CAŁKI

NIEZBĘDNIK

CAŁKOWANIE FUNKCJI POTĘGOWYCH

	$x \in \mathbb{R}$	$\int 1 \, dx = x + C$
$a \in \mathbb{R}$,	$x \in \mathbb{R}$	$\int a \, dx = a \cdot x + C$
$k \neq -1$,	$x \in \square^*$	$\int x^k \, dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$
$k \neq -1$, $a \in \mathbb{R}$,	$x \in \square^*$	$\int (x-a)^k \, dx = \frac{1}{k+1} \cdot (x-a)^{k+1} + C$
	$x \in \mathbb{R}$	$\int x \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C$
	$x \geq 0$	$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$
	$x > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \cdot \sqrt{x} + C$
	$x \neq 0$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x \rvert + C$
	$x \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C$
$a \in \mathbb{R}$,	$x \neq a$	$\int \frac{1}{(x-a)^2} \, dx = -\frac{1}{x-a} + C$
$k \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$,	$x \in \square^*$	$\int \frac{1}{(x-a)^k} \, dx = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

Uwagi: *Dziedzina funkcji podcałkowej w kilku przypadkach nie została wskazana (napisano $x \in \square^*$), gdyż zależy ona od wyboru parametru bądź parametrów. Mowa tu o k oraz a, parametrach pojawiających się w funkcjach podcałkowych. I tak np. dla pierwszej całki z $\square^*$ dziedzinę funkcji podcałkowej określamy pisząc $x \neq 0$, gdy $k < 0$ oraz $x \in \mathbb{R}$, gdy $k \geq 0$.
Ostatnia całka, jest często spotykaną wersją czwartej całki z tego zestawu, zastosowanie gotowego wzoru pozwala podać wynik bez dokonywania dodatkowych przekształceń.

CAŁKOWANIE UŁAMKÓW PROSTYCH

	$x \neq 0$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x \rvert + C$
$a \in \mathbb{R}$,	$x \neq a$	$\int \frac{1}{x-a} \, dx = \ln\lvert x-a \rvert + C$
$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$,	$x \neq a$	$\int \frac{1}{(x-a)^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$a \neq 0$,	$\lvert x \rvert \neq a$	$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
	$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$
$a \neq 0$,	$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$a \in \mathbb{R}$,	$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{2x}{x^2+a^2} \, dx = \ln\lvert x^2+a^2 \rvert + C$
$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $a \neq 0$,	$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \, dx = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} \, dx$
$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$,	$x \in \mathbb{R}$	$\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} + C$

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYKŁADNICZEJ I LOGARYTMICZNEJ

$a>0, a\neq 1,\quad x \in \mathbb{R} \qquad \int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

$x \in \mathbb{R} \qquad \int e^x \, dx = e^x + C$

$x > 0 \qquad \int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$

CAŁKOWANIE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

$x \in \mathbb{R} \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$x \in \mathbb{R} \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$

$x \in \mathbb{R} \qquad \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$

$x \in \mathbb{R} \qquad \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$

$n \in \mathbb{N},\quad x \in \mathbb{R} \qquad \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cdot \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$

$n \in \mathbb{N},\quad x \in \mathbb{R} \qquad \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cdot \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

$x \neq m\pi \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$

$x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$

$x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \qquad \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

$x \neq m\pi \qquad \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$

Uwagi: Powyżej przedstawiono wzory rekurencyjne stosowane do wyznaczania całek z funkcji $\sin^n x$ oraz $\cos^n x$ dla $n \in \mathbb{N}$, jednak w przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą dużo szybciej oblicza się całki tego typu przez zastosowanie podstawienia, odpowiednio $t = \sin x$ oraz $t = \cos x$, wykorzystując przy tym dodatkowo jedynkę trygonometryczną. Przy ostatnich czterech całkach przyjmujemy, że $m \in \mathbb{Z}$.

INNE CAŁKI

$x \in (-1, 1) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$

$a \neq 0,\quad x \in (-|a|, |a|) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{|a|} + C$

$a \neq 0,\quad x \in \square^{**} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

$a \neq 0,\quad x \in \square^{**} \qquad \int \sqrt{x^2+a} \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

Uwaga: **Dziedzina funkcji podcałkowych ostatnich dwóch całek z tego zestawu nie została wskazana (napisano $x \in \square^{**}$), gdyż zależy ona od wartości parametru a. Dziedziną funkcji podcałkowej z trzeciej całki są $x \in (-a, a) = (-|a|, |a|)$, gdy $a < 0$ oraz $x \in \mathbb{R}$, gdy $a > 0$ (w tym przypadku możemy również zrezygnować z modułu argumentu logarytmu na rzecz nawiasu).