

Matematyka III
- WEEK 1 -
AGH BIS-2-101-OZ-s

Silnia

1. Oblicz: $0!$, $2!$, $5!$, $4!$, $20! - 18!$, $(3!)!$, $3!!$.
2. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:
 - (a) $\frac{10!}{8!}$,
 - (b) $\frac{12!}{13!}$,
 - (c) $\frac{7!}{5! \cdot 6!}$,
 - (d) $\frac{7! - 8!}{6! + 7!}$,
 - (e) $\frac{11!!!}{5!}$,
 - (f) $\frac{12!!!}{11!}$.
3. Niech n będzie liczbą naturalną dodatnią. Uprość wyrażenie $\frac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{(n-2)! \cdot n!}$.

Permutacje

4. Na ile sposobów można ułożyć na półce trzy różne książki?
5. Na ile sposobów 15 osób może zająć 15 ponumerowanych miejsc?
6. Pewna grupa ćwiczeniowa składa się z 15 dziewcząt oraz 12 chłopców. Na ile sposobów mogą się oni ustawić do fotografii, jeżeli przyjmiemy że dziewczęta ustawią się w drugim rzędzie, a chłopcy w pierwszym?
7. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy liczby pięciocyfrowe o różnych cyfrach. Ile takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć?
8. Na ile sposobów możemy ustawić liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, tak aby na przemian występowała liczba parzysta i nieparzysta?
9. Na Mistrzostwach Świata w Narciarstwie Klasycznym w finale sprintu techniką klasyczną kobiet brało udział sześć zawodniczek. Na ile sposobów mogły one dobiec do mety (zakładamy, że nie mogły dobiec jednocześnie)? A jeżeli wiemy, że pierwsza dobiegła Marit Bjørgen (jedna z uczestniczek finału), to ile jest możliwych wyników? Co z liczbą możliwych wyników, jeżeli wiemy, że cztery występujące w finale Norweżki zajmą miejsca obok siebie (np. 3, 4, 5 i 6)?

Symbol Newtona

10. Oblicz: $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{7}{9}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{7}$, $\binom{2015}{0}$, $\binom{6}{3!}$.
11. Podane wyrażenia prowadź do najprostszej postaci (przyjmij, że n jest liczbą naturalną nieujemną):
 - (a) $\binom{n}{n-1}$,
 - (b) $\binom{n+3}{n}$.
12. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leq k \leq n$ zachodzi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

13. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leq k \leq n$ zachodzi
- $$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}.$$

Kombinacje

14. Dany jest zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$ wypisz wszystkie kombinacje dwuelementowe tego zbioru, ile ich będzie? Jaki jest mechanizm tworzenia kombinacji trójelementowych, gdy już mamy kombinacje dwuelementowe?
15. Z grupy 30 osobowej należy wytypować 10 chętnych do rozwiązania zadań na tablicy. Na ile sposobów można to zrobić?
16. W urnie znajduje się 10 kul. Losujemy 4 kule (bez zwracania, za jednym podejściem). Ile jest możliwych wyników losowania?
17. Totalizator Sportowy organizuje loterię Lotto. W wyniku losowania z 49 ponumerowanych kul otrzymujemy 6 kul (liczb) i sprawdzamy je z wytypowanymi przez nas. Ile jest możliwości skreśleń 6 liczb z 49 takich, które gwarantują trafienie "czwórki" (otrzymanych w losowaniu liczb)?
18. Z talii 52 kart wyciągamy losowo 5 kart. Ile jest możliwych wyników losowania, takich aby otrzymać dwa asy i trzy króle.
19. Ile prostych można przeprowadzić przez 10 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej?
20. Na ile sposobów można podzielić grupę 30 osób na dwie równoliczne grupy.

Wariacje z powtórzeniami

21. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 chcemy utworzyć liczbę trzycyfrową, w której cyfry mogą się powtarzać. Ile takich liczb możemy utworzyć?
22. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia? Ile jest możliwych wyników doświadczenia, w którym rzucamy jedynie dwa razy?
23. Rzucamy dwa razy monetą (przyjmuje się, że moneta ma dwie rozróżnialne strony orła i reszkę). Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia? Ile jest możliwych wyników doświadczenia, w którym monetą rzucamy dziesięć razy?

Wariacje bez powtórzeń

24. Z siedmiu kolejnych cyfr poczynając od dwóch tworzymy liczbę czterocyfrową o różnych cyfrach. Ile takich liczb możemy utworzyć?
25. Windą 10 piętrowego budynku (przyjmujemy, że wsiedli na parterze i jadą na jedno z 10 pięter) jedzie pięć osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z windy, jeżeli żadne dwie osoby nie wysiadają na tym samym piętrze?
26. Która z liczb jest większa: 10^5 , czy $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$? Jak można to zinterpretować posługując się poprzednim zadaniem? Co musielibyśmy zmienić w poprzednim zadaniu, by jego wynik był równy 10^5 ?