Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie
Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska
Kierunek: Inżynieria Środowiska
Specjalność: Odnawialne Źródła Energii
Semestr letni 2014/2015

Matematyka III
– WEEK 4 –
AGH BIS-2-101-OZ-s

Własności prawdopodobieństwa

1. Dane są: $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, ponadto wiadomo, że $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Oblicz $P(A)$ oraz $P(A \setminus B)$.
2. Dane są: $P(A' \cap B') = \frac{1}{3}$, $P(A') = \frac{5}{9}$, ponadto $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Oblicz $P(B)$ oraz $P(A' \cup B)$.
3. Dane są: $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{7}{8}$, ponadto $A \cap B = \emptyset$. Oblicz $P(A \cup B)$, $P(A \cup B')$, $P(A' \cup B)$.
4. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 99\}$ losujemy jedną. Znajdź prawdopodobieństwo, że będzie ona podzielna przez dwa lub przez pięć.
5. Niech $P(A) = x$ i $P(B) = x^2$. Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Oblicz x.
6. Maria i Jan chodzą na wykład z Matematyki III. Maria chodzi na co drugi wykład. Jan opuszcza 10% wykładów, natomiast na 45% obecni są obydwoje. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
   (a) choć jedno z nich jest na wykładzie,
   (b) dokładnie jedno z nich jest na wykładzie,
   (c) żadne z nich nie jest obecne na wykładzie.
7. Dwóch studentów chodzi niezbyt regularnie na wykłady. Jeden opuszcza 40% zajęć, a drugi chodzi na 70%. Jednocześnie są na 40% wykładów. Oblicz prawdopodobieństwo, że na wykładzie:
   (a) jest dokładnie jeden z nich,
   (b) nie ma żadnego z nich.

Prawdopodobieństwo ...

8. Wybieramy losowo punkt z odcinka $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że odległość losowo wybranego punktu od środka odcinka jest mniejsza niż $\frac{1}{4}$?
9. Z kwadratu jednostkowego wybrano losowo punkt o współrzędnych (x, y). Wyznacz:
   (a) $P(\min(x, y) < a)$,
   (b) $P(\max(x, y) \leqslant a)$,
   (c) $P(|x - y| < a)$,
   (d) $P(\frac{1}{2}(x + y) \geqslant a)$.
10. Romeo i Julia umówili się na spotkanie pomiędzy godziną 20, a 21 na Rynku Głównym w Krakowie (pod głową). Oblicz prawdopodobieństwo spotkania się Romea i Julii jeśli wiadomo, że ze względów bezpieczeństwa czekają na siebie tylko dziesięć minut.
11. Romeo i Julia umówili się na spotkanie pomiędzy godziną 15, a 17 na Rynku Głównym w Krakowie (pod głową). Oblicz prawdopodobieństwo, że Julia przyjdzie później niż Romeo jeżeli wiadomo, że Romeo nie przyszedł przez pierwsze pół godziny.
12. Losujemy jedną rodzinę spośród rodzin z dwojgiem dzieci. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiadomo, że w tej rodzinie:
    (a) (3 pkt) starsze dziecko jest chłopcem,
    (b) (3 pkt) jest co najmniej jeden chłopiec.

13. Z badań genetycznych wynika, że kobieta jest nośnikiem hemofilii z prawdopodobieństwem p. Jeżeli jest ona nośnikiem, to każdy jej syn dziedziczy chorobę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Kobieta, która nie jest nośnikiem rodzi zdrowych synów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
    (a) pierwszy syn będzie zdrowy,
    (b) drugi syn będzie zdrowy jeli pierwszy będzie zdrowy,
    (c) kobieta nie jest nośnikiem hemofilii, gdy jej dwaj pierwsi synowie są zdrowi.
14. Na stole leżą koszulkami do góry trzy karty - as karo $\diamondsuit$, as kier $\heartsuit$ i as pik $\spadesuit$. Jeżeli gracz trafnie odgadnie położenie asa pik, wygra sto euro. Gracz wybiera środkową kartę i wtedy bankier mówi: "Chwileczkę. Odkryję jedną kartę, a ty zastanów się, czy chcesz zmienić swój wybór.", po czym odkrywa kartę pierwszą z lewej, którą okazuje się być as karo. Bankier zawsze odkrywa kartę czerwoną nie wybraną przez gracza. Jeżeli ma dwie możliwości odkrycia karty wybiera każdą z nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Czy gracz powinien zmienić swój pierwotny wybór?
15. Trzej studenci Adam, Bogdan i Cezary nie dostali zaliczenia z matematyki. Prowadzący zajęcia postanowił, że jeden z nich (losowo wybrany) dostanie jednak zaliczenie (UWAGA: na AGH takie przypadki się nie zdarzają, by uzyskać zaliczenie trzeba zdobyć więcej niż 50% możliwych do zdobycia podczas zajęć punktów), o czym dowiedzieli się zainteresowani, ale nie dowiedzieli się który z nich je dostanie. Adam przekupił siostrę prowadzącego zajęcia, która obiecała mu wyjawić imię jednego ze studentów, który ostatecznie nie uzyska zaliczenia, ale o losie Adama nie powie nic. Przed uzyskaniem informacji od siostry prowadzącego zajęcia Adam ocenia, że jego szansa na zdobycie zaliczenia jest równa $\frac{1}{3}$. Siostra prowadzącego zajęcia twierdzi, że Bogdan nie dostanie zaliczenia. Adam uważa teraz, że jego szanse na zaliczenie rosną do $\frac{1}{2}$ (bo zostanie ułaskawiony Adam albo Cezary). Gdzie popełnia błąd?
16. Z urny zawierającej 10 kul białych i 20 czarnych wyciągamy kolejno bez zwracania trzy kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia trzech kul białych?
17. Mamy w urnie b kul białych i c kul czarnych. Wyciągamy jedną kulę i bez sprawdzania jej koloru natychmiast wrzucamy ją do urny. Jaka jest szansa wyciągnięcia za drugim razem kuli białej?
18. Podaj przykłady zdarzeń A i B, dla których:
    (a) $P(A) < P(A|B)$,
    (b) $P(A) > P(A|B)$.