APROKSYMACJA

Funkcja liniowa

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x_j \tag{1}$$

Aproksymacja metoda najmniejszych kwadratów:

$$\Phi(C_0, C_1) = \sum_{j=1}^{m} [C_0 + C_1 x_j - y(x_j)]^2 \longrightarrow \min \tag{2}$$

Z warunku istnienia ekstremum:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_0} = \sum_{j=1}^{m} 2[C_0 + C_1 x_j - y(x_j)] = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} = \sum_{j=1}^{m} 2[C_0 + C_1 x_j - y(x_j)] x_j = 0 \tag{4}$$

Przekształcenie:

$$mC_0 + C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j - \sum_{j=1}^{m} y(x_j) = 0 \tag{5}$$

$$C_0 \sum_{j=1}^{m} x_j + C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \sum_{j=1}^{m} y(x_j) x_j = 0 \tag{6}$$

Wartości C_1 oraz C_2 obliczono w sposób następujący:
Z równania (5) wyznaczono C_0

$$C_0 = \frac{\sum_{j=1}^{m} y(x_j) - C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j}{m} \tag{7}$$

C_0 podstawiono do równania (6) oraz przekształcono w sposób następujący:

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} y(x_j) - C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j + C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \sum_{j=1}^{m} y(x_j) x_j = 0 \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y(x_j) - C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{m} x_j + mC_1 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - m \sum_{j=1}^{m} y(x_j) x_j = 0 \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y(x_j) \sum_{j=1}^{m} x_j - C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{m} x_j + mC_1 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - m \sum_{j=1}^{m} y(x_j) x_j = 0 \tag{10}$$

$$C_1 m \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{m} x_j = m \sum_{j=1}^{m} y(x_j) x_j - \sum_{j=1}^{m} y(x_j) \sum_{j=1}^{m} x_j \tag{11}$$

$$C_1 = \frac{m \sum_{j=1}^{m} y(x_j) x_j - \sum_{j=1}^{m} y(x_j) \sum_{j=1}^{m} x_j}{m \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{m} x_j} \tag{12}$$

Obliczone C_1 wstawiono do równania (7):

$$C_0 = \frac{\sum_{j=1}^{m} y(x_j) - C_1 \sum_{j=1}^{m} x_j}{m} \tag{13}$$

Przykład:

Wyznacz parametry liniowej funkcji aproksymującej postaci $\varphi(x) = C_0 + C_1 x$ dla następujących danych:

X	1	2	3
Y	1	6	14

Obliczone poszczególne sumy:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = 6$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^2 = 14$$

$$\sum_{j=1}^{m} y(x_j) = 21$$

$$\sum_{j=1}^{m} y(x_j) x_j = 55$$

Obliczone sumy podstawiono do równania (12)

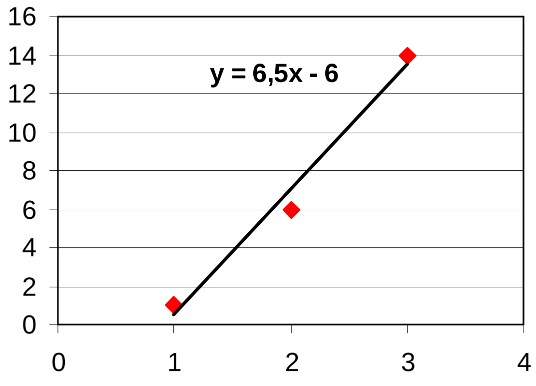
$$C_1 = \frac{m\sum_{j=1}^{m} y(x_j)x_j - \sum_{j=1}^{m} y(x_j)\sum_{j=1}^{m} x_j}{m\sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{m} x_j} = \frac{3*55-21*6}{3*14-6*6} = \frac{39}{6} = 6.5$$

Korzystając z formuły (13) oraz wartości parametru C_1 obliczono:

$$C_0 = \frac{\sum_{j=1}^{m} y(x_j) - C_1\sum_{j=1}^{m} x_j}{m} = \frac{21-6.5*6}{3} = \frac{-18}{3} = 6$$

Równanie prostej aproksymującej jest postaci:

$$\varphi(x) = 6 + 6.5x$$



Dane oraz wynik aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów.