

6. SYMULACJA NIEUSTALONYCH PROCESÓW CIEPLNYCH

6.1. ZASADY OGÓLNE

Równanie Fouriera dla procesu niestacjonarnego (nieustalonego) ma postać:

$$\operatorname{div}(k(t)\operatorname{grad}(t)) + Q = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau},$$

albo w przypadku anizotropowych własności cieplnych:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y(t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \left(Q - c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (6.1)$$

W określonej chwili czasu pochodne temperatury mogą być traktowane jako funkcje tylko współrzędnych x, y, z . Wtedy rozwiązanie równania (6.1) jest prowadzone analogicznie jak dla procesu ustalonego, przyjmując całe wyrażenie w ostatnim nawiasie (6.1) jako parametr Q w funkcjonale (5.9). W wyniku wykorzystania procedur, opisanych w rozdziale 5.1 otrzymamy:

$$[H]\{t\} + [C] \frac{\partial}{\partial \tau} \{t\} + \{P\} = 0, \quad (6.2)$$

$$[C] = \int_V c\rho \{N\} \{N\}^T dV. \quad (6.3)$$

W ogólnym przypadku wartości temperatury w węzłach $\{t\}$ zależą od czasu. Przyjmując, że wektor $\{t_0\}$ reprezentuje temperatury węzłowe w chwili $\tau = 0$, to w przedziale czasu $\Delta\tau$ wektor ten będzie wyznaczony równaniem:

$$\{t\} = \{N_0, N_1\} \begin{Bmatrix} \{t_0\} \\ \{t_1\} \end{Bmatrix}. \quad (6.4)$$

W równaniu (6.4) $\{N_0\}$ i $\{N_1\}$ są funkcjami kształtu zależnymi od czasu, $\{t_1\}$ – temperatury węzłowe po czasie $\Delta\tau$.

Zakładając, że dla małych kroków czasowych $\Delta\tau$ zależność temperatur węzłowych od czasu jest liniowa, funkcje kształtu przyjmą postać:

$$N_0 = \frac{\Delta\tau - \tau}{\Delta\tau}, \quad N_1 = \frac{\tau}{\Delta\tau}. \quad (6.5)$$

Uwzględniając zależność (6.4), pochodne temperatury względem czasu można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{t\}}{\partial \tau} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_0}{\partial \tau} & \frac{\partial N_1}{\partial \tau} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t_0\} \\ \{t_1\} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta\tau} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t_0\} \\ \{t_1\} \end{Bmatrix} = \frac{\{t_1\} - \{t_0\}}{\Delta\tau}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ponieważ podczas interpolacji czasowej wykorzystano liniowe funkcje kształtu, rezultat (6.6) jest zbieżny z wynikiem, który można uzyskać za pomocą metody różnic skończonych. Istnieje kilka możliwości rozwiązania układu równań (6.2) za pomocą interpolacji (6.6) zależnie od tego, w jakiej chwili czasu będziemy rozpatrywać wektor $\{t\}$ we wzorze (6.2) przy macierze $[H]$.

1. Przyjęto, że $\{t\} = \{t_0\}$, dlatego wzór (6.2) można zapisać jako:

$$[H]\{t_0\} + [C]\frac{\{t_1\} - \{t_0\}}{\Delta\tau} + \{P\} = 0.$$

Na tej podstawie otrzymano jawny schemat wyznaczenia temperatury $\{t_1\}$ w przedziale czasu $\Delta\tau$:

$$\{t_1\} = \{t_0\} - \frac{\Delta\tau}{[C]}([H]\{t_0\} + \{P\}). \quad (6.7)$$

Jednak taki schemat ma ograniczone zastosowanie, ze względu na słabą stabilność rozwiązania dla różnych $\Delta\tau$.

2. Przyjęto, że $\{t\} = \{t_1\}$, dlatego wzór (6.2) można zapisać następująco:

$$[H]\{t_1\} + [C]\frac{\{t_1\} - \{t_0\}}{\Delta\tau} + \{P\} = 0.$$

W ten sposób otrzymano niejawny schemat wyznaczenia temperatury $\{t_1\}$:

$$\left([H] + \frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\} - \left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\} + \{P\} = 0. \quad (6.8)$$

W takim przypadku wyznaczenie $\{t_1\}$ wymaga rozwiązania układu równań (6.8).

Zgodnie z otrzymanymi wzorami można zapisać macierz $[C]$:

9.1 SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W ostatnim rozdziale niniejszego opracowania przedstawiono przykład oprogramowania, które stanowi rozwiązanie zagadnienia nieustalonej wymiany ciepła w układzie dwuwymiarowym. Podstawy teoretyczne tego rozwiązania są podane w rozdziałach 5 i 6. Układ równań MES uzyskano za pomocą wzoru (6.8):

$$\left([H] + \frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_1\} - \left(\frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0, \quad (6.8)$$

gdzie poszczególne wyrażenia obliczono za pomocą równań (5.14), (5.15) i (6.3):

$$[H] = \int_V k \left(\left\{ \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS, \quad (6.9)$$

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_\infty dS, \quad (6.10)$$

$$[C] = \int_V c\rho \{N\} \{N\}^T dV. \quad (6.11)$$

We wzorze (6.8) $\{t_1\}$ oznacza wartości temperatur węzłowych po czasie $\Delta\tau$, natomiast wektor $\{t_0\}$ reprezentuje temperatury węzłowe w chwili $\tau = 0$.

Ponieważ analogiczną postać mają równania dla zadań dyfuzji, dlatego opracowany program po zmianie współczynników można wykorzystać do modelowania procesów dyfuzji. Wyzerowanie macierzy $[C]$ spowoduje rozwiązanie ustalonego zadania cieplnego albo innego zadania opartego na równaniu Poissona (3.65).