Rozwiązanie problemu stacjonarnego oraz niestacjonarnego 2d temperatura

Funkcje kształtu elementu czterowęzłowego:

$$N_1 = 0.25(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = 0.25(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = 0.25(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = 0.25(1-\xi)(1+\eta)$$

Interpolacja współrzędnej podano w następujący sposób:

$$x = \sum_{i=1}^{np} (N_i x_i) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \{N\}^T \{x\}$$

$$y = \sum_{i=1}^{np} (N_i y_i) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \{N\}^T \{y\}$$

Rozwiązanie krok po kroku dla 1D

$$N_1 = 0.5(1-\xi)$$

$$N_2 = 0.5(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ czyli } \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -0.5$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 0.5$$

$$x = \sum_{i=1}^{np} (N_i x_i) = N_1 x_1 + N_2 x_2$$

$$\det J\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\right] = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2$$

$$\det J\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\right] = -0.5 x_1 + 0.5 x_2 = 0.5 * (x_2 - x_1)$$

Rozwiązanie krok po kroku dla 2d

$$[H]=\int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right)dV+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T\,dS,$$

W tym równaniu problemem jest obliczenie pochodnej funkcji kształtu względem z oraz y.

Rakiej pochodnej nie da się obliczyć wprost ponieważ funkcje kształtu zdefiniowane są w lokalnym układzie współrzędnych. Aby obliczyć takie pochodne korzysta się z następującej zależności pokazanej na przykładzie:

Podano następującą funkcję:

$f(x)=x^2$ obliczam jej pochodną: $f'(x)=2x.$ Jeżeli x jest zależny od z (np. x=2z) to wtedy mamy:

$f(x(2z))=(2z)^2$

Stąd mamy następującą zależność:

$$f'(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}.$$

Dlatego do obliczenia pochodnych względem ksi oraz eta korzysta się n następujących zależności:

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial \xi}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial N(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial \eta}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial N(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Powyższe wzory można przedstawić w sposób macierzowy:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć wektor:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\end{bmatrix}$$

Korzystamy z zasady rozwiązania układu równań:

$$[A]\{b\}=\{c\}\Rightarrow\{b\}=[A]^{-1}\{C\}$$

Jeżeli $[A]=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ to macierz odwrotna $[A]^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Stąd:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Powyższe sformułowanie nazywa się jakobianem przekształcenia. Jakobian obliczany jest dla każdego punktu całkowania osobno.

Obliczamy pochodne funkcji kształtu względem ksi oraz eta:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}(1-\eta) \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1-\eta) \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1+\eta) \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}(1+\eta)_4$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}=-\frac{1}{4}(1-\xi) \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta}=-\frac{1}{4}(1+\xi) \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(1+\xi) \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(1-\xi)_4$$

Wyznaczamy jakobian przekształcenia:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial N_1}{\partial \xi}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial \xi}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial \xi}x_4=\frac{1}{4}(\eta-1)x_1+\frac{1}{4}(1-\eta)x_2+\frac{1}{4}(1+\eta)x_3-\frac{1}{4}(1+\eta)x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\eta}{4}x_1-\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{4}x_2-\frac{\eta}{4}x_2+\frac{1}{4}x_3+\frac{\eta}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4-\frac{\eta}{4}x_4=\frac{\eta}{4}(x_1-x_2+x_3-x_4)+\frac{1}{4}(-x_1+x_2+x_3-x_4)$$

Analogicznie kolejne pochodne:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}=\frac{\partial N_1}{\partial \eta}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial \eta}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial \eta}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial \eta}x_4=\frac{1}{4}(\xi-1)x_1-\frac{1}{4}(1+\xi)x_2+\frac{1}{4}(1+\xi)x_3+\frac{1}{4}(1-\xi)x_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{\partial N_1}{\partial \xi}y_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}y_2+\frac{\partial N_3}{\partial \xi}y_3+\frac{\partial N_4}{\partial \xi}y_4=\frac{1}{4}(\eta-1)y_1+\frac{1}{4}(1-\eta)y_2+\frac{1}{4}(1+\eta)y_3-\frac{1}{4}(1+\eta)y_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{\partial N_1}{\partial \eta}y_1+\frac{\partial N_2}{\partial \eta}y_2+\frac{\partial N_3}{\partial \eta}y_3+\frac{\partial N_4}{\partial \eta}y_4=\frac{1}{4}(\xi-1)y_1-\frac{1}{4}(1+\xi)y_2+\frac{1}{4}(1+\xi)y_3+\frac{1}{4}(1-\xi)y_4$$