 1988. 40. 3. 541 - 553
- [101] O'REILLY N., BYRNE P.C.: *Frequency domain conditions for the existence of a Lyapunov functional for the problem of Lurie*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1980. 25. 3. 555 - 557
- [102] PAI M.A., MOHAN M.A., RAO J.G.: *Power systems transient stability regions using Popov's method*. IEEE TRANSACTIONS on POWER APPARATUS and SYSTEMS. 1970. 89. 5. 788 - 794
- [103] PAI M.A., MURTHY P.G.: *On Lyapunov functions for power systems with transfer conductances*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1973. 18. 2. 181 - 183, 1974. 19. 5. 620 - 623
- [104] PAI M.A., MURTHY P.G.: *New Lyapunov functions for power systems based on minimal realizations*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1974. 19. 401 - 415
- [105] PAI M.A., NARAYANA C.L.: *Finite regions of attraction for multilinear systems and its application to the power system stability problem*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1976. 21. 5. 716 - 720
- [106] PAI M.A., VARWANDKAR S.D.: *On the inclusion of transfer conductances in Lyapunov functions for multimachine power systems*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1977. 22. 6. 983 - 985
- [107] PAI M.A.: *Power Systems Stability*. Amsterdam, North-Holland 1981
- [108] PAZY A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to PDEs*. New York, Springer 1983
- [109] PELCZAR A.: *Wstęp do teorii równań różniczkowych. Cz.II: Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych*. Warszawa, PWN 1989
- [110] PIATNICKI JE.S.: *O suščestvovanii absolutno ustojčivych sistem dla kotorych nie vpolniajets'a kriterij Popova*. AVTOMATIKA i TELEMECHANIKA. 1973. 38. 30 -37
- [111] PLISS V.: *Nelokal'nye problemy teorii kolebanij*. Moskva i Leningrad, Nauka 1964; *Non-local Problems of the Theory of Oscillations*. New York, Academic Press 1966
- [112] PONZO P., WAX. N.: *Note on a model of biochemical reaction*. JOURNAL of MATHEMATICAL ANALYSIS and APPLICATIONS. 1978. 66. 2. 354 - 357
- [113] POPOV V.M.: *Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions*. REVUE ROUMAINE des SCIENCES TECHNIQUES. s. ELECTROTECHNIQUE et ENERGETIQUE. 1964. 9. 4. 629 - 690
- [114] POPOV V.M.: *L'hyperstabilité des systems automatiques*. Paris, Dunod 1973
- [115] POWER H.M., TSOI A.C.: *Equivalent prediction of the circle criterion*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1972. 17. 565 - 566
- [116] POWER H.M., TSOI A.C.: *Improving the predictions of the circle criterion by combining quadratic forms*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1973. 18. 65 - 67
- [117] POWER H.M., TSOI A.C.: *A note on Brockett's variational technique on a conjecture in stability theory*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1974. 19. 251 - 252

LITERATURA

- [118] PURKAYASTHA S., MAHALANABIS A.K.: *An extended MKY lemma and its applications*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1971. 16. 4. 366 - 367, 1972. 17. 4. 578
- [119] RAŠVAN W.: *Absolutnaja ustojčivost' avtomatičeskich sistem s zapazdyvanijem*. Moskva, Nauka 1983 (rozszerzone wydanie rosyjskie),
- [120] REDHEFFER R.M.: *The theorems of Bony and Brézis on flow-invariant sets*. The AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY. 1972. 79. 7. 740 - 747
- [121] REISSIG R., SANSONE G., CONTI R.: *Qualitative Theorie Nichtlineare Differentialgleichungen*. Roma, Ed. Cremonese 1963 (przekład rosyjski. Moskva, Nauka 1974)
- [122] ROCKAFELLAR T.: *Vypuklyj analiz*. Moskva, Mir 1973; *Convex Analysis*, Princeton University Press 1970
- [123] SAEKI M., ARAKI M., KONDO B.: *A Lur'e-type Lyapunov functions for multimachine power systems with transfer conductances*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1985. 42. 3. 607 - 619
- [124] SCHMIDT E.J.P.G.: *Boundary control for the heat equation with non-linear boundary conditions*. JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1989. 78. 1. 89 - 121
- [125] SCOTT A.C.: *Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics*. New York, J.Wiley and Sons - Interscience 1970
- [126] SEGAL I.: *Non-linear semigroups*. ANNALS of MATHEMATICS. 1963. 78. 3. 339-364
- [127] SĘDZIWIY S.: *Asymptotic properties of solutions of non-linear differential equations of the higher order*. ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO. 1996. 131. 11. 69 - 80
- [128] ŠILJAK D.: *Nonlinear Systems. The Parameter Analysis and Design*. New York, J.Wiley and Sons 1969
- [129] SINGH V., MUKERJEE M.R.: *A Note on "Two Counter examples to Ajzerman's Conjecture"*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1975. 20. 179 - 180
- [130] SNYDERS J., ZAKAI M.: *On nonnegative solutions of the equation: $AD + DA^T = -C$* . SIAM JOURNAL on APPLIED MATHEMATICS. 1970. 18. 3. 704 - 714
- [131] THATHACHAR M.A.L., SRINATH M.D.: *Some aspects of the Lur'e problem*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1967. 12. 4. 451 - 453
- [132] THATHACHAR M.A.L., SRINATH M.D., RAMAPRIYAN H.K.: *On a modified Lur'e problem*. IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1967. 12. 6. 731 - 739
- [133] THATHACHAR M.A.L., SRINATH M.D., RAMAPRIYAN H.K.: *Absolute stability of systems with multiple nonlinearities*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1968. 7. 4. 365 - 375
- [134] THATHACHAR M.A.L., SRINATH M.D.: *An improved stability criterion for a system with a non-monotone non-linearity*. INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1970. 12. 1. 145 - 155
- [135] TROY W.: *Bifurcation phenomena in Fitzhugh's nerve conduction equations*. JOURNAL of MATHEMATICAL ANALYSIS and APPLICATIONS. 1976. 54. 3. 678 - 690
- [136] TURNER J.: *Asymptotic behavior of nonlinear oscillations in a chemical systems*. TRANSACTIONS of the NEW YORK ACADEMY of SCIENCES. 1974. II. 36. 800 - 806
- [137] VOGT G.: *On the Ajzerman's conjecture and boundedness*. IEEE TRANSACTIONS of AUTOMATIC CONTROL. 1967. 12. 3. 338 - 339, 6. 799
- [138] VORONOV A.A.: *Ustojčivost', upravljajemost', nabludajemost'*. Moskva, Nauka 1979

- [139] WAKEMAN D.R.: *An application of topological dynamics for non – autonomous ordinary differential equations.* JOURNAL of DIFFERENTIAL EQUATIONS. 1975. 17. 2. 259 - 295
- [140] WALKER J.A., CLARK.: *Complete Liapunov Analysis of Special System Having Multiple Singularities.* IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1967. 12. 1. 116 - 117
- [141] WALKER J.A.: *Dynamical Systems and Evolution Equations. Theory and Applications.* New York, Plenum Press 1980
- [142] WEBB G.F.: *Compactness of bounded trajectories of dynamical systems in infinite dimensional spaces.* PROCEEDINGS of the ROYAL SOCIETY of EDINBURGH. 1979. A84. 1. 19 - 33
- [143] WEBB G.F.: *A bifurcation problem for a nonlinear hyperbolic partial differential equation.* SIAM JOURNAL on MATHEMATICAL ANALYSIS. 1979. 10. 5. 922 - 932
- [144] WEIDMANN J.: *Linear Operators in Hilbert Spaces.* New York, Springer 1980
- [145] WEISS M., WEISS G.: *Optimal control of stable weakly regular linear systems.* MATHEMATICS for CONTROL, SIGNALS and SYSTEMS. 1997, 10. 287 - 330
- [146] WEISSENBERGER S.: *Stability–boundary approximations for relay–control systems via a steepest–ascent constructio of Lyapunov functions.* Joint Automatic Control Conference. Rensselaer Polytechnic Institute. Troy, New York 1965. Preprint Papers s.l.s.a. 584 - 594 lub TRANSACTIONS of the ASME. JOURNAL of BASIC ENGINEERING. 1966. D-88. 2. 419 - 428
- [147] WEISSENBERGER S.: *Piecewise–quadratic and piecewise–linear Lyapunov functions for discontinuous systems.* INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1969. 10. 2. 171 - 180
- [148] WEXLER D.: *Frequency domain stability for a class of equations arising in reactor dynamics.* SIAM JOURNAL on MATHEMATICAL ANALYSIS. 1979. 10. 1. 118 - 138
- [149] WEXLER D.: *On frequency domain stability for equations in Hilbert spaces via the algebraic Riccati equation.* SIAM JOURNAL on MATHEMATICAL ANALYSIS. 1980. 11. 6. 969 - 983
- [150] WILLEMS J.L.: *A stability inequality for a class of nonlinear feedback systems.* IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1967. 12. 2. 223 - 224, 1967. 12. 3. 339 - 340
- [151] WILLEMS J.L.: *The computation of finite stability regions by means of open Lyapunov surfaces.* INTERNATIONAL JOURNAL of CONTROL. 1969. 10. 5. 537 - 544
- [152] WILLEMS J.L.: *Stability Theory of Dynamical Systems.* New York, J.Wiley and Sons – Interscience 1970
- [153] WILLEMS J.L.: *The circle criterion and quadratic Lyapunov functions for stability analysis.* IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1973. 18. 21. 84
- [154] WILLEMS J.L., WILLEMS J.C.: *The application of Lyapunov methods to the computation of transient regions for multimachine power systems.* IEEE TRANSACTIONS on POWER APPARATUS and SYSTEMS. 1970. 89. 5. 795 - 801
- [155] WINKIN J.: *Spectral Factorization and Feedback Control for Infinite–Dimensional Systems.* Ph.D. Facultes Universitaires N.D. de la Paix. Namur. Belgium. 1989
- [156] WU S.H., MANKE G.M.: *Popov criteria and Lagrange stability of nonlinear systems.* IEEE TRANSACTIONS on AUTOMATIC CONTROL. 1967. 12. 5. 627
- [157] ZUAZUA E.: *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback.* SIAM JOURNAL on CONTROL and OPTIMIZATION. 1990. 28. 2. 466 - 477

INDEKS

Abstrakcyjny problem początkowy, 219

aproksymacja

– inżynierska, 163

– metodą projekcji, 166

atraktor, 17, 193

– globalny, 142

 jednostajny, 137

– jednostajny, 17, 193, 270

Charakterystyka częstotliwościowa zmodyfikowana, 64, 263

Elektryczny opornik balastowy, 155

Faktoryzacja, 28, 120

formuła Hille'a, 218

funkcja

– jednoznaczności, 19

– lipschitzowska

 globalnie, 194

 lokalnie, 19, 62, 86, 123, 129, 132,

 150, 151, 153, 157, 172, 252

– lokalnie akkretywna, 76, 81

– Osgooda, 19

funkcjonal

– Lapunowa, 16, 197, 259, 270

– lokalnie lipschitzowski, 169

Generator

– infinitesimalny, 134

– z filtrem RC, 120, 129

– z mostkiem Wiena, 175

gradient funkcyjonału, 117, 125, 138, 157

Hipoteza Ajzermana, 62, 72, 76, 81, 86, 88, 98, 106, 108, 131, 191

Iloczyn Kroneckera macierzy, 54

impedancja falowa, 147

Kryterium

– koła, 202, 274

– kwadratowe Jakuboviča, 201

– Michajłowa–Leonarda, 24

– Nyquista, 25, 46

dla układu z regulatorem proporcjonalnym, 26

krytyczny czas oczyszczenia zwarcia, 103

Lemat

– Bhatii–Szegö, 21

– Crandalla, 18

– Hartmana, 17

– Kalmana, 26, 59, 61

– Meyera, 222

– Popova, 119, 201

L^2 –sterowalność, 145

L_g –stabilność, 169, 192

Macierz

– Hurwitza, 32

– Jacobiego, 119

– Toeplitza, 29

mnożniki Lagrange'a, 126

model dynamiki reaktora jądrowego, 152

Nieliniowość typu przekaźnikowego, 220

nieograniczona przedłużalność, 141

nierówność

– Poincaré, 158

– Popova, 55

 interpretacja geometryczna, 55, 87,

 93

notacja quasiliniowa, 121

Obszar

– atrakcji, 17, 22

– pierścieniowy Bendixsona, 176, 177

operator

– dyssypatywny, 136, 217, 218

– gradientowy, 116, 119, 137, 142

– lokalnie lipschitzowski, 136, 137, 142, 148

– sprzężony, 134

– wielowartościowy, 217, 221

– zwarty, 143

optymalna prosta podpierająca plot, 64, 263

oscylator

– asymetryczny LaSalle'a, 113

- z mostkiem typu T, 252
- z mostkiem typu 2T, 254

Para

- obserwowalna, 23, 259
- stabilizowalna, 145
- sterowalna, 23, 259, 273

plot

- charakterystyki częstotliwościowej, 64
- Nyquista, 25

półgrupa

- analityczna, 134
- Co, 134, 136, 138, 143, 144, 218
- ω -quasikontrakcji, 218
- prędkość propagacji fali, 147
- procedura faktoryzacyjno-realizacyjna, 60, 145, 148

przedstawienie Diejča, 151, 153

przykład Braytona, 147

punkt

- osobliwy (stacjonarny), 232
- równowagi, 192
- startowy, 193

Rozwiązania

- d'Alemberta, 147, 150
- ograniczone, 169
- prawie-okresowe, 45
- problemu początkowego
 - mocne, 219, 226
 - słabe, 136

równanie

- macierzowe Lapunowa, 35, 48, 112, 184, 188, 243
- semiliniowe paraboliczne, 155
- typu hiperbolicznego, 161

ruch ślizgowy, 223

Sektor

- ABSS, 62, 78, 85, 90, 92-94, 107, 130, 131, 134, 176, 254
 - Popova, 124, 187
 - Hurwitza, 62, 78, 79, 90-92, 107, 108, 110, 122, 130, 131, 166, 176, 188, 264
- splot, 142
- stabilność, 16, 137
- absolutna, 62, 73, 74, 76, 78, 86, 88, 90, 93, 95, 107, 132, 138, 143, 263

- asymptotyczna, 17, 52, 97, 102, 105, 112, 116, 119, 123, 194, 274
 - jednostajna, 17, 194, 275
- eksponencjalna, 135, 138, 141, 143, 144, 147, 151, 152
- globalna
 - asymptotyczna, 17, 49, 51, 53, 62, 76, 81-83, 95, 98, 112, 116, 119, 122, 127, 129-131, 137, 142, 143, 145, 150, 153, 155, 160, 201, 212, 215, 254, 256
 - jednostajna asymptotyczna, 17, 137, 144, 145, 151, 153
- jednostajna, 16
- subgradient, 240
- system elektroenergetyczny, 98, 101

Trajektoria Krasowskiego, 97

transmitancja, 151, 259, 275

- zmodyfikowana widmowa, 55

twierdzenie

- Crandalla-Liggetta, 218
- Crandalla-Miyadery, 220
- Dragilewa, 175
- Hille'a, 135
- Hille'a-Phillipsa-Yosidy, 135
- Lapunowa-LaSalle'a, 21
- Piatnickiego, 93
- Popova, 33, 46
- uogólnione LaSalle'a, 16, 75, 233, 236
- Wakemana, 270
- Walkera, 135

Układ

- dynamiczny dyskretny, 192, 196
- dyssypatywny, 169, 179
- impulsowy regulacji automatycznej, 212
- Liénarda, 172, 178
- Lorenza, 171
- Lurie, 37, 62
 - sterowania bezpośredniego, 252
 - sterowania pośredniego, 66
- rozwiązujących równań
 - Lurie, 38, 49, 51, 117, 142
 - Lurie-Lefschetza, 137
- semidynamiczny ciągły, 15, 22
 - lokalny, 15, 20, 21, 42, 51-53, 75, 94, 95, 118, 169, 270

INDEKS

- semiliniowy, 116
 - abstrakcyjny, 136, 147, 156, 160

Warunki

- brzegowe
 - Dirichleta, 155, 161
 - Neumanna, 155, 161
 - okresowe, 155
- Lopesa, 149, 150
- regularności, 269
- residualne, 56
- słabej styczności, 18

- wielomian Czebyszewa drugiego rodzaju,
164
- współczynnik odbicia, 147

Zasada inwariantności, 16, 143, 193, 270

zbiór

- graniczny, 15, 192
- inwariantny, 15, 20, 22, 115, 193, 234
 - mocno, 15, 143, 193, 234
- niestabilny, 194
- stabilny, 194

æ

WYKAZ RYSUNKÓW

2.1	Ilustracja topologicznych własności poziomic funkcjonalów ciągłych, dodatkowo –określonych na przykładzie funkcjonau $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^4$	21
2.2	Schemat układu regulacji automatycznej	25
2.3	Ilustracja niejednoznaczności faktoryzacji wielomianu $\theta(s)$	28
2.4	Układ Lurie sterowania	37
2.5	Ilustracja poszczególnych faz działania programu <code>victory.m</code>	65
2.6	Ilustracja poszczególnych faz działania programu <code>victoro.m</code>	65
3.1	Wykres nieliniowości φ dla $\delta = 0.5$	79
3.2	Wyniki symulacji układu Plissa z parametrami $\alpha = \beta = 1$ i nieliniowością φ jak na rysunku 3.1	80
3.3	Maksymalizacja $k(U)$ w dwóch różnych przypadkach. Rysunek lewy odpowiada parametrom: $\alpha = 1, \beta = 0.8, \gamma = 0.5$. Lokalne maksimum funkcji k leży na prawo od punktu $(2\beta - \alpha^2)/2$. Rysunek prawy odpowiada parametrom: $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2$. Lokalne maksimum funkcji k leży na lewo od punktu $(2\beta - \alpha^2)/2$	85
3.4	Graficzna interpretacja nierówności Popova dla układu Dewey’a–Jury’ego. Na osiach zaznaczono części: rzeczywistą i urojoną zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowej	87
3.5	Graficzna interpretacja nierówności Popova dla układu Brocketta. Na osiach zaznaczono części: rzeczywistą i urojoną zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowej	87
3.6	Graficzna interpretacja nierówności Popova dla układu Fittsa. Na osiach zaznaczono części: rzeczywistą i urojoną zmodyfikowanej charakterystyki częstotliwościowej	93
4.1	Wykres nieliniowości (4.5)	96
4.2	Obszar atrakcji w przykładzie Krasowskiego: 1 – brzeg obszaru atrakcji, 2 – trajektoria startująca z obszaru atrakcji, 3 – trajektoria nieograniczona	97
4.3	Wykres funkcji nieliniowej F dla prostego systemu elektroenergetycznego. Zaznaczono punkty: $U = (\sigma_1, 0)$, $W = (\sigma_2, 0)$	99
4.4	Prosty system elektroenergetyczny	101
4.5	Wykres nieliniowości używanej do symulacji układu Dewey’a i Jury’ego	107
4.6	Wyniki symulacji układu Deweya i Jury’ego	109
4.7	Weryfikacja warunku sektorowego dla układu zmodyfikowanego: 1 – dolna granica stożka absolutnej stabilności, 2 – górna granica stożka absolutnej stabilności, 3 – górna granica stożka Hurwitza	110

WYKAZ RYSUNKÓW

6.1	Generator z filtrem RC	120
6.2	Nieliniowy obwód elektryczny z filtrem drabinkowym $RC-RC-RC$	129
6.3	Nieliniowy obwód elektryczny z filtrem drabinkowym $RC-RC-CR$	131
6.4	Nieliniowy obwód elektryczny z filtrem drabinkowym $CR-RC-CR$	132
6.5	Przykład Braytona. Po prawej stronie charakterystyka diody tunelowej	146
6.6	Generator z linią drabinkową RC	163
7.1	Wykres funkcji φ	176
7.2	Graficzna weryfikacja nierówności (7.50). L – wykres lewej strony dla $\alpha = 0.03$, P – wykres prawej strony dla $\varepsilon = 0.005$	191
7.3	Graficzna weryfikacja warunku sektorowego. 1 – półprosta o nachyleniu $\alpha = 0.03$, 2 – prosta o nachyleniu $1 + \alpha$	191
8.1	Trajektorie przykładowego dyskretnego systemu dynamicznego	195
8.2	Graficzna weryfikacja warunku (8.14): wykres funkcji F leży w stożku ograniczonym prostymi o nachyleniach 0 i $1/2$	204
8.3	Otrzymany podzbiór obszaru atrakcji: 1 – estymata obszaru atrakcji, 2 – prosta $c^T x = x_2 = y_1$	204
8.4	Porównanie estymat obszaru atrakcji dla systemu (8.24): 1 – dokładny obszar atrakcji $A(\{0\})$, 2 – estymata Ω_A , 3 – estymata Ω_{A_1} , 4 – estymata Ω_{A_2}	212
8.5	Schemat blokowy impulsowego układu regulacji automatycznej	213
8.6	Działanie regulatora: linia ciągła – sterowanie u , linia przerywana – uchyb y	213
8.7	Dyskusja graficzna warunków stabilności	215
8.8	Rozwiązania układu (8.43) dla różnych warunków początkowych	216
9.1	Dyskusja graficzna drugiego równania układu (9.25)	229
9.2	Portret fazowy układu czasooptymalnego	246
9.3	Dekompozycja płaszczyzny stanu na obszary o różnym sterowaniu i lokalizacja ruchów ślizgowych	247
9.4	Weryfikacja warunków (9.52), (9.68). W stożku C_1^- forma kwadratowa $x^T H x$ nie przyjmuje wartości dodatnich, a w stożku C_2^+ forma kwadratowa $x^T (\hat{A}^T H + H \hat{A}) x$ nie przyjmuje wartości ujemnych	249
9.5	Portret fazowy układu suboptymalnego z zaznaczoną estymatą obszaru atrakcji	250
10.1	Oscylator z mostkiem typu T	253
10.2	Wykresy operatorów wielowartościowych: a) operator F ; b) operator $(I - F)^{-1}$. Γ – granica stabilności, $Q = ((\mu - 1)/\mu, 1/\mu)$, $P = ((1 - \mu)/\mu, 1/\mu)$	253
10.3	Oscylator z mostkiem typu 2T	254
10.4	Ilustracja poszczególnych faz działania programu <code>victord.m</code>	265
10.5	Weryfikacja nierówności (10.16) dla Przykładu 2	266

WYKAZ RYSUNKÓW

10.6 Weryfikacja nierówności Popova (2.84) dla Przykładu 2	267
10.7 Przekroje funkcjonału V i estymata obszaru atrakcji: 1 – zbiór \mathcal{G} , 2 – zbiór M , 3 – zbiór E	272